ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 138–147
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-138-147

УДК 519.175.3

О ПЕРЕЧИСЛЕНИИ ПОМЕЧЕННЫХ СВЯЗНЫХ ГРАФОВ БЕЗ МОСТОВ

© 2023 г. **В. А. ВОБЛЫЙ**

Аннотация. Получены явные формулы и асимптотика для ряда классов помеченных графов без мостов: кактусов, графов блоков, полноблочно-кактусных графов и последовательно-параллельных графов. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей почти все графы из рассматриваемых классов имеют мосты.

***Ключевые слова*:** перечисление, помеченный граф, k-циклический граф, блок, мост, граф без мостов, эйлеров граф, последовательно-параллельный граф, асимптотика, случайный граф.

ON ENUMERATION OF LABELED CONNECTED BRIDGELESS GRAPHS

© 2023 **V. A. VOBLYI**

Abstract. In this paper, we obtain explicit formulas and asymptotics for some classes of bridgeless labeled graphs: cacti, block graphs, block-cactus graphs, and series-parallel graphs. We prove that, under a uniform probability distribution, almost all graphs from the classes considered have bridges.

***Keywords and phrases*:** enumeration, labeled graph, k-cyclic graph, block, bridge, bridgeless graph, Eulerian graph, series-parallel graph, asymptotics, random graph.

***AMS Subject Classification*:** 05C30

1. Введение.

Определение 1 (см. [15, с. 55]). *Цикломатическим числом* (*циклическим рангом*) связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин.

Определение 2. *k-Циклический граф* — это граф с цикломатическим числом, равным k.

Определение 3. Для связного графа *точкой сочленения* называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей ребрами граф становится несвязным.

Определение 4. Для связного графа *мостом* называется его ребро, после удаления которого граф становится несвязным.

Определение 5 (см. [15, с. 41]). *Блок* — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения.

Определение 6 (см. [15, с. 45]). *Граф блоков* — это связный граф, у которого все блоки полные графы.

Определение 7 (см. [16, с. 93]). *Кактусом* называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле. Все блоки кактуса — ребра или циклы.

Определение 8 (см. [11]). Связный граф называется *полноблочно-кактусным* (block-cactus graph), если все его блоки или полные графы, или циклы.

Определение 9 (см. [17]). Граф называется *последовательно-параллельным*, если он не содержит полный граф с 4 вершинами в качестве минора.

Определение 10. *Эйлеров* граф — это связный граф, у которого все вершины имеют четную степень.

Определение 11 (см. [22]). Класс графов называется *блочно-устойчивым*, если граф принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу.

Хенлон и Робинсон (см. [20]) получили для производящей функции помеченных графов без мостов несколько функционально-дифференциальных уравнений, а также нелинейное уравнение с частными производными. Однако из этих уравнений не найдены явные формулы и соответствующая асимптотика. В [3] перечислены помеченные бициклические и трициклические графы без мостов. В [7] асимптотически перечислены помеченные связные k-циклические графы без мостов. В [6] найдены число помеченных связных внешнепланарных n-вершинных k-циклических графов без мостов, а также асимптотика для числа таких графов при $n \to \infty$. В [8] асимптотически перечислены помеченные последовательно-параллельные k-циклических графы без мостов.

Известно, что почти все помеченные связные графы являются блоками (см. [16, с. 243]). Очевидно, что число помеченных связных n-вершинных графов без мостов больше или равно числу помеченных n-вершинных блоков, но меньше или равно числу помеченных связных n-вершинных графов. Следовательно, число помеченных связных n-вершинных графов без мостов при $n \to \infty$ асимптотически равно числу помеченных связных n-вершинных графов, т.е. почти все связные графы не имеют мостов. В [1] замечено, что почти все помеченные связные внешнепланарные графы имеют мосты. В статье доказано, что в таких классах помеченных графов, как графы блоков, кактусы, полноблочно-кактусные графы и последовательно-параллельные графы почти все связные графы имеют мосты.

2. Кактусы.

В [10] для числа Ca_n помеченных кактусов с n вершинами получена формула

$$Ca_n = n^{n-2} + (n-1)! \sum_{r=1}^{[(n-1)/2]} \sum_{k=0}^{n-2r-1} \frac{n^{k+r-1}}{k!r!2^r} \binom{n-k-r-2}{r-1}.$$

Теорема 1. *Почти все помеченные кактусы имеют мосты.*

Доказательство. Для числа Ca_n помеченных кактусов с n вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула

$$Ca_n \sim cn^{-5/2} a^n n!, \tag{1}$$

(см. [1]), где $c \approx 0{,}1201498132$, $a \approx 4{,}188654598$.

Отметим, что множество кактусов без мостов совпадает с множеством эйлеровых кактусов. Действительно, у кактуса без мостов все блоки являются простыми циклами, т.е. являются эйлеровыми графами и, следовательно, кактус без мостов — эйлеров граф (см. [11]). С другой стороны, эйлеров кактус не имеет мостов (см. [2]).

Пусть $\overline{Ca}_n$ — число помеченных n-вершинных кактусов без мостов (эйлеровых кактусов). В [12] найдена асимптотика

$$\overline{Ca}_n \sim \bar{c} n^{-5/2} \bar{a}^n n!, \tag{2}$$

где $\bar{c} \approx 0{,}1079436709$, $\bar{a} \approx 2{,}5424753735$.

С помощью формул (1) и (2) и учитывая, что $\bar{a} < a$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{Ca}_n}{Ca_n} = \left(\frac{\bar{c}}{c}\right)\left(\frac{\bar{a}}{a}\right)^n = 0,$$

т.е. доля n-вершинных кактусов без мостов среди всех помеченных n-вершинных кактусов при $n \to \infty$ стремится к нулю, что равносильно утверждению теоремы. $\square$

Число $Ca(n,k)$ помеченных n-вершинных k-циклических кактусов при $n \geqslant 2k+1$ и $k \geqslant 1$ равно (см. [4])

$$Ca(n,k) = \frac{(n-1)!}{k!2^k} \sum_{i=0}^{n-2k-1} \binom{k+i-1}{k-1} \frac{n^{n-k-i-2}}{(n-2k-i-1)!}.$$

Теорема 2. *Почти все помеченные кактусы с фиксированным цикломатическим числом $k \geqslant 1$ имеют мосты.*

Доказательство. Для числа $Ca(n,k)$ помеченных n-вершинных k-циклических кактусов с фиксированным числом $k \geqslant 1$ при $n \to \infty$ известна асимптотическая формула (см. [4])

$$Ca(n,k) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2}\, k!\, \Gamma(\frac{k+1}{2})} n^{n+3k/2-2}. \tag{3}$$

Пусть $\overline{Ca}(n,k)$ — число помеченных n-вершинных k-циклических кактусов без мостов (эйлеровых кактусов). В [2] получена формула

$$\overline{Ca}(n,k) = \frac{(n-1)!n^{k-1}}{k!2^k} \binom{n-k-2}{k-1}.$$

Так как при фиксированном k и $n \to \infty$ имеем $n!/(n-k)! \sim n^k$, то с учетом асимптотики (3) и формулы Стирлинга для факториала получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{Ca}(n,k)}{Ca(n,k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{k-2}(n-k-2)!}{k!2^k(k-1)!(n-2k-1)!\,Ca(n,k)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{2k-3}2^{3k/2}k!\Gamma(\frac{k+1}{2})}{2^k k!(k-1)!\sqrt{\pi}n^{n+(3k-4)/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(k+1)/2}\Gamma(\frac{k+1}{2})}{(k-1)!} n^{(k-1)/2}e^{-n} = 0.$$

Таким образом, доля n-вершинных k-циклических кактусов без мостов среди всех помеченных n-вершинных k-циклических кактусов при фиксированном k и $n \to \infty$ равна нулю, а это равносильно утверждению теоремы. ☐

3. Графы блоков. Обозначим через $P_n(x)$ многочлен Белла одной переменной (см. [18]). Этот многочлен определяется через числа Стирлинга второго рода и имеет следующую производящую функцию:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^k, \quad \exp(x(e^z-1)) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(x)\frac{z^i}{i!}.$$

Для числа H_n помеченных связных n-вершинных графов блоков известна формула (см. [21])

$$H_n = \frac{1}{n} P_{n-1}(n).$$

Теорема 3. *Для числа $\bar{H}_n$ помеченных связных n-вершинных графов блоков без мостов при $n \geqslant 4$ верна формула*

$$\bar{H}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^{n-i-1} n^{n-i-2} P_i(n), \tag{4}$$

где $P_i(n)$ — многочлен Белла одной переменной.

Доказательство. Пусть C_n — число помеченных связных графов с n вершинами, а B_n — число помеченных блоков с n вершинами. Введем экспоненциальные производящие функции

$$C(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{z^n}{n!}, \quad B(z) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

Напомним, что ряды для $B(z)$ и $C(z)$ являются формальными степенными рядами, $[z^i]$ — коэффициентный оператор и $[z^{-1}]$ — оператор формального вычета (см. [13, п. 1.2]). В [1] получена формула

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{n-1}]\exp(nB'(z)) = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\exp(nB'(z))z^{-n}. \tag{5}$$

Формула (5) верна не только для всего класса связных графов, но и для блочно-устойчивого его подкласса (см. [5]). В дальнейшем под $B(z)$ будем понимать производящую функцию для соответствующего подкласса связных графов.

Известно, что класс графов блоков является блочно-устойчивым классом графов (см. [5]). Так как существует единственный помеченный n-вершинный полный граф, то из формулы (5) для числа H_n помеченных связных n-вершинных графов блоков получим

$$H_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{n-1}]\exp(n(B'(z))) = \frac{(n-1)!}{n}[z^{n-1}]\exp(n(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!})).$$

Графы без мостов не имеют блоков, состоящих из одного ребра, которым в производящей функции $B(z)$ графов блоков соответствует слагаемое $z^2/2$. Поэтому для числа $\bar{H}_n$ помеченных связных n-вершинных графов блоков без мостов имеем

$$\begin{aligned}\bar{H}_n &= \frac{(n-1)!}{n}[z^{n-1}]\exp\big(n(B'(z)-z)\big) = \frac{(n-1)!}{n}[z^{n-1}]\exp\left(n\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right) = \\ &= \frac{(n-1)!}{n}[z^{n-1}]\exp\big(n(e^z-z-1)\big) = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\exp(n(e^z-1))\exp(-nz)z^{-n}. \end{aligned} \tag{6}$$

Применяя производящую функцию для многочленов Белла одной переменной и разлагая вторую экспоненту в последнем равенстве (6) в степенной ряд, найдем

$$\begin{aligned}\bar{H}_n &= \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\sum_{i=0}^{\infty}P_i(n)\frac{z^i}{i!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-n)^j}{j!}z^{j-n} = \frac{(n-1)!}{n}\sum_{i=0}^{\infty}P_i(n)\frac{(-n)^{n-i-1}}{i!(n-i-1)!} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{n-1}{i}(-1)^{n-i-1}n^{n-i-2}P_i(n).\end{aligned}$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент не равен нулю при $0 \leqslant i \leqslant n-1$, завершим доказательство теоремы. □

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение.

Теорема 4 (теорема Флажоле—Седжвика; см. [19, теорема VIII.8])**.** *Пусть выполнены следующие условия*:

(i) *суммы рядов*

$$a(z) = \sum_{j\geqslant 0}a_j z^j, \quad b(z) = \sum_{j\geqslant 0}b_j z^j$$

с неотрицательными коэффициентами являются функциями, аналитическими в точке $z=0$; *кроме того,* $b(0)\neq 0$;

(ii) НОД$\{j \mid b_j > 0\} = 1$;

(iii) *если* $R \leqslant \infty$ — *радиус сходимости ряда* $b(z)$, *то радиус сходимости ряда* $a(z)$ *не меньше* R.

Введем обозначения

$$F(N,n) = [z^N]\{a(z)(b(z))^n\} = \frac{1}{2\pi i}\oint a(z)(b(z))^n\frac{dz}{z^{N+1}},$$

$$T = \lim_{x\to R-0}\frac{xb'(x)}{b(x)}, \quad \sigma = \frac{d^2}{dr^2}(\ln b(r) - \lambda\ln r),$$

где λ — такое положительное число, что $0 < \lambda < T$, а r — единственный действительный корень уравнения

$$r\frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda. \tag{7}$$

Тогда для целого $N = \lambda n$ при $n \to \infty$ и $N \to \infty$ верно асимптотическое равенство

$$F(N,n) \sim a(r)\frac{(b(r))^n}{r^{N+1}\sqrt{2\pi n\sigma}}. \tag{8}$$

Теорема 5. *Для числа H_n помеченных графов блоков с n вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$H_n \sim c_1 n^{-5/2} a_1^n n!, \tag{9}$$

где $c_1 \approx 0{,}1807375998$, $a_1 \approx 3{,}782427973$.

Доказательство. В нашем случае в силу формулы (5) имеем

$$H_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^n]z\big(\exp(e^z-1)\big)^n = \frac{(n-1)!}{n}F(N,n),$$

где $N = n$, $\lambda = 1$, $a(z) = z$, $b(z) = \exp(e^z - 1)$.

Так как ряд для $b(z)$ сходится при $|z| < \infty$, оператор формального вычета является контурным интегралом. Очевидно, функции $a(z)$ и $b(z)$ аналитические в точке $z = 0$ и $b(0) = 1$. Функция $b(z)$ имеет положительные коэффициенты, так как $b(z) = \exp(B(z))$ и $B(z)$ — производящая функция для числа помеченных блоков частного вида. Поскольку $b_2 > 0$, $b_3 > 0$, имеем НОД$\{j \mid b_j > 0\} = 1$. Очевидно, ряды $a(z)$ и $b(z)$ имеют бесконечный радиус сходимости. Таким образом, условия (i)–(iii) теоремы Флажоле—Седжвика (теорема 4) выполнены.

Имеем

$$T = \lim_{x\to+\infty}\frac{xb'(x)}{b(x)} = \lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty, \quad 0 < \lambda < T.$$

В нашем случае уравнение (7) имеет вид $re^r = 1$. Решая это уравнение с помощью Maple, видим, что его единственным действительным корнем является число $r \approx 0{,}5671432904$. Для величины

$$\sigma = \Big(\frac{b'(r)}{b(r)}\Big)' + \frac{\lambda}{r^2} = e^r + \frac{1}{r^2}$$

находим $\sigma \approx 4{,}872177598$. Также с помощью Maple получаем

$$c_1 = \frac{a(r)}{r\sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \approx 0{,}1807375998, \quad a_1 = \frac{b(r)}{r} \approx 3{,}782427974.$$

Окончательно при $n \to \infty$ имеем асимптотику

$$H_n = \frac{(n-1)!}{n}F(N,n) \sim \frac{(n-1)!}{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}n^{-1/2}\left(\frac{b(r)}{r}\right)^n \sim n!c_1 n^{-5/2}a_1^n. \qquad \square$$

Теорема 6. *Для числа $\bar{H}_n$ помеченных графов n-вершинных графов блоков без мостов верна оценка*

$$\bar{H}_n \leqslant \bar{c}_1 n^{-2}\bar{a}_1^n n!, \tag{10}$$

где $\bar{c}_1 \approx 0{,}8064659942$, $\bar{a}_1 \approx 1{,}912871357$.

Доказательство. Используем обозначения теоремы Флажоле—Седжвика (теорема 4). В этом случае в силу формулы (5) получаем

$$\bar{H}_n = \frac{(n-1)!}{n}\,[z^n]\,z\big(\exp(e^z-z-1)\big)^n = \frac{(n-1)!}{n}F(N,n),$$

где $N = n$, $\lambda = 1$, $a(z) = z$, $b(z) = \exp(e^z - z - 1)$. Условия (i)–(iii) теоремы Флажоле—Седжвика выполнены. Имеем

$$T = \lim_{x\to+\infty}\frac{xb'(x)}{b(x)} = \lim_{x\to+\infty} x(e^x-1) = +\infty, \quad 0 < \lambda < T.$$

С помощью Maple находим, что уравнение (7), в данном случае имеющее вид $r(e^r - 1) = 1$, имеет два действительных корня $r_1 \approx -1{,}349976485$ и $r_2 \approx 0{,}8064659942$, из которых один положительный.

В силу [19, предложение VIII.7] имеем оценку

$$F(N,n) \leqslant a(r_2)(b(r_2))^n r_2^{-n} = r_2 \left(\frac{1}{r_2}\exp(e^{r_2} - r_2 - 1)\right)^n.$$

Обозначив $\bar{c}_1 \approx 0{,}8064659942$, $\bar{a}_1 = \frac{1}{r_2}\exp(e^{r_2} - r_2 - 1) \approx 1{,}912871356$, получим оценку (10). □

Теорема 7. *Почти все помеченные графы блоков имеют мосты.*

Доказательство. С помощью формул (9) и (10), учитывая неравенство $\bar{a}_1 < a_1$, находим

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\bar{H}_n}{H_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\bar{c}_1}{c_1}\right)\sqrt{n}\left(\frac{\bar{a}_1}{a_1}\right)^n = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\bar{H}_n}{H_n} = 0,$$

т.е. доля n-вершинных графов блоков без мостов среди всех помеченных n-вершинных графов блоков при $n \to \infty$ стремится к нулю, что равносильно утверждению теоремы. □

4. Полноблочно-кактусные графы.

Теорема 8. *Для числа $\bar{F}_n$ помеченных n-вершинных полноблочно-кактусных графов без мостов при $n \geqslant 4$ верна формула*

$$\bar{F}_n = \bar{H}_n + (n-1)! \sum_{p=1}^{[(n-1)/3]} \sum_{i=0}^{n-3p-1} \sum_{j=0}^{n-3p-i-1} P_i(n) \frac{(-1)^j n^{j+p-1}}{i!j!2^l} \binom{n-2p-i-j-2}{p-1},$$

где $\bar{H}_n$ — число помеченных n-вершинных графов блоков без мостов.

Доказательство. Класс полноблочно-кактусных графов является блочно-устойчивым классом графов (см. [5]) и для него верна формула (5). У полноблочно-кактусного графа все блоки являются или полными графами, или циклами. Так как существует единственный помеченный n-вершинный полный граф, а число помеченных циклов с n вершинами равно $(n-1)!/2$, то

$$B(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2}(n-1)!\frac{z^n}{n!}, \quad B'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2}z^n = e^z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)}.$$

Следовательно, для числа F_n помеченных n-вершинных полноблочно-кактусных графов из формулы (5) имеем

$$F_n = \frac{(n-1)!}{n}\,[z^{n-1}]\,\exp n\left(e^z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)}\right).$$

Для графов без мостов, вычитая из производящей функции для числа блоков $B(z)$ слагаемое $z^2/2$, соответствующее блоку-ребру, получим

$$\bar{F}_n = \frac{(n-1)!}{n}\,[z^{n-1}]\,\exp n\left(e^z - 1 - z + \frac{z^3}{2(1-z)}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{n}\,[z^{-1}]\,\exp\big(n(e^z-1)\big) exp(-nz) expn\left(\frac{z^3}{2(1-z)}\right) z^{-n}. \quad (11)$$

Применяя производящую функцию для многочленов Белла одной переменной и разлагая вторую и третью экспоненты в последнем равенстве в степенной ряд, найдем

$$\bar{F}_n = \frac{(n-1)!}{n}\,[z^{-1}] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i(n)}{i!} z^i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-n)^j z^j}{j!} \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n^p z^{3p}}{2^p (1-z)^p p!}\right) z^{-n}.$$

С помощью известного ряда (см. [14, с. 141])

$$(1-z)^{-p} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+p-1}{p-1} z^m$$

получим

$$\bar{F}_n = \frac{(n-1)!}{n}\,[z^{-1}]\sum_{i=0}^{\infty} P_i(n)\frac{z^i}{i!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-n)^j}{j!}z^{j-n}+$$

$$+\,(n-1)!\,[z^{-1}]\sum_{i=0}^{\infty}\frac{P_i(n)}{i!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-n)^j}{j!}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n^{p-1}}{2^p p!}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+p-1}{p-1}z^{3p+i+j+m-n} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{n}\sum_{i=0}^{\infty}P_i(n)\frac{(-n)^{n-i-1}}{i!(n-i-1)!} + (n-1)!\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{P_i(n)n^{j+p-1}}{2^p p! i!}\binom{n-i-2p-2}{p-1}.$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент не равен нулю при $0 \leqslant p-1 \leqslant n-i-j-2p-2$, т.е. $3p \leqslant n-i-j-1 \leqslant n-1$, завершим доказательство теоремы. $\square$

Теорема 9. *Для числа $\bar{F}_n$ помеченных n-вершинных полноблочно-кактусных графов без мостов при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$\bar{F}_n \sim \bar{c}_2 n^{-5/2}\bar{a}_2^n n!, \tag{12}$$

где $\bar{c}_2 \approx 0{,}1076664043$, $\bar{a}_2 \approx 2{,}617226590$.

Доказательство. Используем обозначения теоремы Флажоле—Седжвика (теорема 4). В этом случае в силу формулы (11) имеем

$$\bar{F}_n = \frac{(n-1)!}{n}\,[z^n]\,z\left(\exp\left(e^z - z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)}\right)\right)^n = \frac{(n-1)!}{n}F(N,n),$$

где

$$N = n, \quad \lambda = 1, \quad a(z) = z, \quad b(z) = \exp\left(e^z - z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)}\right).$$

Так как ряд для $B(z)$ сходится при $|z| < 1$, оператор формального вычета является контурным интегралом. Очевидно, функции $a(z)$ и $b(z)$ аналитичны в точке $z = 0$ и $b(0) = 1$. Функция $b(z)$ имеет положительные коэффициенты, так как $b(z) = \exp(B'(z))$ и $B(z)$ — производящая функция для числа помеченных блоков частного вида. Поскольку $b_3 > 0$, $b_4 > 0$, имеем

$$\text{НОД}\{j \mid b_j > 0\} = 1.$$

Так как $z = 1$ — ближайшая к началу координат особая точка функции $b(z)$, радиус сходимости R соответствующего ряда равен 1. Очевидно, ряд $a(z)$ имеет бесконечный радиус сходимости. Таким образом, условия (i)–(iii) теоремы Флажоле—Седжвика выполнены. Имеем

$$T = \lim_{x\to 1-0}\frac{xb'(x)}{b(x)} = \lim_{x\to 1-0} x\left(e^x - 1 + \frac{3x^2 - 2x^3}{2(1-x)^2}\right) = +\infty, \quad 0 < \lambda < T.$$

В нашем случае уравнение (7) имеет вид

$$r\left(e^r - 1 + \frac{3r^2 - 2r^3}{2(1-r)^2}\right) = 1.$$

Решая его с помощью Maple, видим, что его единственным действительным корнем в круге сходимости ряда $b(z)$, т.е. при $|z| < 1$, является число $r \approx 0{,}5266974160$. Также с помощью Maple находим значение величины

$$\sigma = \left(\frac{b'(r)}{b(r)}\right)' + \frac{\lambda}{r^2} = e^r + \frac{r^3 - 3r^2 + 3r}{(1-r)^3} + \frac{1}{r^2},$$

равное $\sigma \approx 13{,}72965780$, а также

$$\bar{c}_2 = \frac{a(r)}{r\sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \approx 0{,}1076664043, \quad \bar{a}_2 = \frac{b(r)}{r} \approx 2{,}617226590.$$

Окончательно при $n \to \infty$ имеем асимптотику

$$\bar{F}_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N,n) \sim \frac{(n-1)!}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} n^{-1/2} \left(\frac{b(r)}{r}\right)^n \sim n! \bar{c}_2 n^{-5/2} \bar{a}_2^n. \qquad \square$$

Теорема 10. *Почти все помеченные полноблочно-кактусные графы имеют мосты.*

Доказательство. В [11] для числа F_n помеченных n-вершинных полноблочно-кактусных графов найдена асимптотика

$$F_n \sim c_2 n^{-5/2} a_2^n n!, \tag{13}$$

где $c_2 \approx 0{,}1178070871$, $a_2 \approx 4{,}261224133$. С помощью формул (12) и (13), учитывая неравенство $\bar{a}_2 < a_2$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{F}_n}{F_n} = \left(\frac{\bar{c}_2}{c_2}\right) \left(\frac{\bar{a}_2}{a_2}\right)^n = 0.$$

Это значит, что доля полноблочно-кактусных графов без мостов среди всех помеченных полноблочно-кактусных графов при $n \to \infty$ стремится к нулю, что равносильно утверждению теоремы. $\square$

5. Последовательно-параллельные графы.

Теорема 11. *Для числа $\overline{SP}_n$ помеченных n-вершинных последовательно-параллельных графов без мостов при $n \geqslant 4$ верна формула*

$$\overline{SP}_n = \frac{(n-1)!}{n} [x^{-1}] \exp n\big(B'(x) - x\big) x^{-n} = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp\left(n\left[\frac{z+1}{2e^z-1} - \frac{z^2+2}{2(2e^z-z-1)}\right]\right) \times (2e^z-1)^n (2e^z-z-1)^n \left[\frac{2e^z}{(2e^z-1)^2} - \frac{2e^z-1}{(2e^z-z-1)^2}\right] z^{-n}. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть SP_n — число помеченных n-вершинных последовательно-параллельных графов. В [5] из формулы (5) получены выражения

$$SP_n = \frac{(n-1)!}{n} [x^{-1}] \exp\big(nB'(x)\big) x^{-n}, \quad B'(x) = \frac{xD_0(2 - xD_0^2)}{2(1+xD_0)}, \quad \ln\left(\frac{1+D_0}{2}\right) = \frac{xD_0^2}{1+xD_0}.$$

После замены $z = \ln((1+D_0)/2)$ получаем

$$D_0 = 2e^z - 1, \quad x = \frac{z}{D_0(D_0 - z)} = \frac{1}{2e^z - z - 1} - \frac{1}{2e^z - 1},$$

$$B'(x) = \frac{z}{2e^z-1} - \frac{z^2}{2(2e^z-z-1)}, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{2e^z}{(2e^z-1)^2} - \frac{2e^z-1}{(2e^z-z-1)^2}.$$

Из этих выражений в [5] получена формула

$$SP_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp\left(n\left[\frac{z}{2e^z-1} - \frac{z^2}{2(2e^z-z-1)}\right]\right) \times (2e^z-1)^n (2e^z-z-1)^n \left[\frac{2e^z}{(2e^z-1)^2} - \frac{2e^z-1}{(2e^z-z-1)^2}\right] z^{-n}.$$

Для графов без мостов, вычитая из производящей функции для числа блоков $B(x)$ слагаемое $x^2/2$, соответствующее блоку-ребру, получим формулу (14). $\square$

Теорема 12. *Для числа $\overline{SP}_n$ помеченных n-вершинных последовательно-параллельных графов без мостов при $n \to \infty$ верна оценка*

$$\overline{SP}_n \leqslant \bar{c}_3 n^{-2} \bar{a}_3^n n!, \tag{15}$$

где $\bar{c}_3 \approx 0{,}002486786009$, $\bar{a}_3 \approx 7{,}983391665$.

Доказательство. Воспользуемся опять теоремой Флажоле—Седжвика. В этом случае имеем

$$\overline{SP}_n = \frac{(n-1)!}{n}F(N,n), \quad N = n, \quad \lambda = 1, \quad a(z) = z\left[\frac{2e^z}{(2e^z-1)^2} - \frac{2e^z-1}{(2e^z-z-1)^2}\right],$$
$$b(z) = (2e^z-1)(2e^z-z-1)\exp\left[\frac{z+1}{2e^z-1} - \frac{z^2+2}{2(2e^z-z-1)}\right].$$

В [9] доказано, что $z = -\ln 2$ — ближайшая к началу координат особая точка функций $a(z)$ и $b(z)$; следовательно, радиус сходимости соответствующих рядов равен $R = \ln 2 \approx 0{,}69315$.

Очевидно, функции $a(z)$ и $b(z)$ аналитичны в точке $z = 0$, причем $b(0) = 1$. Имеем

$$a(z) = z\frac{d}{dz}\frac{z}{(1-2e^z)(1-(2e^z-z))} = z\frac{d}{dz}\left(\sum_{p=0}^{\infty}(2e^z)^p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty}(2e^z-z)^q\right).$$

Ряд для функции $a(z)$ является рядом с положительными коэффициентами, так как в результате перемножения рядов с положительными коэффициентами, а также при возведении в степень или дифференцирования таких рядов получается ряд с положительными коэффициентами.

Ряд для функции $b(z)$ имеет положительные коэффициенты, так как

$$b(z) = \exp\big(\bar{B}(z)\big)\big(2e^z-1\big)\big(2e^z-z-1\big)$$

и $\bar{B}(z)$ — производящая функция для числа помеченных блоков частного вида, а ряды для $(2e^z-1)$ и $(2e^z-z-1)$ имеют положительные коэффициенты.

С помощью Maple найдем $b_1 = 3$, $b_2 = 9/2$. Следовательно, НОД$\{j \mid b_j > 0\} = 1$. Таким образом, условия (i)–(iii) теоремы Флажоле—Седжвика выполнены. Имеем

$$\phi(z) = z\frac{b'(z)}{b(z)} = z\big(\ln b(z)\big)' = z\left[\frac{4e^z}{2e^z-1} - \frac{2(z+1)e^z}{(2e^z-1)^2} + \frac{(z^2+2)(2e^z-1)}{2(2e^z-z-1)^2}\right],$$
$$T = \lim_{z\to\ln 2-0}\phi(z) = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{9}(\ln 2+1) + \frac{3(\ln^2 2+2)}{2(3-\ln 2)^2}\right)\ln 2 \approx 1{,}8114.$$

Так как $\lambda = 1$ и $0 < \lambda < T$, решая уравнение $\phi(r) = \lambda$ с помощью Maple, найдем, что оно в круге сходимости функций $a(z)$ и $b(z)$ имеет два действительных корня $r_1 \approx -0{,}5072321027$ и $r_2 \approx 0{,}3529953286$, из которых один положительный. В силу [19, предложение VIII.7] имеем оценку

$$F(N,n) \leqslant a(r_2)(b(r_2))^n r_2^{-n} = \bar{c}_3\bar{a}_3^n,$$

где $\bar{c}_3 = a(r_2) \approx 0{,}002486786009$, $\bar{a}_3 = b(r_2)/r_2 \approx 7{,}983391665$. Так как $\overline{SP}_n = \dfrac{(n-1)!}{n}F(N,n)$, получим оценку (15). □

Теорема 13. *Почти все помеченные последовательно-параллельные графы имеют мосты.*

Доказательство. В [17] при $n \to \infty$ найдена асимптотика

$$SP_n \sim c_3 n^{-5/2} a_3^n n!, \tag{16}$$

где $a_3 \approx 9{,}0733$. Отметим, что величина константы c_3, найденной в [17], была уточнена в работе автора [9]. Однако величина константы не имеет значения для доказательства этой теоремы.

С помощью формул (15) и (16), учитывая неравенство $\bar{a}_3 < a_3$, находим

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{SP}_n}{SP_n} \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\bar{c}_3}{c_3}\right)\sqrt{n}\left(\frac{\bar{a}_3}{a_3}\right)^n = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{SP}_n}{SP_n} = 0,$$

т.е. доля последовательно-параллельных графов без мостов среди всех помеченных последовательно-параллельных графов при $n \to \infty$ стремится к нулю, что равносильно утверждению теоремы. □

В следующей таблице представлены числа $\bar{H}_n$, $\bar{F}_n$ и $\overline{SP}_n$, вычисленные с помощью формул из теорем 3, 8 и 11 (для $n = 3$ непосредственное вычисление).

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\bar{H}_n$	1	1	16	61	911	7169	117307	1454261	27245032
$\bar{F}_n$	1	4	28	301	3581	54209	947899	18990941	430587592
$\overline{SP}_n$	1	9	167	4350	148767	6294176	317381913	18575403930	1237406183975

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воблый В. А.* Об одной формуле для числа помеченных связных графов// Дискрет. анал. иссл. опер. — 2012. — *19*, № 4. — С. 48–59.
2. *Воблый В. А.* Перечисление помеченных эйлеровых кактусов// Мат. XI Междунар. семин. «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 18–23 июня 2012 г.). — М.: МГУ, 2012. — С. 275–277.
3. *Воблый В. А.* О перечислении помеченных связных бициклических и трициклических графов без мостов// Мат. заметки. — 2012. — *91*, № 2. — С. 308–311.
4. *Воблый В. А.* О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и ребер// Дискр. анал. иссл. опер. — 2016. — *23*, № 2. — С. 5–20.
5. *Воблый В. А.* Второе соотношение Риддела и следствия из него// Дискр. анал. иссл. опер. — 2019. — *26*, № 1. — С. 20–32.
6. *Воблый В. А.* О числе помеченных внешнепланарных k-циклических графов без мостов// Дискр. анал. иссл. опер. — 2020. — *27*, № 1. — С. 5–16.
7. *Воблый В. А.* Об асимптотическом перечислении помеченных связных k-циклических графов без мостов// Мат. заметки. — 2020. — *107*, № 2. — С. 304–306.
8. *Воблый В. А.* Асимптотическое перечисление помеченных последовательно-параллельных k-циклических графов без мостов// Дискр. анал. иссл. опер. — 2021. — *28*, № 4. — С. 61–69.
9. *Воблый В. А.* Уточнение асимптотики для числа помеченных последовательно-параллельных графов// Мат. заметки. — 2021. — *109*, № 6. — С. 944–947.
10. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Новая формула для числа помеченных кактусов с заданным числом вершин// Тез. докл. Междунар. науч. конф.«Дискретная математика, теория графов и их приложения» (Минск, 11–14 ноября 2013 г.). — Минск, 2013. — С. 9–11.
11. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных полноблочно-кактусных графов// Дискр. анал. иссл. опер. — 2014. — *21*. — С. 24–32.
12. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Асимптотическое перечисление помеченных эйлеровых кактусов// Мат. XVII Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 16-20 июля 2014 г.). — Казань, 2014. — С. 58–60.
13. *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, 1990.
14. *Прудников А. П. и др.* Интегралы и ряды. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
15. *Харари Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1973.
16. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. — М.: Мир, 1977.
17. *Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M.* Enumeration and limit laws of series-parallel graphs// Eur. J. Combin. — 2007. — *28*, № 8. — P. 2091–2105.
18. *Carlitz L.* Single variable Bell polynomials// Collect. Math. — 1962. — *14*. — P. 13–25.
19. *Flajolet P., Sedgewick G. E.* Analytic Combinatorics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009.
20. *Hanlon P., Robinson R. W.* Counting bridgeless graphs// J. Combin. Theory. Ser. B. — 1982. — *33*, № 1. — P. 276–305.
21. *Leroux P.* Enumerative problems inspired by Mayer's theory of cluster integrals// Electron. J. Combin. — 2004. — *11*. — R32.
22. *McDiarmid C., Scott A.* Random graphs from a block stable class// Eur. J. Combin. — 2016. — *58*. — P. 96–106.

Воблый Виталий Антониевич
Всероссийский институт научной и технической информации, Москва
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`