ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 3–9
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-3-9

УДК 514.76

ГЕОМЕТРИЯ ПОЧТИ 3-КВАЗИ-САСАКИЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ ВТОРОГО РОДА

© 2023 г. С. В. ГАЛАЕВ

Аннотация. Определена структура почти 3-квази-сасакиева многообразия второго рода. Доказано, что на распределении нулевой кривизны почти квази-сасакиева многообразия с помощью связности с кососимметрическим кручением определяется структура почти 3-квази-сасакиева многообразия.

Ключевые слова: субриманово многообразие контактного типа, почти контактное метрическое многообразие, внутренняя связность, почти квази-сасакиево многообразие, кососимметрическая связность, почти 3-квази-сасакиева структура.

GEOMETRY OF ALMOST 3-QUASI-SASAKIAN MANIFOLDS OF THE SECOND KIND

© 2023 S. V. GALAEV

Abstract. In this paper, we define the structure of an almost 3-quasi-Sasakian manifold of the second kind and prove that on a zero-curvature distribution of an almost quasi-Sasakian manifold, the structure of an almost 3-quasi-Sasakian manifold is determined by a connection with skew-symmetric torsion.

Keywords and phrases: sub-Riemannian manifold of contact type, almost contact metric manifold, interior connection, almost quasi-Sasakian manifold, skew-symmetric connection, almost 3-quasi-Sasakian structure.

AMS Subject Classification: 53C17

1. Введение. В настоящее время активно исследуются почти 3-контактные метрические структуры, как первого, так и второго рода. В первом случае размерность многообразия, несущего соответствующую структуру, равна $n = 4m+3$, во втором случае — равна $n = 4m+1$ (см. [9,11]). Почти 3-контактные метрические структуры первого рода определены Y. Y. Kuo в 1970 г. [20]. Однако структурами первого рода они были названы позже, в статье I. Sato в 1973 г. [21]. В той же статье I. Sato назвал структуры, определенные S. Hashimoto в 1964 г. [18], почти 3-контактными метрическими структурами второго рода. В обоих случаях на гладком многообразии определяются три почти контактные структуры, совместимые с римановой метрикой. В то же время, структура первого рода включает три структурных векторных поля, а структура второго рода — одно структурное векторное поле Риба. Почти 3-контактные метрические структуры первого рода устроены более сложно, чем структуры второго рода, но именно структуры первого рода вызывают больший интерес со стороны геометров. Важность изучения почти 3-контактных метрических структур первого рода подробно обсуждается в работах I. Agricola [6–9]. Там же активно обсуждается проблема поиска связности на многообразиях с почти 3-контактной метрической структурой более предпочтительной, чем связность Леви-Чивиты.

Среди многочисленных направлений в изучении почти 3-контактных метрических структур обоих родов выделяется область исследования структур с различными классами образующих их почти контактных метрических структур [8,12]. Обратимся, в частности, к работам B. Cappelletti-Montano [12–14]. Автор подробно исследует геометрию 3-квази-сасакиевых многообразий первого рода. В настоящей работе вводится понятие почти квази-сасакиева многообразия (AQS-многообразия). Почти квази-сасакиева структура (AQS-структура) в отличие от квази-сасакиевой структуры (QS-структуры) является почти нормальной структурой [5]. Почти нормальные структуры естественным образом возникают на распределениях нулевой кривизны субримановых многообразий контактного типа [4]. Почти квази-сасакиево многообразие M определяется как почти нормальное почти контактное метрическое многообразие с замкнутой фундаментальной формой, для которого выполняется условие $d\eta(\boldsymbol{\xi},\cdot)=0$. На AQS-многообразии определена единственная метрическая связность ∇^N с кососимметрическим кручением. Задание связности ∇^N позволяет определить на распределении D многообразия M как на тотальном пространстве векторного расслоения почти 3-контактную метрическую структуру второго рода [1,3,5]. В настоящей работе доказывается, что определяемая на распределении AQS-многообразия M почти 3-контактная метрическая структура является почти 3-квази-сасакиевой структурой, если распределение многообразия M имеет нулевую кривизну.

2. AQS-многообразия, оснащенные канонической кососимметрической связностью. Пусть M — гладкое риманово многообразие нечетной размерности $n=2m+1$ с заданной на нем субримановой структурой $(M,\boldsymbol{\xi},\eta,g,D)$ контактного типа, где η и $\boldsymbol{\xi}$ — 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и $D^{\perp}$ (см. [4]).

Карту $k(x^i)$ $(i,j,k=1,\dots,n;\ a,b,c=1,\dots,n-1)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n=\boldsymbol{\xi}$ (см. [4]). Пусть $P\colon TM\to D$ — проектор, определяемый разложением $TM=D\oplus D^{\perp}$, и $k(x^i)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a)=\boldsymbol{e}_a=\partial_a-\Gamma^n_a\partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D: $D=\mathrm{Span}(\boldsymbol{e}_a)$.

Для адаптированных карт $k(x^i)$ и $k'(x^{i'})$ выполняются следующие формулы преобразования координат:

$$x^a=x^a(x^{a'}),\quad x^n=x^{n'}+x^n(x^{a'}).$$

Тензорное поле t типа (p,q) называется допустимым к распределению D или трансверсальным, если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\boldsymbol{\xi}$ или η. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид:

$$t=t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\boldsymbol{e}_{a_1}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{e}_{a_p}\otimes dx^{b_1}\otimes\dots\otimes dx^{b_q}.$$

Из равенства $[\boldsymbol{e}_a,\boldsymbol{e}_b]=2\omega_{ba}\partial_n$, где $\omega=d\eta$, следует, что условие $d\eta(\boldsymbol{\xi},X)=0$ эквивалентно справедливости равенства $\partial_n\Gamma^n_a=0$.

Пусть $\tilde{\nabla}$ связность Леви-Чивиты и $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ — ее коэффициенты. Воспользовавшись равенством

$$2\tilde{\Gamma}^m_{ij}=g^{km}(\boldsymbol{e}_i g_{jk}+\boldsymbol{e}_j g_{ik}-\boldsymbol{e}_k g_{ij}+\Omega^l_{kj}g_{li}+\Omega^l_{ki}g_{lj})+\Omega^m_{ij},$$

убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 1. *Коэффициенты $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ связности Леви-Чивиты субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид:*

$$\tilde{\Gamma}^c_{ab}=\Gamma^c_{ab},\quad \tilde{\Gamma}^n_{ab}=\omega_{ba}-C_{ab},\quad \tilde{\Gamma}^b_{an}=\tilde{\Gamma}^b_{na}=C^b_a+\psi^b_a,\quad \tilde{\Gamma}^n_{na}=-\partial_n\Gamma^n_a,\quad \tilde{\Gamma}^a_{nn}=g^{ab}\partial_n\Gamma^n_b,$$

где

$$\Gamma^a_{bc}=\frac{1}{2}g^{ad}(\boldsymbol{e}_b g_{cd}+\boldsymbol{e}_c g_{bd}-\boldsymbol{e}_d g_{bc}),\quad \psi^b_a=g^{bc}\omega_{ac},\quad C_{ab}=\frac{1}{2}\partial_n g_{ab},\quad C^b_a=g^{bc}C_{ac}.$$

Здесь эндоморфизм $\psi\colon TM\to TM$ определяется из равенства $\omega(X,Y)=g(\psi X,Y)$. Выполняются также следующие соотношения: $C(X,Y)=\frac{1}{2}(L_{\boldsymbol{\xi}}g)(X,Y)$, $g(CX,Y)=C(X,Y)$. Как видно из последних равенств, символом C в зависимости от ситуации обозначаются тензоры разных валентностей.

N-связность ∇^N определяется на субримановом многообразии, наделенном эндоморфизмом $N\colon TM \to TM$ касательного расслоения многообразия M ($N\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, $N(D) \subset D$) как связность, следующим образом выражающаяся через связность Леви-Чивиты $\widetilde{\nabla}_X Y$:

$$\nabla^N_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y + (\widetilde{\nabla}_X \eta)(Y)\boldsymbol{\xi} - \eta(Y)\widetilde{\nabla}_X \boldsymbol{\xi} - \eta(X)(\widetilde{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}} \eta)(Y)\boldsymbol{\xi} - \eta(X)(C + \psi - N)Y.$$

Непосредственно проверяется, что в адаптированных координатах отличные от нуля коэффициенты G^i_{jk} связности ∇^N_X имеют вид

$$G^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\boldsymbol{e}_b g_{cd} + \boldsymbol{e}_c g_{bd} - \boldsymbol{e}_d g_{bc}), \quad G^b_{na} = N^b_a, \quad G^n_{na} = -\partial_n \Gamma^n_a.$$

Предложение 2 (см. [17])**.** *Линейная связность ∇^N, заданная на субримановом многообразии, кососимметрична тогда и только тогда, когда $N = 2\psi$.*

Ранг субримановой структуры полагается равным $2p$, если $(d\eta)^p \neq 0$, $\eta \wedge (d\eta)^p = 0$, и равным $2p+1$, если $\eta \wedge (d\eta)^p \neq 0$, $(d\eta)^{p+1} = 0$. Легко проверяется, что ранг субримановой структуры равен $2p+1$ тогда и только тогда, когда $\partial_n \Gamma^n_a = 0$. В случае, когда $N = 2\psi$, связность ∇^N будем называть канонической связностью.

Заметим, что каноническая связность в случае субримановой структуры четного ранга не является метрической связностью. Действительно,

$$\nabla^N_n g_{na} = -\mathrm{G}^n_{na} = \partial_n \Gamma^n_a.$$

Пусть теперь M — почти контактное метрическое многообразие размерности $n = 2m+1$ с заданной на нем структурой $(M, \boldsymbol{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$. Здесь φ — тензор типа $(1,1)$, называемый структурным эндоморфизмом, $\boldsymbol{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g — (псевдо) риманова метрика. При этом выполняются следующие условия:

(i) $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \boldsymbol{\xi}$,
(ii) $\eta(\boldsymbol{\xi}) = 1$,
(iii) $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$, $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Здесь $\Gamma(TM)$ — модуль гладких векторных полей на M.

Гладкое распределение $D = \ker(\eta)$ называется распределением почти контактной структуры. В качестве следствия условий (i)—(iii) получаем:

(i′) $\varphi\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$,
(ii′) $\eta \circ \varphi = 0$,
(iii′) $\eta(X) = g(X, \boldsymbol{\xi})$, $X \in \Gamma(TM)$.

Кососимметрический тензор $\Omega(X, Y) = g(X, \varphi Y)$ называется фундаментальной формой структуры. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Гладкое распределение $D^\perp = \mathrm{Span}(\boldsymbol{\xi})$, ортогональное распределению D, называется оснащением распределения D. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^\perp$.

Многообразие Сасаки — контактное метрическое многообразие, удовлетворяющее дополнительному условию

$$N^{(1)}_\varphi = N_\varphi + 2d\eta \otimes \boldsymbol{\xi} = 0, \tag{1}$$

где

$$N_\varphi(X, Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X, Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

— тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Выполнение условия (1) означает, что пространство Сасаки является нормальным пространством.

Назовем почти контактное метрическое многообразие почти контактным кэлеровым многообразием [5, 17], если выполняются следующие условия:

$$d\Omega = 0, \quad \tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2\varphi^* d\eta \otimes \boldsymbol{\xi} = 0.$$

Многообразие, для которого выполняется условие $N_\varphi = N_\varphi + 2d\eta \otimes \boldsymbol{\xi} = 0$ названо нами почти нормальным многообразием. Легко проверяется, что почти нормальное почти контактное метрическое многообразие является нормальным многообразием тогда и только тогда, когда $d\eta = \varphi^* d\eta$.

Пусть $P\colon TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$. Тогда имеет место следующее предложение.

Предложение 3. *Для любого почти контактного метрического многообразия выполняется следующее равенство* $PN_{\varphi}^{(1)} = \tilde{N}_{\varphi}$.

Заметим, что из предложения 3 следует справедливость соотношения

$$N_{\varphi}^{(1)}(X,Y) = \tilde{N}_{\varphi}(X,Y) + 2(d\eta(X,Y) - d\eta(\varphi X, \varphi Y))\boldsymbol{\xi}.$$

Внутренней линейной связностью ∇ (см. [4]) на многообразии с почти контактной метрической структурой называется отображение

$$\nabla\colon \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $\nabla_{f_1 X + f_2 Y} = f_1 \nabla_X + f_2 \nabla_Y$,
(ii) $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,
(iii) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\boldsymbol{e}_a} \boldsymbol{e}_b = \Gamma_{ab}^c \boldsymbol{e}_c$. Из равенства $\boldsymbol{e}_a = A_a^{a'} \boldsymbol{e}_{a'}$, где

$$A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a},$$

обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:

$$\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_{c'}^c \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_{c'}^c \boldsymbol{e}_a A_b^{c'}.$$

Отсюда, в частности, следует, что производные $\partial_n \Gamma_{ac}^d$ являются компонентами допустимого тензорного поля. Рассмотрим два простейших примера контактных кэлеровых многообразий.

Пример 1. Пусть $M = \{(x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5 : y \neq 0\}$ — гладкое многообразие размерности 5, оснащенное почти контактной метрической структурой $(M, \boldsymbol{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$. Здесь использованы следующие обозначения:

(a) $D = \operatorname{Span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$, где

$$\boldsymbol{e}_1 = \partial_1 - y\partial_5, \quad \boldsymbol{e}_2 = \partial_2, \quad \boldsymbol{e}_3 = \partial_3, \quad \boldsymbol{e}_4 = \partial_4,$$

$(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5)$ — естественный базис пространства $\mathbb{R}^5$,
(b) $\boldsymbol{\xi} = \partial_5$,
(c) $\eta = dz + ydx$,
(d) $\varphi\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3$, $\varphi\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_4$, $\varphi\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_1$, $\varphi\boldsymbol{e}_4 = -\boldsymbol{e}_2$, $\varphi\boldsymbol{\xi} = 0$,
(e) базис $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{\xi})$ состоит из ортонормированных векторов.

Непосредственно проверяется, что почти контактное метрическое многообразие M не является нормальным, но является почти нормальным многообразием. Действительно,

$$N_{\varphi}^{(1)}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \varphi^2[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] + [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4] - \varphi[\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2] - \varphi[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_4] + 2d\eta(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{\xi} = \varphi^2\boldsymbol{\xi} - \eta(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} = -\boldsymbol{\xi}.$$

С другой стороны,

$$\tilde{N}_{\varphi}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 2d\eta(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{\xi} = 0.$$

Для рассматриваемой структуры выполняется равенство

$$d\eta(\boldsymbol{\xi}, X) = 0, \quad X \in \Gamma(TM).$$

Таким образом, $\omega = d\eta$ в рассматриваемом примере является допустимым тензорным полем, к которому применима внутренняя связность ∇ (см. [4]). При этом $\nabla\omega = 0$. Пусть, далее, ψ — эндоморфизм, определяемый равенством $\omega(X,Y) = g(\psi X, Y)$. Координатное представление эндоморфизма ψ выглядит следующим образом: $\psi_a^b = g^{bc}\omega_{ac}$.

Пример 2. В этом примере рассматривается то же самое многообразие M с той лишь разницей, что

$$\boldsymbol{e}_1 = \partial_1 - yz\partial_5, \quad \eta = dz + yz\,dx.$$

Однако, в отличие от предыдущего случая, условие $d\eta(\boldsymbol{\xi}, \cdot) = 0$ не выполняется. Действительно,

$$2d\eta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e}_1) = -\eta([\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e}_1]) = y \neq 0.$$

Назовем почти контактное метрическое многообразие почти квази-сасакиевым многообразием (AQS-многообразием), если выполняются следующие условия:

$$d\Omega = 0, \quad \tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2\varphi^* d\eta \otimes \boldsymbol{\xi} = 0, \quad d\eta(\boldsymbol{\xi}, \cdot) = 0.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Почти контактная метрическая структура является почти квази-сасакиевой структурой тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$(\widetilde{\nabla}_X \varphi)Y = g((\psi \circ \varphi)Y, X)\boldsymbol{\xi} - \eta(Y)(\varphi \circ \psi)(X) - \eta(X)(\varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi)Y.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть M — AQS-многообразие. Покажем, что выполняется приведенное выше равенство. Воспользуемся равенством, которое выполняется для любого почти контактного метрического многообразия:

$$2g((\widetilde{\nabla}_X \varphi)Y, Z) = 3(d\Omega(X, \varphi Y, \varphi Z) - d\Omega(X, Y, Z)) + g(N^{(1)}_\varphi(Y, Z), \varphi X) + \\ + 2N^{(2)}_\varphi(Y, Z)\eta(X) + 2(d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y)).$$

Учитывая, что

$$d\Omega = 0, \quad \tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2\varphi^* d\eta \otimes \boldsymbol{\xi} = 0, \quad d\eta(\boldsymbol{\xi}, \cdot) = 0,$$

получаем:

$$g((\widetilde{\nabla}_X \varphi)Y, Z) = \eta(X)(g((\psi \circ \varphi)Y, Z) + d\eta(Y, \varphi Z)) + g(d\eta(\varphi Y, X)\boldsymbol{\xi}, Z) + d\eta(X, \varphi Z)\eta(Y).$$

Отсюда и следует доказываемое равенство. Для доказательства *достаточности* удобно воспользоваться адаптированными координатами. □

Следующие предложения являются непосредственными следствиями теоремы 1.

Предложение 4. *Почти контактная метрическая структура является квази-сасакиевой структурой тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$(\widetilde{\nabla}_X \varphi)Y = g(AY, X)\boldsymbol{\xi} - \eta(Y)AX, \quad A = \varphi \circ \psi.$$

Предложение 5. *Почти квази-сасакиево многообразие является квази-сасакиевым многообразием тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий*:

(i) $d\eta = \varphi^* d\eta$,
(ii) $\varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi = 0$,
(iii) $g(X, AY) = g(AX, Y)$, $A = \varphi \circ \psi$.

Пусть $(M, \boldsymbol{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ — заданная на многообразии M почти квази-сасакиева структура и пусть ∇^N — каноническая связность. Из предложения 5 вытекает следующий факт.

Предложение 6. *Почти квази-сасакиево многообразие является квази-сасакиевым многообразием тогда и только тогда, когда* $\nabla^N \varphi = 0$.

3. Почти 3-квази-сасакиевы структуры. Рассмотрим на гладком многообразии M размерности $n = 4m + 1$ почти контактную метрическую 3-структуру второго рода $(M, \boldsymbol{\xi}, \eta, \varphi_\alpha, D)$, где $\alpha = 1, 2, 3$ (см. [10]). Назовем 3-структуру $(M, \boldsymbol{\xi}, \eta, \varphi_\alpha, D)$ почти квази-сасакиевой 3-структурой, если для каждого по отдельности α структура $(M, \boldsymbol{\xi}, \eta, \varphi_\alpha, D)$ — почти квази-сасакиева структура.

Будем говорить, что над распределением D задана связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi\colon D \to M$ — естественная проекция, раскладывается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D.

Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $k(x^\alpha)$ на многообразии M сверхкарту $\tilde{k}(x^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D, где x^{n+a} —

координаты допустимого вектора в базисе $\boldsymbol{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Задание связности над распределением эквивалентно заданию такого объекта $G^a_b(x^\alpha, x^{n+a})$, что $HD = \mathrm{Span}(\boldsymbol{\varepsilon}_a)$, где

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_a \partial_{n+b}.$$

В случае, когда

$$G^a_b(x^\alpha, x^{n+a}) = \Gamma^a_{bc}(x^\alpha) x^{n+c},$$

связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. Пусть ∇ — внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD, и $N\colon D \to D$ — поле допустимого тензора типа $(1,1)$. N-продолженной связностью назовем такую связность в векторном расслоении (D, π, M), определяемую разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, что $\widetilde{HD} = HD \oplus \mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$, где

$$\boldsymbol{u}_X = \boldsymbol{\varepsilon} - (NX)^v, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \partial_n, \quad X \in D,$$

$(NX)^v$ — вертикальный лифт. Относительно базиса $(\boldsymbol{\varepsilon}_a,\ \partial_n,\ \partial_{n+a})$ поле $\boldsymbol{u}$ получает координатное представление

$$\boldsymbol{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b} \partial_{n+a}.$$

Всякому векторному полю $X \in \Gamma(TM)$, заданному на многообразии M, обычным образом соответствует его горизонтальный лифт X^h, при этом $X^h \in \Gamma(HD)$ тогда и только тогда, когда X — допустимое векторное поле: $X \in \Gamma(D)$.

Векторные поля

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - \Gamma^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}, \quad \boldsymbol{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$$

определяют на D неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы

$$(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma^n_a dx^a, \quad \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc} x^{n+c} dx^b + N^a_b x^{n+b} dx^n)$$

— соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_a, \boldsymbol{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba} \boldsymbol{u} + x^{n+d}(2\omega_{ba} N^c_d + R^c_{bad}) \partial_{n+c},$$
$$[\boldsymbol{\varepsilon}_a, \boldsymbol{u}] = x^{n+d}(\partial_n \Gamma^c_{ad} - \nabla_a N^c_d) \partial_{n+c},$$
$$[\boldsymbol{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma^c_{ab} \partial_{n+c}, \quad [\boldsymbol{u}, \partial_{n+a}] = N^c_a \partial_{n+c}.$$

Здесь

$$R^d_{abc} = 2\boldsymbol{e}_{[a} \Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a|e|} \Gamma^e_{b]c}$$

— компоненты тензора Схоутена

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{P[X,Y]} Z - P[Q[X,Y], Z].$$

Определим на распределении D почти контактную 3-структуру $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \boldsymbol{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$, полагая

$$\boldsymbol{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b} \partial_{n+b}, \quad J(X^h) = X^v, \quad J(X^v) = -X^h, \quad J(\boldsymbol{u}) = 0,$$
$$J_1(X^h) = -(\varphi X)^h, \quad J_1(X^v) = (\varphi X)^v, \quad J_1(\boldsymbol{u}) = 0, \quad J_2 = J_1 J, \quad X \in \Gamma(D).$$

Проводя необходимые вычисления в адаптированных координатах, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть M — почти квази-сасакиево многообразие с распределением нулевой кривизны. Тогда структура $\big(\tilde{D},\ J,\ J_1,\ J_2,\ \boldsymbol{u},\ \lambda = \eta \circ \pi_*,\ \tilde{g},\ D\big)$, где*

$$\tilde{g}(\boldsymbol{\varepsilon}_a, \boldsymbol{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = g(\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_b), \quad \tilde{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\boldsymbol{u}, \partial_{n+b}) = 0, \quad \tilde{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 1$$

является почти 3-квази-сасакиевой структурой второго рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2017. — № 48. — С. 32–41.
2. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации// Изв. вузов. Мат. — 2013. — № 4. — С. 10–18.
3. *Галаев С. В.* Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — *16*, № 3. — С. 263–272.
4. *Галаев С. В.* Классификация продолженных би-метрических структур на распределениях ненулевой кривизны субримановых многообразий// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2018. — *18*, № 3. — С. 263–273.
5. *Галаев С. В.* Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны// Изв. вузов. Мат. — 2014. — № 8. — С. 42–52.
6. *Agricola I., Ferreira A. C.* Einstein manifolds with skew torsion// Q. J. Math. — 2014. — *65*, № 3. — P. 717–741.
7. *Agricola I., Becker-Bender J., Kim H.* Twistorial eigenvalue estimates for generalized Dirac operators with torsion// Adv. Math. — 2013. — *243*. — P. 296–329.
8. *Agricola I., Friedrich T.* 3-Sasakian manifolds in dimension seven, their spinors and G_2-structures// J. Geom. Phys. — 2010. — *60*, № 2. — P. 326–332.
9. *Agricola I., Ferreira A. C.* Einstein manifolds with skew torsion// Quart. J. Math. — 2014. — *65*. — P. 717–741.
10. *Attarchi H.* 3-Kenmotsu manifolds// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 3. — P. 320–325.
11. *Bukusheva A. V., Galaev S. V.* Almost contact metric structures defined by connection over distribution// Bull. Transilvania Univ. Brasov. Ser. III. Math. Inform. Phys. — 2011. — *4 (53)*, № 2. — P. 13–22.
12. *Cappelletti-Montano B., Nicola A.* 3-Sasakian manifolds, 3-cosymplectic manifolds and Darboux theorem// J. Geom. Phys. — 2007. — *12*. — P. 2509–2520.
13. *Cappelletti-Montano B., Nicola A., Dileo G.* 3-quasi-Sasakian manifolds// Ann. Global Anal. Geom. — 2008. — *33*, № 4. — P. 397–409.
14. *Cappelletti-Montano B., Nicola A., Dileo G.* The geometry of 3-quasi-Sasakian manifolds// Int. J. Math. — 2000. — *20*, № 9. — P. 1081–1105.
15. *Friedrich T., Ivanov S.* Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory// Asian J. Math. — 2002. — *6*. — P. 303–336.
16. *Galaev S. V.* Admissible hyper-complex pseudo-Hermitian structures// Lobachevskii J. Math. — 2018. — *39*, № 1. — P. 71–76.
17. *Galaev S. V.* Intrinsic geometry of almost contact kahlerian manifolds// Acta Math. Acad. Paedagog. Nyiregyhaziensis. — 2015. — *31*, № 1. — P. 35–46.
18. *Hashimoto S.* On differentiable manifold with almost quaternion contact structure// Tensor (New Ser.). — 1964. — *15*. — P. 258–268.
19. *Kashiwada T.* A note on a Riemannian space with Sasakian 3-structure// Natl. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. — 1971. — *22*. — P. 1-2.
20. *Kuo Y. Y.* On almost contact 3-structure// Tôhoku Math. J. — 1970. — *22*. — P. 325–332.
21. *Sato I.* On a structure similar to Sasakian 3-structure// Tôhoku Math. J. — 1973. — *25*, № 4. — P. 405–415.

Галаев Сергей Васильевич
Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: sgalaev@mail.ru