ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 19–29
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-19-29

УДК 514.765

ИНВАРИАНТНЫЕ СОЛИТОНЫ РИЧЧИ НА МЕТРИЧЕСКИХ ГРУППАХ ЛИ С ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

© 2023 г. П. Н. КЛЕПИКОВ, Е. Д. РОДИОНОВ, О. П. ХРОМОВА

Аннотация. В работе исследуются инвариантные солитоны Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с полусимметрической связностью. Доказано, что на некоторых трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и полусимметричной связностью, отличной от связности Леви-Чивиты, существуют нетривиальные инвариантные солитоны Риччи. Получена полная классификация нетривиальных инвариантных солитонов Риччи и соответствующих полусимметрических связностей на трехмерных унимодулярных группах Ли.

Ключевые слова: инвариантный солитон Риччи, группа Ли, левоинвариантная (псевдо)риманова метрика, полусимметрическая связность.

INVARIANT RICCI SOLITONS ON METRIC LIE GROUPS WITH A SEMISYMMETRIC CONNECTION

© 2023 P. N. KLEPIKOV, E. D. RODIONOV, O. P. KHROMOVA

Abstract. In this paper, we examine invariant Ricci solitons on three-dimensional unimodular Lie groups with a semisymmetric connection. We prove that nontrivial invariant Ricci solitons exist on some three-dimensional Lie groups with a left-invariant (pseudo) Riemannian metric and a semisymmetric connection different from the Levi-Civita connection. A complete classification of nontrivial invariant Ricci solitons and the corresponding semisymmetric connections on three-dimensional Lie groups is obtained.

Keywords and phrases: invariant Ricci soliton, Lie group, left-invariant (pseudo) Riemannian metric, semisymmetric connection.

AMS Subject Classification: 53B20, 53C30, 53C50

1. Предварительные сведения.

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии полусимметрическую связность ∇ формулой

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X, \tag{1}$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты. Связность ∇ является метрической и впервые описана Э. Картаном в [8]. Класс метрических связностей, определяемых данным образом, содержит связность Леви-Чивиты и играет важную роль в исследованиях по римановой геометрии (см. [4–6, 8, 11–16]).

Тензор кривизны и тензор Риччи связности ∇ определяются соответственно равенствами

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad r(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \to R(X,Z)Y).$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00111 «Псевдоримановы многообразиях с ограничениями на тензор Риччи»).

Отметим, что, в отличие от случая связности Леви-Чивиты, в данном случае тензор Риччи не обязан быть симметричным. Однако верна следующая теорема

Теорема 1 (см. [6,11]). *Пусть (M,g) — (псевдо)риманово многообразие с полусимметрической связностью. Тензор Риччи является симметричным тогда и только тогда, когда* 1*-форма* π, *определяемая равенством* $\pi(X) = g(X,V)$ *для любого векторного поля* X *на* M, *замкнута, т.е.* $d\pi = 0$.

Определение 1. Метрика g полного риманова многообразия (M,g) называется солитоном Риччи, если она удовлетворяет уравнению

$$r = \Lambda g + L_P g, \tag{2}$$

где r — тензор Риччи метрики g, $L_P g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля P, константа $\Lambda \in \mathbb{R}$. Если $M = G/H$ — однородное пространство, то однородная риманова метрика, удовлетворяющая (2), называется однородным солитоном Риччи, а если $M = G$ — группа Ли, и поле P левоинвариантно — инвариантным солитоном Риччи.

Замечание. Векторное поле V неявно входит в уравнение (2), а в случае $V = 0$ получаем классическое определение солитона Риччи. Заметим также, что производная Ли имеет вид: $L_P g(X,Y) = Pg(X,Y) + g([X,P],Y) + g(X,[Y,P])$. Если солитон Риччи инвариантен, то $L_P g(X,Y) = g([X,P],Y) + g(X,[Y,P])$ для произвольных инвариантных полей X и Y.

Определение 2. Метрика g (псевдо)риманова многообразия (M,g) называется тривиальным солитоном Риччи, если $L_P g = \tau g$ при некоторой константе $\tau \in \mathbb{R}$.

Заметим, что ранее инвариантные солитоны Риччи изучались Л. Цербо, П. Н. Клепиковым и Д. Н. Оскорбиным [1,9].

Теорема 2 (см. [9]). *Для любой конечномерной унимодулярной группы Ли с левоинваринтной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты все инвариантные солитоны Риччи тривиальны.*

Пусть далее $M = G$ — группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Фиксируем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ левоинваринтных векторных полей в $\mathfrak{g}$ и положим

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad g(e_i, e_j) = g_{ij}, \quad c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks},$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли, g_{ij} — компоненты метрического тензора.

Зафиксируем некоторое инвариантное векторное поле V, с помощью которого определим на G полусимметрическую связность ∇.

Согласно (1) компоненты связности ∇ задаются формулами

$$\Gamma_{ij}^k = (\Gamma^g)_{ij}^k + g_{ij} V^k - g_{sj} V^s \delta_i^k,$$

где

$$(\Gamma^g)_{ij}^s = \frac{1}{2} g^{ks} (c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij})$$

— компоненты связности Леви-Чивиты ∇^g, $\|g^{ks}\|$ — матрица обратная к $\|g_{ks}\|$, δ_i^k — символ Кронекера.

Аналогично общему случаю определим тензор кривизны R и тензор Риччи r. В базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ их компоненты соответственно есть

$$R_{ijks} = (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p) g_{ps}, \quad r_{ik} = R_{ijks} g^{js}.$$

Пусть P — левоинвариантное векторное поле. Тогда (2) можно переписать в терминах структурных констант алгебры Ли

$$r_{ij} = \Lambda g_{ij} - P^k (c_{ki}^s g_{sj} + c_{kj}^s g_{si}), \tag{3}$$

где r_{ij} — компоненты тензора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$, g_{ij} — компоненты метрического тензора, P^k — координаты левоинвариантного векторного поля, c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

В дальнейшем под «метрической группой Ли $(G, \mathfrak{g}, V)$» будем понимать группу Ли G с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью, которую порождает левоинвариантное векторное поле $V \in \mathfrak{g}$.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1 (см. [2]). *Если метрическая группа Ли $(G, \mathfrak{g}, V)$ удовлетворяет уравнению солитона Риччи, то в произвольном базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ выполняется соотношение*

$$V^i g_{ij} c^j_{kt} = 0; \tag{4}$$

или в инвариантной форме

$$g(V, [X, Y]) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Здесь c^j_{kt} — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$, определяемые разложением $[e_k, e_t] = c^j_{kt} e_j$.

Лемма 2 (см. [2]). *Инвариантный солитон Риччи тривиален тогда и только тогда, когда выполняется*

$$P^k (c^s_{ki} g_{sj} + c^s_{kj} g_{si}) = \tau g_{ij}. \tag{5}$$

Рассмотрим далее трехмерный случай. Следующая классификация для трехмерных метрических групп Ли была получена в [3, 7, 10].

Теорема 3. *Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда в алгебре Ли группы G существует псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:*

Случай $\mathcal{A}_1$:

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1,$$

с времениподобным e_1;

Случай $\mathcal{A}_2$:

$$[e_1, e_2] = (1 - \alpha_2) e_3 - e_2, \quad [e_1, e_3] = e_3 - (1 + \alpha_2) e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1,$$

с времениподобным e_3;

Случай $\mathcal{A}_3$:

$$[e_1, e_2] = e_1 - \alpha_1 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_1 e_2 - e_1, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + e_2 + e_3,$$

с времениподобным e_3;

Случай $\mathcal{A}_4$:

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_2, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_1 - \alpha_1 e_2, \quad [e_2, e_3] = -\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

с времениподобным e_1 и $\alpha_2 \neq 0$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть (G, g, ∇) — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой g и полусимметрической связностью ∇, отличной от связности Леви-Чивиты. Тогда среди таких групп Ли существуют группы, допускающие нетривиальные инвариантные солитоны Риччи. При этом все нетривиальные инвариантные солитоны Риччи групп Ли (G, g, ∇) исчерпываются следующим списком:*

Случай $\mathcal{A}_1$:

$$\Lambda = (V^1)^2, \quad V = (V^1, 0, 0) \quad P = \left(\frac{V^1}{2}, 0, 0\right), \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} V^1 \neq 0.$$

Случай $\mathcal{A}_2$:

$$\begin{array}{lllll}
\Lambda = -\dfrac{\alpha_1^2}{2}, & V = (0,0,0), & P = \left(-\dfrac{\alpha_1}{2}, P^2, -P^2\right), & \alpha_2 = \alpha_1 \neq 0, & P^2 \in \mathbb{R}; \\
\Lambda = 0, & V = (0,0,0), & P = (-\alpha_2, 0, 0), & \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 \neq 0; & \\
\Lambda = 0, & V = (0, -V^3, V^3), & P = \left(\dfrac{(V^3)^2}{2}, -P^3, -P^3\right), & \alpha_1 = \alpha_2 = 0, & P^3 \in \mathbb{R}, \quad V^3 \neq 0.
\end{array}$$

Случай $\mathcal{A}_3$:

$$\Lambda = -\frac{\alpha_1^2}{2}, \quad V = (0,0,0), \quad P = (\alpha_1, -1, -1), \quad \alpha_1 \in \mathbb{R};$$

$$\Lambda = 0, \quad V = (0, V^2, V^2), \quad P = (0, P^2, P^2), \quad \alpha_1 = 0, \quad P^2 = -1 + \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}(V_2)^2, \quad V^2 \notin \{-2, 0, 1\}.$$

Случай $\mathcal{A}_4$:

$$\Lambda = V^3 f, \quad V = (0,0,V^3), \quad P = (0,0,P^3), \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_3 \in \mathbb{R}, \quad f = 1 - V^3 - \alpha_2,$$
$$V^3 = \pm\sqrt{1 + \alpha_2^2};$$

$$\Lambda = 2V^3 - 2, \quad V = (0,0,V^3), \quad P = (0,0,P^3), \alpha_2 = -1, \quad \alpha_1, \quad \alpha_3 \in \mathbb{R},$$
$$V^3 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3}), \quad P^3 \neq 0;$$

$$\Lambda = 2V^3 - 2, \quad V = (0,0,V^3), \quad P = (P^2, P^2, P^3), \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0,$$
$$V^3 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3}), \quad P^3 \neq 0;$$

$$\Lambda = 2V^3 - 2, \quad V = (0,0,V^3), \quad P = (-P^2, P^2, P^3), \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0,$$
$$V^3 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3}), \quad P^3 \neq 0.$$

2. Инвариантные солитоны Риччи трехмерных унимодулярных метрических групп Ли. В данном разделе докажем теорему 4. Для этого рассмотрим систему уравнений (3), определяющую инвариантных солитонов Риччи; систему уравнений (4), определяющую симметричность тензора Риччи, а также систему уравнений (5) — условие тривиальности инвариантного солитона. Заметим, что в силу тензорного вида левой и правой частей уравнения (3) все вычисления достаточно провести для базиса теоремы 3.

2.1. Случай $\mathcal{A}_1$. Условие (4) имеет вид $V^1\alpha_1 = 0$, $V^2\alpha_2 = 0$, $V^3\alpha_3 = 0$, поэтому имеет место один из следующих случаев:

(i) $V = (0,0,0)$;
(ii) $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$;
(iii) $V = (0, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$;
(iv) $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_3 = 0$;
(v) $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$;
(vi) $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$;
(vii) $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$;
(viii) $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$.

Рассмотрим данные случаи последовательно.

(i) В данном случае вектор V тривиален и полусимметрическая связность является связностью Леви-Чивиты. При этом решениями системы уравнений (3) являются следующие инвариантные солитоны:

$$\Lambda = -\frac{1}{2}\alpha_3^2, \qquad -\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \in \mathbb{R}, \qquad V = (0,0,0), \qquad P = (P^1, P^2, P^3);$$
$$\Lambda = 0, \qquad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_3 \in \mathbb{R}, \qquad V = (0,0,0), \qquad P = (P^1, 0, 0);$$
$$\Lambda = 0, \qquad \alpha_1 = -\alpha_3 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_2 = 0, \qquad V = (0,0,0), \qquad P = (0, P^2, 0);$$
$$\Lambda = 0, \qquad \alpha_1 = -\alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_3 = 0, \qquad V = (0,0,0), \qquad P = (0, 0, P^3).$$

Условие (5) тривиальности солитона в рассматриваемом случае имеет вид:

$$P^1(\alpha_3 - \alpha_2) = 0, \quad P^2(\alpha 1 + \alpha_3) = 0, \quad P^3(\alpha_1 + \alpha_2) = 0, \quad \tau = 0.$$

Очевидно, что все найденные в этом случае инвариантные солитоны удовлетворяют данному условию (т.е. являются тривиальными). При этом $\tau = 0$.

(ii) В этом случае $V = (V^1, 0, 0)$, $V^1 \neq 0$ и $\alpha_1 = 0$. Тогда системы (3) и (5) примут вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}V^1(\alpha_2 - \alpha_3) = P^1(\alpha_2 - \alpha_3), \quad \frac{1}{2}(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) + (V^1)^2 = \Lambda, \quad \frac{1}{2}(\alpha_3^2 - \alpha_2^2) + (V^1)^2 = \Lambda, \\ \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_3)^2 = \Lambda, \quad 0 = P^2\alpha_3, \quad 0 = P^3\alpha_2,\end{gathered} \tag{6}$$

и

$$P^1(\alpha_3 - \alpha_2) = 0, \quad P^2\alpha_3 = 0, \quad P^3\alpha_2 = 0, \quad \tau = 0. \tag{7}$$

Решением системы равенств (6) является

$$\Lambda = (V^1)^2, \quad \alpha_2 = \alpha_3, \quad \alpha_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}V^1, \quad V = (V^1, 0, 0), \quad P = \left(\frac{V^1}{2}, 0, 0\right).$$

Очевидно, что оно не удовлетворяет (7), поскольку в рассматриваемом случае $V^1 \neq 0$ и, значит, найденный солитон не является тривиальным.

(iii) В этом случае $V = (0, V^2, 0)$, $V^2 \neq 0$, $\alpha_2 = 0$ и система уравнений (3) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}V^2(\alpha_1 + \alpha_3) = P^2(\alpha_1 + \alpha_3), \quad \frac{1}{2}(\alpha_1^2 - \alpha_3^2) + (V^2)^2 = -\Lambda, \quad \frac{1}{2}(\alpha_1^2 - \alpha_3^2) - (V^2)^2 = \Lambda, \\ \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3)^2 = \Lambda, \quad 0 = P^1\alpha_3, \quad 0 = P^3\alpha_1,\end{gathered} \tag{8}$$

Разность второго и третьего уравнений приводит к противоречию с условием $(V^2)^2 = -\Lambda \neq 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае инвариантных солитон Риччи не существует.

(iv) Данный случай рассматривается аналогично (iii) и не содержат инвариантных солитонов.

(v) Пусть теперь $V = (V^1, V^2, 0)$, $V^1V^2 \neq 0$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тогда система (3) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}V^1\alpha_3 = P^1\alpha_3, \quad \frac{1}{2}V^2\alpha_3 = P^2\alpha_3, \quad V^1V^2 = 0, \\ \frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^1)^2 + (V^2)^2 = -\Lambda, \quad \frac{1}{2}\alpha_3^2 + (V^1)^2 = \Lambda, \quad \frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^2)^2 = \Lambda,\end{gathered} \tag{9}$$

Данная система равенств не имеет решений, поскольку в рассматриваемом случае $V^1V^2 \neq 0$.

(vi) В этом случае $V = (0, V^2, V^3)$, $V^2V^3 \neq 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ и система уравнений (3)

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}V^3\alpha_1 = P^3\alpha_1, \quad \frac{1}{2}V^2\alpha_1 = P^2\alpha_1, \quad V^2V^3 = 0, \\ \frac{1}{2}\alpha_1^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 = -\Lambda, \quad \frac{1}{2}\alpha_1^2 - (V^3)^2 = \Lambda, \quad \frac{1}{2}\alpha_1^2 - (V^2)^2 = \Lambda,\end{gathered} \tag{10}$$

Данная система равенств не имеет решений, поскольку в рассматриваемом случае $V^2V^3 \neq 0$.

(vii) Рассуждениями, аналогичными (v), заключаем, что в данных случаях инвариантных солитонов Риччи не существует.

(viii) Пусть теперь $V = (V^1, V^2, V^3)$, $V^1V^2V^3 \neq 0$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (3) примет вид

$$\begin{gathered}V^2V^3 = 0, \quad V^1V^3 = 0, \quad V^1V^2 = 0, \\ (V^1)^2 - (V^2)^2 = \Lambda, \quad (V^1)^2 - (V^3)^2 = \Lambda, \quad (V^2)^2 + (V^3)^2 = -\Lambda.\end{gathered} \tag{11}$$

Данная система равенств не имеет решений, поскольку в рассматриваемом случае $V^1V^2V^3 \neq 0$.

2.2. Случай $\mathcal{A}_2$. Условие (4) имеет вид

$$V^1\alpha_1 = 0, \quad V^2 - V^3(\alpha_2 - 1) = 0, \quad V^2(1+\alpha_2) + V^3 = 0.$$

поэтому имеет место один из следующих случаев:

(i) $V = (0,0,0)$;
(ii) $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$;
(iii) $V = \big(0, -V^3, V^3\big)$ и $\alpha_2 = 0$;
(iv) $V = \big(V^1, -V^3, V^3\big)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$.

В случае (i) вектор V тривиален и полусимметрическая связность является связностью Леви-Чивиты. При этом решениями системы уравнений (3) являются следующие инвариантные солитоны:

$$\begin{aligned} &\Lambda = -\frac{1}{2}\alpha_1^2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 \in \mathbb{R}, \qquad V = (0,0,0), \quad P = \Big(-\frac{\alpha_1}{2}, P^2, -P^2\Big);\\ &\Lambda = 0, \qquad\quad \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad V = (0,0,0), \quad P = (-\alpha_2, 0, 0). \end{aligned}$$

Условие (5) тривиальности солитона в рассматриваемом случае имеет вид

$$P^1 = 0, \quad \pm 2P^1 = \tau, \quad P^2(\alpha_1 - \alpha_2) + P^3 = 0, \quad P^3(1 + \alpha_2 - \alpha_1) + P^2 = 0, \quad \tau = 0. \tag{12}$$

Очевидно, что первый из полученных инвариантных солитонов при $\alpha_1 = 0$ и $\tau = 0$ будет удовлетворять (12) и иметь вид

$$\Lambda = 0, \quad \tau = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3, \quad P^2 \in \mathbb{R}, \quad V = (0,0,0), \quad P = (0, P^2, -P^2). \tag{13}$$

Второй инвариантный солитон будет удовлетворять (12) только при $\alpha_2 = 0$. Стоит отметить, что при этом он будет содержаться в (13) для $P^2 = 0$.

В случае (ii) $V = (V^1, 0, 0)$, $V^1 \neq 0$, $\alpha_1 = 0$ и система уравнений (3) примет вид

$$\begin{gathered} \Lambda = 0, \quad P^2 + P^3(1+\alpha_2) = 0, \quad P^2(\alpha_2 - 1) - P^3 = 0,\\ V^1 - 2\alpha_2 = 2P^1, \quad V^1 + (V^1)^2 - 2\alpha_2 = -\Lambda + 2P^1, \quad V^1 - (V^1)^2 - 2\alpha_2 = \Lambda + 2P^1. \end{gathered} \tag{14}$$

Вычитая последнее уравнение системы из предпоследнего, получим

$$2(V^1)^2 = -2\Lambda.$$

Отсюда, учитывая первое уравнение (14) и тот факт, что в рассматриваемом случае $V^1 \neq 0$, заключаем, что система равенств (14) решений не имеет.

В случае (iii) $V = (0, -V^3, V^3)$, $V^3 \neq 0$, $\alpha_2 = 0$, а системы уравнений (3) и (5) соответственно имеют вид

$$\begin{gathered} -\frac{1}{2}\alpha_1^2 = \Lambda, \quad \frac{1}{2}\alpha_1 V^3 = P^2(1+\alpha_1) + P^3, \quad \frac{1}{2}\alpha_1 V^3 = P^3(\alpha_1 - 1) - P^2,\\ (V^3)^2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_1 = -\Lambda + 2P^1, \quad (V^3)^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_1 = \Lambda + 2P^2, \quad (V^2)^3 + \alpha_1 = 2P^2. \end{gathered} \tag{15}$$

и

$$\tau = 0, \quad P^1 = 0, \quad -2P^1 = \tau, \quad 2P^1 = \tau, \quad P^2(1+\alpha_1) + P^3 = 0, \quad P^3(\alpha_1 - 1) - P^2 = 0. \tag{16}$$

Решением системы равенств (15) является

$$\Lambda = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad V = (0, -V^3, V^3), \quad P = \left(\frac{(V^3)^2}{2}, -P^3, P^3\right).$$

Непосредственной подстановкой в (16) проверяем, что данный солитон не будет тривиален, поскольку в рассматриваемом случае $V^3 \neq 0$.

В случае (iv) $V = (V^1, -V^3, V^3)$, $V^1V^3 \neq 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и система уравнений (3) примет вид

$$\begin{gathered} \Lambda = 0, \quad V^1 = -P^2 - P^3, \quad V^1 + (V^3)^2 = 2P^2,\\ V^1 - (V^1)^2 + (V^3)^2 = \Lambda + 2P^1, \quad V^1 + (V^1)^2 + (V^3)^2 = -\Lambda + 2P^1. \end{gathered} \tag{17}$$

Вычитая из последнего уравнения системы предпоследнее, получим

$$2(V^1)^2 = -2\Lambda.$$

Отсюда, учитывая первое уравнение (17) и тот факт, что в рассматриваемом случае $V^1 \neq 0$, заключаем, что система равенств (17) решений не имеет.

2.3. Случай $\mathcal{A}_3$. Условие (4) имеет вид

$$\alpha_1 V^2 + V^1 = 0, \quad \alpha_1 V^3 + V^1 = 0, \quad \alpha_1 V^1 + V^2 - V^3 = 0,$$

поэтому имеет место один из следующих случаев:

(i) $V = (0,0,0)$;
(ii) $V = \big(0, V^2, V^2\big)$ и $\alpha_1 = 0$.

(i) В данном случае вектор V тривиален и полусимметрическая связность является связностью Леви-Чивиты. При этом системы уравнений (3) и (5) примут соответственно вид

$$\begin{gathered}\alpha_1 = P^1, \quad P^2 + P^3 = -2, \quad \alpha_1^2 = -2\Lambda - 4P^2 + 4P^3, \\ 4 + \alpha_1^2 = -2\Lambda - 4P^3, \quad 4 - \alpha_1^2 = 2\Lambda - 4P^2.\end{gathered} \tag{18}$$

и

$$P^1 = 0, \quad 2P^2 = \tau, \quad -2P^3 = \tau, \quad -2P^2 + 2P^3 = \tau, \quad P^3 + P^2 = 0. \tag{19}$$

Решением (18) является инвариантный солитон

$$\Lambda = -\frac{\alpha_1^2}{2}, \quad \alpha_1 \in \mathbb{R}, \quad V = (0,0,0), \quad P = (\alpha_1, -1, -1).$$

Этот солитон не является тривиальным, так как не удовлетворяет последнему равенству из (19).

(ii) $V = (0, V^2, V^2)$, $V^2 \neq 0$ и $\alpha_1 = 0$. При этом системы (3) и (5) примут вид

$$\begin{gathered}P^1 = 0, \quad 2 - V^2 - (V^2)^2 = -P^2 - P^3, \quad 2P^2 - 2P^3 = -\Lambda, \\ 2 - V^2 - (V^1)^2 - (V^2)^2 = \Lambda - 2P^2, \quad 2 - V^2 - (V^1)^2 - (V^2)^2 = -\Lambda + 2P^3.\end{gathered} \tag{20}$$

и

$$P^1 = 0, \quad 2P^2 = \tau, \quad -2P^3 = \tau, \quad -2P^2 + 2P^3 = \tau, \quad P^3 + P^2 = 0. \tag{21}$$

Решением (20) является нвариантный солитон

$$\Lambda = 0, \quad P^1 = 0, \quad P^2 = P^3 = -1 + \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}(V_2)^2.$$

Непосредственной подстановкой в (21) убеждаемся, что найденный инвариантный солитон является тривиальным при $V^2 = -2$ или $V^2 = 1$, т.е. имеет один из следующих видов:

$$\begin{aligned}&\Lambda = 0, \quad \tau = 0, \quad V = (0,-2,-2), \quad P = (0,0,0);\\ &\Lambda = 0, \quad \tau = 0, \quad V = (0,1,1), \qquad\;\; P = (0,0,0).\end{aligned}$$

2.4. Случай $\mathcal{A}_4$. Условие (4) имеет вид

$$V^2\alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 V^2 - \alpha_2 V^1 = 0, \quad \alpha_1 V^1 + V^2 = 0,$$

поэтому имеет место один из следующих случаев:

(i) $V = (0, 0, V^3)$, $\alpha_2 \neq 0$;
(ii) $V = (V^1, -V^1\alpha_1, V^3)$, $\alpha_2 = -(\alpha_1)^2 \neq 0$, $\alpha_3 = 0$.

(i) В данном случае система уравнений (3) примет вид

$$\begin{gathered}P^1\alpha_1 - P^2 = 0, \quad P^1\alpha_2 + P^2\alpha_1 = 0, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 = -P^2\alpha_3, \quad -\alpha_2^2 - \alpha_2 V^3 - 1 + V^3 = \Lambda, \\ -\alpha_2 + 2\alpha_2 V^3 - V^3 + (V^3)^2 + \alpha_2^2 = -\Lambda + 2P^3\alpha_2, \\ \alpha_2 - \alpha_2 V^3 + 2V^3 - (V^3)^2 - 1 = \Lambda - 2P^1\alpha_3 + 2P^3.\end{gathered} \tag{22}$$

Ее решениями являются следующие инвариантные солитоны:

$$\begin{aligned}&\Lambda = V^3(1 - V^3 - \alpha_2), \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_3 \in \mathbb{R},\\ &V = \left(0, 0, \pm\sqrt{1+\alpha_2^2}\right), \quad P = \left(0, 0, -\frac{1}{2}(1 - V^3 - \alpha_2)\right);\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}&\Lambda = 2V^3 - 2, \quad \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_2 = -1,\\ &V = \left(0, 0, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3})\right), \quad P = (0, 0, P^3);\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\Lambda = 2V^3 - 2, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0,\\ &V = \left(0, 0, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3})\right), \quad P = (P^2, P^2, P^3);\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}&\Lambda = 2V^3 - 2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0,\\ &V = \left(0, 0, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3})\right), \quad P = (-P^2, P^2, P^3).\end{aligned} \tag{26}$$

Запишем теперь условие (5):

$$\begin{gathered}\tau = 0, \quad P^2\alpha_3 = 0, \quad 2P^3\alpha_2 = \tau, \quad -P^1\alpha_1 + P^2 = 0,\\ P^1\alpha_2 + P^2\alpha_1 = 0, \quad 2P^1\alpha_3 - 2P^3 = \tau.\end{gathered} \tag{27}$$

Поскольку в рассматриваемом случае $\alpha_2 \neq 0$, то из первого и третьего уравнений системы делаем вывод о тривиальности P^3. Исходя из этого для первого инвариантного солитона получаем, что $V^3 = 1 + \alpha_2$ и из вида V^3 заключаем $(V^3)^2 = (1 + \alpha_2)^2 = 1 + (\alpha_2)^2$. Данное равенство приводит к противоречию с условием $\alpha_2 \neq 0$. Таким образом, данный инвариантный солитон не является тривиальным.

Рассмотрим теперь инвариантные солитоны (24)—(26), для которых (27) и равенство $P^3 = 0$ влечет, что $V^3 = 0$ или $V^3 = 1$, и соответствующие инвариантные солитоны имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\tau = 0, \qquad \Lambda = -2, \quad \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_2 = -1, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = (0, 0, 0);\\
&\tau = 0, \qquad \Lambda = 0, \quad \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_2 = -1, \quad V = (0, 0, 1), \quad P = (0, 0, 0);\\
&\tau = 0, \qquad \Lambda = -2, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = (P^2, P^2, 0);\\
&\tau = 0, \qquad \Lambda = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0, \quad V = (0, 0, 1), \quad P = (P^2, P^2, 0);\\
&\tau = 0, \qquad \Lambda = -2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = (-P^2, P^2, 0);\\
&\tau = 0, \qquad \Lambda = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0, \quad V = (0, 0, 1), \quad P = (-P^2, P^2, 0).
\end{aligned}$$

(ii) В данном случае система уравнений (3) примет вид

$$\begin{gathered}V^1(\alpha_1^2 - V^3) = P^1\alpha_1^2 - P^2\alpha_1, \quad V^1\alpha_1(1 - V^3) = P^1\alpha_1 - P^2,\\ (V^1)^2 - \alpha_1^2(1 - V^3) - (1 - V^3)^2 = \Lambda + 2P^3,\\ \alpha_1^2(1 + V^1)^2 - V^3 + (V^3 - \alpha_1^2)^2 = -\Lambda - 2P^3\alpha_1^2,\\ \alpha_1^2(V^3 - (V^1)^2 - \alpha_1^2) - 1 + V^3 + (V^1)^2 = \Lambda.\end{gathered} \tag{28}$$

Ее решениями являются следующие инвариантные солитоны:

$$\Lambda = 2V^3 - 2, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0, \quad V = \left(0, 0, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3})\right), \quad P = (P^2, P^2, P^3);$$

$$\Lambda = 2V^3 - 2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0, \quad V = \left(0, 0, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3})\right), \quad P = (-P^2, P^2, P^3).$$

Данные инвариантные солитоны содержатся в списке солитонов, полученных в случае (i). Теорема доказана.

3. Инвариантные солитоны Риччи трехмерных неунимодулярных метрических групп Ли. В данном разделе приведем результат, аналогичный теореме 4, для трехмерных неунимодулярных метрических групп Ли. Соответствующая классификация базисов трехмерных метрических групп Ли получена в [3, 7, 10].

Теорема 5. *Пусть G — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда в алгебре Ли группы G существует псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке*:

Случай $\mathcal{A}$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_1 \sin\alpha_3 e_1 - \alpha_2 \cos\alpha_3 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 \cos\alpha_3 e_1 + \alpha_2 \sin\alpha_3 e_2,$$

с времениподобным e_3 и $\sin\alpha_3 \neq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$;

Случай $\mathcal{B}$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_3 e_1 - \alpha_4 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

с ненулевыми $\langle e_2, e_2\rangle = -\langle e_1, e_3\rangle = 1$ и $\alpha_2 \neq \alpha_3$;

Случай $\mathcal{C}_1$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_3 e_1 + \alpha_1 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

с времениподобным e_2 и $\alpha_2 \neq \alpha_3$;

Случай $\mathcal{C}_2$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_2 e_1 - \alpha_3 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

с времениподобным e_2 и $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 + \alpha_3 \neq 0$.

В построенном базисе, рассуждая по аналогии с теоремой 4, получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть (G, g, ∇) — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой g и полусимметрической связностью ∇, отличной от связности Леви-Чивиты. Тогда все нетривиальные инвариантные солитоны Риччи групп Ли (G, g, ∇) исчерпываются следующим списком*:

Случай $\mathcal{A}$:

$$\Lambda = 2(V^3)^2 \neq 0, \quad V = (0, 0, V^3), \quad P = (0, P^2, V^3), \quad \alpha_1 = \delta V^3, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \delta\frac{\pi}{2}, \quad \delta = \pm 1.$$

$$\Lambda = 2(V^3)^2 \neq 0, \quad V = (0, 0, V^3), \quad P = (P^1, 0, V^3), \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \delta V^3, \quad \alpha_3 = \delta\frac{\pi}{2}, \quad \delta = \pm 1.$$

$$\Lambda = -\frac{2(V^3)^3(\sin^2(\alpha_3)V^3 - 2\sin^2(\alpha_3)P^3 + \cos^2(\alpha_3)V^3 - V^3)}{\sin^2(\alpha_3)(V^3 - 2P^3)^2}, \quad V = (0, 0, V^3), \quad P = (0, 0, P^3),$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{(V^3)^2}{\sin(\alpha_3)(V^3 - 2P^3)}, \quad V^3 P^3 \neq 0.$$

$$\Lambda = (V^3)^2 + \delta V^3 \alpha_1 + \delta V^3 \sqrt{(V^3)^2 - \alpha_1^2}, \quad V = (0, 0, V^3),$$

$$P = \left(0, 0, \frac{1}{2}V^3 + \frac{1}{2}\delta\alpha_1 + \frac{1}{2}\delta\sqrt{(V^3)^2 - \alpha_1^2}\right),$$

$$\alpha_2 = \sqrt{(V^3)^2 - \alpha_1^2}, \quad \alpha_3 = \delta\frac{\pi}{2}, \quad \delta = \pm 1, \quad V^3 \neq -\delta\alpha_1.$$

Случай $\mathcal{B}$:

$$V = (V^1, 0, 0), \quad P = \left(\frac{(V^1 + \alpha_2)^2\alpha_2^2 - \Lambda\alpha_1^2}{4\alpha_2^3}, \frac{\Lambda\alpha_1}{2\alpha_2^2}, -\frac{\Lambda}{2\alpha_2}\right),$$

$$\alpha_3 = 2\alpha_2, \quad \alpha_4 = 0, \quad \Lambda \neq 0, \quad V^1 \neq -\alpha_2.$$

$$\Lambda = 0, \quad V = (V^1, 0, 0), \quad P = \left(\frac{(V^1 + \alpha_2)(V^1 + \alpha_3 - \alpha_2)\alpha_2\alpha_3}{2\alpha_2\alpha_3^2}, 0, 0\right),$$

$$\alpha_4 = 0, \quad V^1 \notin \{-\alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3\}.$$

$$\Lambda = 0, \quad V = (V^1, 0, 0), \quad P = \left(\frac{V^1(\alpha_3 + V^1) - 2P^2\alpha_1}{2\alpha_3}, P^2, 0\right),$$
$$\alpha_2 = 0, \quad \alpha_4 = 0, \quad V1 \notin \{0, -\alpha_3\}.$$
$$\Lambda = 0, \quad V = \left(-\frac{V^2\alpha_1}{\alpha_3}, V^2, 0\right), \quad P = \left(\frac{\alpha_1((V^2)^2\alpha_1 - 2P^2\alpha_3^2)}{2\alpha_3^3}, P^2, -\frac{(V^2)^2}{\alpha_3}\right),$$
$$\alpha_2 = 0, \quad \alpha_4 = 0, \quad V^2\alpha_1 \neq 0.$$

Случай $\mathcal{C}_1$:

$$\Lambda = -2\alpha_3^2 \neq 0, \qquad V = (0, 0, -\alpha_3), \qquad P = (0, P^2, -\alpha_3).$$
$$\Lambda = -2\alpha_2^2 \neq 0, \qquad V = (0, 0, -\alpha_2), \qquad P = (P^1, 0, -\alpha_2), \qquad \alpha_1 = 0.$$

Случай $\mathcal{C}_2$:

$$\Lambda = -2\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 + 2\alpha_2\delta\sqrt{2\alpha_2^2 - 2\alpha_3^2}, \quad V = \left(0, 0, \delta\sqrt{2\alpha_2^2 - 2\alpha_3^2}\right),$$
$$P = \left(0, 0, \frac{1}{2}\delta\sqrt{2\alpha_2^2 - 2\alpha_3^2} - \alpha_2\right),$$
$$\alpha_1 = \alpha_3, \quad \delta = \pm 1.$$
$$\Lambda = 4\alpha_2^2, \quad V = \left(\delta_2\sqrt{2\sqrt{2} - 2}\alpha_2, \delta_2\sqrt{2\sqrt{2} - 2}\alpha_2\delta_1(1 + \sqrt{2}), 0\right),$$
$$P = \left(\delta_2(2 + \sqrt{2})\alpha_2\sqrt{2\sqrt{2} - 2} - P^2\delta_1\sqrt{2} - P^2\delta_1, P^2, -2\alpha_2\right), \quad \alpha_1 = \delta_1(1 + \sqrt{2})\alpha_2,$$
$$\alpha_3 = \alpha_2\delta_1(1 - \sqrt{2}), \quad \delta_1 = \pm 1, \delta_2 = \pm 1.$$

Замечание. Используя полученные результаты, нетрудно построить аналогичные примеры нетривиальных инвариантных солитонов Риччи на метрических группах Ли с полусимметрической связностью в случае более высоких размерностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клепиков П. Н., Оскорбин Д. Н.* Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли// Изв. Алт. гос. ун-та. — 2015. — *85*, № 1/2. — С. 115–122.
2. *Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П.* Об инвариантных солитонах Риччи на трехмерных метрических группах Ли с полусимметрической связностью// Изв. вузов. Мат. — 2021. — № 8. — С. 80–85.
3. *Родионов Е. Д., Славский В. В., Чибрикова Л. Н.* Локально конформно однородные псевдоримановы пространства// Мат. тр. — 2006. — *9*, № 1. — С. 130–168.
4. *Agricola I., Kraus M.* Manifolds with vectorial torsion// Differ. Geom. Appl. — 2016. — *46*. — P. 130–147.
5. *Agricola I., Thier C.* The geodesics of metric connections with vectorial torsion// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2004. — *26*. — P. 321–332.
6. *Barua B., Ray A. Kr.* Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold// Indian J. Pure Appl. Math. — 1985. — *16*, № 7. — P. 736–740.
7. *Calvaruso G.* Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds// 2007. — *57*. — P. 1279–1291.
8. *Cartan E.* Sur les variétés àconnexion affine et la théorie de la relativitégénéralisée (deuxième partie)// Ann. Ec. Norm. Sup. — 1925. — *42*. — P. 17–88.
9. *Cerbo L. F.* Generic properties of homogeneous Ricci solitons// Adv. Geom. — 2014. — *14*, № 2. — P. 225–237.
10. *Cordero L. A., Parker P. E.* Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups// Rend. Mat. — 1997. — *17*. — P. 129–155.
11. *De U. C., De B. K.* Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold// Istanbul Univ. Fen. Fak. Mat. Der. — 1995. — *54*. — P. 111–117.

12. *Muniraja G.* Manifolds admitting a semi-symmetric metric connection and a generalization of Schur's theorem// Int. J. Contemp. Math. Sci. — 2008. — *3*, № 25. — P. 1223–1232.
13. *Murathan C., Özgür C.* Riemannian manifolds with a semi-symmetric metric connection satisfying some semisymmetry conditions// Proc. Estonian Acad. Sci. — 2008. — *57*, № 4. — P. 210–216..
14. *Yano K.* On semi-symmetric metric connection// Rev. Roum. Math. Pure Appl. — 1970. — *15*. — P. 1579–1586.
15. *Yilmaz H. B., Zengin F. Ö., Uysal S. A.* On a semi-symmetric metric connection with a special condition on a Riemannian manifold// Eur. J. Pure Appl. Math. — 2011. — *4*, № 2. — P. 152–161.
16. *Zengin F. Ö., Demirbağ S. A., Uysal. S. A., Yilmaz H. B.* Some vector fields on a riemannian manifold with semi-symmetric metric connection// Bull. Iran. Math. Soc. — 2012. — *38*, № 2. — P. 479–490.

Клепиков Павел Николаевич
Алтайский государственный университет
E-mail: klepikov.math@gmail.com

Родионов Евгений Дмитриевич
Алтайский государственный университет
E-mail: edr2002@mail.ru

Хромова Олеся Павловна
Алтайский государственный университет
E-mail: khromova.olesya@gmail.com