ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 30–41
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-30-41

УДК 512.7+514.7

О ПРЕДЕЛАХ ПОТОКА КЭЛЕРА—РИЧЧИ НА ГРУППОВЫХ КОМПАКТИФИКАЦИЯХ ФАНО

© 2023 г. ЯНЬ ЛИ, ЧЖЭНЬ Е ЛИ

Аннотация. Пусть G — связная комплексная редуктивная группа. В статье приведен обзор результатов о полустабильном пределе $\mathbb{Q}$-компактификации Фано и характеристика минимизаторов инвариантов Футаки. При помощи алгебраической единственности построено предельное пространство потока Кэлера—Риччи на групповых компактификациях Фано ранга 2.

Ключевые слова: солитон Кэлера—Риччи, поток Кэлера—Риччи, $\mathbb{Q}$-компактификация Фано, K-стабильность.

ON THE LIMITS OF KÄHLER–RICCI FLOW ON FANO GROUP COMPACTIFICATIONS

© 2023 YAN LI, ZHENYE LI

Abstract. Let G be a connected, complex reductive group. In this paper, we review the results on semistable limit of $\mathbb{Q}$-Fano compactifications and the characterization of minimizers of Futaki invariants. Using the algebraic uniqueness, we construct the limiting space of the Kähler–Ricci flow on Fano group compactifications of rank 2.

Keywords and phrases: Kähler–Ricci soliton, Kähler–Ricci flow, $\mathbb{Q}$-Fano compactification, K-stability.

AMS Subject Classification: 14Jxx, 53E30

1. Введение. Изучение предельного поведения нормированного потока Кэлера—Риччи на многообразии Фано является давней проблемой. Нормированный поток Кэлера–Риччи представляет собой эволюционное уравнение кэлеровых метрик в первом классе Черна $2\pi c_1(M)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(t) = -\operatorname{Ric}(\omega(t)) + \omega(t), \quad \omega(0) = \omega_0 \in 2\pi c_1(M), \tag{1}$$

где ω_0 и $\omega(t)$ — исходная кэлерова метрика и решение уравнения (1) соответственно. Цао показал (см. [11, Sec. 1]), что уравнение (1) всегда имеет глобальное решение $\omega(t)$ для всех $t \geqslant 0$. Для сходимости решений уравнения (1) Тянь-Чжу доказал (см. [29,30]) следующее утверждение: если M допускает солитон Кэлера—Риччи, то $\omega(t)$ сходится к нему. Однако в общем случае $\omega(t)$ может не иметь предела на M. Известная гипотеза Гамильтона—Тяня, недавно доказанная в [6,13,27] (см. [24, Sec. 9]), утверждает, что любая последовательность $\{(M, \omega(t_i))\}_{i\in\mathbb{N}_+}$, $t_i \to +\infty$, содержит подпоследовательность, сходящуюся к пространству длин $(M_\infty, \omega_\infty)$ в топологии Громова—Хаусдорфа, а $(M_\infty, \omega_\infty)$ — гладкий солитон Кэлера—Риччи вне замкнутого подмножества S (вещественной) коразмерности не менее 4. Более того, эта подпоследовательность локально сходится к

Работа выполнена при частичной поддержке гранта NSFC 12101043 и Программы исследовательского фонда Пекинского технологического института для молодых ученых.

регулярной части $(M_\infty, \omega_\infty)$ в топологии Чигера—Громова. Отсюда следует, что в процессе сходимости комплексная структура M может иметь такой скачок, что в новой комплексной структуре будет существовать солитон Кэлера—Риччи (см. [17, 24]).

Поиск этого предельного пространства представляет большой интерес, особенно когда M_∞ не изоморфно M. Тянь и Чжан доказали (см. [27]), что M_∞ должно быть $\mathbb{Q}$-многообразием Фано, сингулярное множество которого совпадает с S. Чэнь, Сунь и Ван (см. [14]) описали общую картину поиска предела M_∞ потока (1) с помощью геометрической теории инвариантов.

В общем случае M может вырождаться в M_∞ с две ступени: сначала происходит «полустабильное вырождение», а затем — «полистабильное вырождение». Более того, солитонное векторное поле на M_∞ в точности индуцируется $\mathbb{C}^*$-действиями «полустабильного вырождения». Недавно Хань и Ли доказали (см. [19]), что «полустабильное вырождение» представляет собой единственную специальную $\mathbb{R}$--тестовую конфигурацию, минимизирующую H-инвариант, введенный в [26]. Кроме того, центральный слой является (модифицированным) K-полустабильным (ср. [19, Theorem 1.2]); в дальнейшем будем называть его *«полустабильным пределом»*. Как только это «полустабильное вырождение» зафиксировано, «полистабильное вырождение» его центрального слоя однозначно определяется с помощью абстрактной теории, построенной в [21] (ср. [19, Sec. 8]).

В этой заметке напомним результаты [22] и покажем, как явно построить это предельное пространство на $\mathbb{Q}$-групповых компактификациях Фано. Предложенный нами подход состоит в том, чтобы классифицировать эквивариантные нормальные $\mathbb{R}$-тестовые конфигурации с помощью комбинаторных данных групповых компактификаций, а затем явно вычислять H-инвариант. Таким образом мы находим полустабильный предел. Наконец, мы проанализируем полустабильные пределы в случаях, когда $\operatorname{rank}(G) = 2$, и приведем явную конструкцию полистабильного вырождения.

2. Предварительные сведения.

2.1. Фильтрации и H-инвариант.

Фильтрации. Пусть M — проективное многообразие, L — очень обильное линейное расслоение на M, так что $|L|$ дает вложение Кодаиры M в проективное пространство. Однородное координатное кольцо (кольцо Кодаиры) кольца M есть

$$R(M, L) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} R_k,$$

где $R_k = H^0(M, L^k)$. Следуя терминологии [2] сформулируем следующее определение.

Определение 1. Фильтрация $\mathcal{F}$ кольца R — это семейство подпространств $\{\mathcal{F}^s R_k\}_{\substack{s\in\mathbb{R},\\ k\in\mathbb{N}}}$ пространства $R(M, L) = \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{N}} R_k$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) семейство $\mathcal{F}$ является убывающим: $\mathcal{F}^{s_1} R_k \subset \mathcal{F}^{s_2} R_k$ для всех $s_1 \geqslant s_2$ и $k \in \mathbb{N}$;
(2) $\mathcal{F}$ является непрерывным слева: $\mathcal{F}^s R_k = \bigcap\limits_{t<s} \mathcal{F}^t R_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$;
(3) $\mathcal{F}$ линейно ограниченным: существуют такие константы $c_\pm \in \mathbb{Z}$, что для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\mathcal{F}^s R_k = 0 \ \forall s > c_+ k \quad \text{и} \quad \mathcal{F}^s R_k = R_k \ \forall s < c_- k;$$

(4) семейство $\mathcal{F}$ мультипликативно:

$$\mathcal{F}^{s_1} R_{k_1} \cdot \mathcal{F}^{s_2} R_{k_2} \subset \mathcal{F}^{s_1+s_2} R_{k_1+k_2}$$

для всех $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ и $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

Пусть $\Gamma(\mathcal{F}, k)$ — множество значений s, при которых фильтрация R_k разрывна. Положим

$$\Gamma_+(\mathcal{F}) := \bigcup_k (\Gamma(\mathcal{F}, k) - \min \Gamma(\mathcal{F}, k)) \tag{2}$$

и обозначим через $\Gamma(\mathcal{F})$ абелеву группу, порожденную $\Gamma_+(\mathcal{F})$. Каждой фильтрации $\mathcal{F}$ поставим в соответствие две градуированные алгебры:

(1) алгебру Риса

$$\mathrm{R}(\mathcal{F}) := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \bigoplus_{s\in\Gamma(\mathcal{F})+\min\Gamma(\mathcal{F},k)} t^{-s}\mathcal{F}^s R_k, \tag{3}$$

(2) ассоциированное градуированное кольцо фильтрации $\mathcal{F}$,

$$\mathrm{Gr}(\mathcal{F}) := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \bigoplus_{s\in\Gamma(\mathcal{F})+\min\Gamma(\mathcal{F},k)} t^{-s}(\mathcal{F}^s R_k/\mathcal{F}^{>s} R_k). \tag{4}$$

Без ограничения общности нормируем $\mathcal{F}$ так, чтобы $\min\Gamma(\mathcal{F},k)=0$ для всех $k\in\mathbb{N}$.

Существует важный класс фильтраций, называемый $\mathbb{R}$-тестовыми конфигурациями, который можно рассматривать как обобщение обычной ($\mathbb{Z}$-) тестовой конфигурации, введенной в [17].

Определение 2. Если алгебра Риса $\mathrm{R}(\mathcal{F})$ конечно порождена, будем говорить, что фильтрация $\mathcal{F}$ является $\mathbb{R}$-тестовой конфигурацией (M,L). В этом случае кольцо $\mathrm{Gr}(\mathcal{F})$ также конечно порождено. Проективная схема

$$\mathcal{X}_0 := \mathrm{Proj}(\mathrm{Gr}(\mathcal{F}))$$

называется центральным слоем фильтрации $\mathcal{F}$.

Если $\mathcal{F}$ является $\mathbb{R}$-тестовой конфигурацией, абелева группа $\Gamma(\mathcal{F})$, порожденная (2), имеет конечный ранг, который обозначим через $r_{\mathcal{F}}$. Тогда тотальное пространство $\mathcal{X}$ фильтрации $\mathcal{F}$ есть

$$\mathcal{X} = \mathrm{Proj}_{\mathbb{C}^{r_{\mathcal{F}}}}(\mathrm{R}(\mathcal{F})).$$

Кроме того, $\Gamma(\mathcal{F})$-градуировка $\mathrm{Gr}(\mathcal{F})$ соответствует (возможно, вещественному) голоморфному векторному полю X на $\mathcal{X}_0$, которое порождает действие тора ранга $r_{\mathcal{F}}$ (тор обозначим через $\mathbb{T}$). Примем соглашение, что $\exp(tX)$-действие имеет (вещественный) вес t^s на $(\mathcal{F}^s R_k/\mathcal{F}^{>s}R_k)$-фрагменте в (4).[1] Векторное поле X называется векторным полем, индуцированным фильтрацией $\mathcal{F}$.

Замечание 3. Если $\mathrm{rank}(\Gamma(\mathcal{F}))=1$, можно вложить $\Gamma(\mathcal{F})$ в $\mathbb{Z}$. Приведенная выше $\mathbb{R}$-тестовая конфигурация — это нормальная ($\mathbb{Z}$-) тестовая конфигурация, введенная в [17, определение 2.1.1].

Существует важный подкласс нормальных $\mathbb{R}$-тестовых конфигураций.

Определение 4. Если $L = K_M^{-1}$, то $\mathbb{R}$-тестовая конфигурация $\mathcal{F}$ называется специальной, если центральный слой $\mathcal{X}_0$ является $\mathbb{Q}$-многообразием Фано и $\mathrm{Gr}(\mathcal{F})$ изоморфно кольцу Кодаиры $R(\mathcal{X}_0, -K_{\mathcal{X}_0})$ кольца $\mathcal{X}_0$.

H-инвариант. Для $\mathbb{Q}$-многообразия Фано M (см. [26]) введем H-инвариант специальных тестовых конфигураций (M, K_M^{-1}). Хань и Ли (см. [19]) недавно обобщили его на произвольную $\mathbb{R}$-тестовую конфигурацию $\mathcal{F}$ для (M, K_M^{-1}).

Напомним определение из [19, Sec. 2.5]. Во-первых, любой $\mathbb{R}$-тестовой конфигурации $\mathcal{F}$ поставим в соответствие два неархимедовых функционала. Пусть $M_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{div}}$ — множество $\mathbb{Q}$-дивизориальных нормирований M. Обозначим через $\phi_{\mathcal{F}}$ и ϕ_0 соответственно неархимедову метрику фильтрации $\mathcal{F}$ и тривиальную тестовую конфигурацию (ср. [10, Sec. 6]). Положим

$$L^{\mathrm{NA}}(\mathcal{F}) := \inf_{v\in M_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{div}}} (A_M(v) + (\phi_{\mathcal{F}}-\phi_0)(v)),$$

где $A_M(\cdot)$ — лог-дискрепантность дивизора M. Также обозначим через $\Delta(\mathcal{F}^{(t)})$ тело Окунькова линейного ряда

$$\mathcal{F}^{(t)} := \{\mathcal{F}^{tk}R_k\}_{k\in\mathbb{N}_+}$$

(ср. [19, Sec. 2.4]). Согласно определению 1(3), видим, что если $t \ll 0$, $\Delta(\mathcal{F}^{(t)})$ есть просто тело Окунькова Δ многообразия (M, K_M^{-1}), введенное в [1], и $\Delta(\mathcal{F}^{(t)}) = \{O\}$ для $t \gg 1$. Зададим функцию $G_{\mathcal{F}} : \Delta \to \mathbb{R}$ формулой

$$G_{\mathcal{F}}(z) := \sup\{t | z \in \Delta(\mathcal{F}^{(t)})\}, \quad z\in\Delta,$$

[1]Это соглашение отличается от [19, определение 2.12] знаком.

и положим

$$S^{\mathrm{NA}}(\mathcal{F}) := -\ln\left(\frac{n!}{V}\int\limits_{\Delta} e^{-G_{\mathcal{F}}(z)}dz\right).$$

H-Инвариант определяется следующим образом.

Определение 5. Пусть $\mathcal{F}$ — $\mathbb{R}$-тестовая конфигурация многообразия (M, K_M^{-1}). Тогда H-инвариант $\mathcal{F}$ равен

$$H(\mathcal{F}) := L^{\mathrm{NA}}(\mathcal{F}) - S^{\mathrm{NA}}(\mathcal{F}). \tag{5}$$

В [19, Example 2.32] было доказано, что (5) совпадает с определением на специальных тестовых конфигурациях (см. [26]).

2.2. Групповые компактификации. Пусть G — комплексная связная редуктивная группа, являющаяся комплексификацией связной компактной группы Ли K. Поляризованное нормальное проективное $G\times G$-многообразие (M, L) называется поляризованной G-компактификацией, если M имеет открытую плотную орбиту, изоморфную $G\times G/\operatorname{diag}(G)(\cong G)$ и L является $G\times G$-линеаризованным обильным ($\mathbb{Q}$-) линейным расслоением. Если антиканоническое линейное расслоение K_M^{-1} обильно и $L = K_M^{-1}$, M называют $\mathbb{Q}$-Фано G-компактификацией. Подробности о групповых компактификациях см. в [3]

Зафиксируем максимальный компактный тор T в K и обозначим через $\mathfrak{t}$ его алгебру Ли. Тогда комплексификация $T^{\mathbb{C}}$ является максимальным комплексным тором в G. Обозначим через Φ систему корней в $(G, T^{\mathbb{C}})$, через $\Phi_+ \subset \Phi$ — выбранное множество положительных корней, а через $\mathfrak{M}$ решетку характеров группы G. Для поляризованной G-компактификации (M, L) замыкание Z многообразия $T^{\mathbb{C}}$ в M вместе с $L|_Z$ является поляризованным торическим многообразием. Действительно, $L|_Z$ является $WT^{\mathbb{C}}$-линеаризованным. Многогранник, ассоциированный с (M, L), определяется как ассоциированный многогранник для $(Z, L|_Z)$ (см. [5, Sec. 2.1]). Это W-инвариантный строго выпуклый рациональный многогранник в $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{t}^*$. Кроме того, мы можем расширить форму Киллинга на $\mathfrak{t}^*$ до W-инвариантного скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Обозначим через $\mathfrak{t}^*_+ \subset \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}$ соответствующую положительную камеру Вейля в Φ_+,

$$\mathfrak{t}^*_+ := \{y \in \mathfrak{t}^* \mid \langle\alpha, y\rangle \geqslant 0\ \forall\alpha \in \Phi_+\}.$$

Это фундаментальная область действия W на $\mathfrak{t}^*$. Положительная часть P_+ P определяется как $P_+ = P \cap \mathfrak{t}^*_+$ и называется *многогранником моментов* (M, L). Существует биективное соответствие между поляризованными G-компактификациями и W-инвариантными строго выпуклыми рациональными многогранниками в $\mathfrak{M}$ (см. [5, Sec. 2] и [3]). Фактически P_+ кодирует структуру представлений $G\times G$ в пространстве голоморфных сечений тензорных степеней L:

$$R_k \cong \bigoplus_{\lambda\in\overline{kP_+}\cap\mathfrak{M}} \operatorname{End}(V_\lambda),$$

где V_λ — неприводимое G-представление старшего веса λ и

$$\operatorname{End}(V_\lambda) \cong V_\lambda \otimes V_\lambda^*.$$

Закон умножения в кольце Кодаиры

$$R(M, L) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} R_k$$

найден в [3, Sec. 7].

2.3. Солитон Кэлера—Риччи. Пусть M — n-мерное многообразие Фано. Напомним, что солитон Кэлера—Риччи на M — это пара (X,ω), где X — голоморфное векторное поле на M, а ω — кэлерова метрика в $2\pi c_1(M)$, удовлетворяющая условию

$$\mathrm{Ric}(\omega)-\omega=\mathrm{L}_X(\omega), \tag{6}$$

где $\mathrm{L}_X(\cdot)$ — производная Ли вдоль X. Если $X=0$, солитон Кэлера—Риччи становится метрикой Кэлера—Эйнштейна. Если M является $\mathbb{Q}$-многообразием Фано, то *слабым солитоном Кэлера—Риччи* называется такая пара (X,ω), что соотношение (6) выполняется на регулярном множестве M и

$$\int\limits_M \omega^n=(K_M^{-1})^{\cdot n}.$$

Теорема единственности (см. [28]) утверждает, что солитон Кэлера—Риччи на компактном комплексном многообразии, если он существует, должен быть единственным по модулю $\mathrm{Aut}(M)$. Кроме того, X лежит в центре алгебры Ли максимальной редуктивной подгруппы $\mathrm{Aut}_r(M)\subset\mathrm{Aut}(M)$.

Существование (слабого) солитона Кэлера—Риччи на $\mathbb{Q}$-многообразии Фано тесно связано с модифицированной K-стабильностью. Понятие модифицированной K-стабильности было введено в [8] и [32, Sec. 1] для гладких многообразий Фано, а затем обобщено на $\mathbb{Q}$-многообразия Фано с klt особенностями (см., например, [7,18,19] и ссылки в этих работах). Грубо говоря, это понятие определяется знаком некоторых функционалов (например, инвариантов Футаки или неархимедовых функционалов Мабучи—Динга и т. п.) тестовых конфигураций.

Однако проверка модифицированной K-стабильности обычно оказывается бесконечным процессом. Для практических целей часто используют более слабое $\mathbb{G}$-эквивариантное понятие модифицированной K-стабильности для редуктивной подгруппы $\mathbb{G}$ группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(M)$.

В эквивариантной постановке рассматриваются только $\mathbb{G}$-эквивариантные тестовые конфигурации, а на многообразиях с большой симметрией эквивариантные тестовые конфигурации часто могут быть исчерпаны конечномерным процессом, например, комбинаторным критерием модифицированной K-стабильности для сферических многообразий (включая групповые компактификации; (см. [4,5,16]).

Эквивалентность между модифицированной K-стабильностью и существованием солитонов Кэлера—Риччи имеет место для любого многообразия Фано; это было показано в [12,25] для случаев Кэлера—Эйнштейна и в [15] для солитонных случаев.

Действительно, эквивалентность модифицированной K-стабильности и эквивариантной модифицированной K-стабильности на гладких многообразиях Фано также доказана в [15]. Однако на $\mathbb{Q}$-многообразиях Фано с особенностями существование обычно требует более сильного условия (эквивариантной) модифицированной равномерной K-стабильности; эквивалентность такой стабильности и существования была недавно изучена в [18,20].

3. Основные результаты. Чтобы найти минимизатор H-инварианта, установим параметризацию всех $G\times G$-эквивариантных нормальных $\mathbb{R}$-тестовых конфигураций. Предположим, что $\mathcal{F}$ является $G\times G$-эквивариантной фильтрацией на R. Тогда по определению 1(1)-(2) и факту эквивариантности имеем

$$\mathcal{F}^sR_k=\bigoplus_{s_\lambda^{(k)}\geqslant s}\mathrm{End}(V_\lambda);$$

здесь с каждым $\mathrm{End}(V_\lambda)$ ассоциировано число $s_\lambda^{(k)}$. Рассмотрим абелеву группу $\Gamma(\mathcal{F})$, определенную (2). Соответствующая алгебра Риса (3) редуцируется к

$$\mathrm{R}(\mathcal{F})=\bigoplus_{k\in\mathbb{N}}\bigoplus_{s\in\Gamma(\mathcal{F})}\bigoplus_{\lambda\in\overline{kP_+}\cap\mathfrak{M},s_\lambda^{(k)}\geqslant s}t^{-s}\,\mathrm{End}(V_\lambda). \tag{7}$$

В таком случае $\mathcal{F}$ является $\mathbb{R}$-тестовой конфигурацией тогда и только тогда, когда алгебра Риса (7) конечно порождена. Кроме того, она нормальна, если $\mathrm{R}(\mathcal{F})$ — нормальное кольцо.

Следующий классификационный результат был доказан в [22, Sec. 4].

Теорема 6. *Пусть (M, L) — поляризованная G-компактификация с многогранником моментов P_+. Тогда для любой $\hat{G}$-эквивариантной нормальной $\mathbb{R}$-тестовой конфигурации $\mathcal{F}$ компактификации (M, L) существует W-инвариантная вогнутая кусочно линейная функция f на $\overline{P}$, области линейности которой состоят из таких рациональных многогранников в $\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}$, что $\min f = 0$ и*

$$s_\lambda^{(k)} = \max\{s \in \Gamma(\mathcal{F}) | s \leqslant kf(\frac{\lambda}{k})\} \quad \forall \lambda \in \overline{kP_+} \cap \mathfrak{M} \text{ and } k \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Кроме того, $s_\lambda^{(k)} = kf(\lambda/k)$, если $1/k\lambda$ является вершиной областей линейности f.

Обратно, пусть даны произвольные f и $r_0 \in N_+$, для которых области линейности функции $r_0 f(\cdot/r_0)$ в $r_0 P_+$ состоят из целочисленных многогранников в $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\Gamma_{r_0}(\mathrm{Vert}(f))$ абелеву группу, порожденную

$$\left\{ r_0 f\left(\frac{1}{r_0 \lambda}\right) \;\middle|\; \lambda \text{ является вершиной области линейности } f \right\}.$$

Тогда для любой конечно порожденной абелевой группы Γ, содержащей $\Gamma_{r_0}(\mathrm{Vert}(f))$, существует $\hat{G}$-эквивариантная нормальная $\mathbb{R}$-тестовая конфигурация $\mathcal{F}$ из (M, L) с $\Gamma(\mathcal{F}) \subset \Gamma$ и точками разрыва $s_\lambda^{(k)}$, удовлетворяющая (9) для всех $k \in \mathbb{N}_+$.

Замечание 7. Если f рационально, можно взять k в качестве наименьшего натурального числа, так что множество

$$\{k(\lambda, s) \mid 0 \leqslant s \leqslant f(\lambda),\ \lambda \in \overline{P_+}\}$$

является целочисленным многогранником и $\Gamma = \mathbb{Z}$. Тогда теорема 8 сводится к теореме классификации $\hat{G}$-эквивариантных нормальных $\mathbb{Z}$-тестовых конфигураций (на основе [4, Sec. 4.2]; см. также [5, Sec. 2.4]).

Используя теорему 6, изучим центральный слой через его кольцо Кодаиры (4).

Теорема 8 (см. [22, Theorem 4.4])**.** *Пусть (M, L) — поляризованная G-компактификация с многогранником моментов P_+. Тогда для любой $G \times G$-эквивариантной нормальной $\mathbb{R}$-тестовой конфигурации $\mathcal{F}$ компактификации (M, L) с приведенным центральным слоем существует такая W-инвариантная вогнутая кусочно линейная функция $f \geqslant \min f = 0$ на $\overline{P}$, области линейности которой состоят из рациональных многогранников в $\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}$, что*

$$s_\lambda^{(k)} = kf(\frac{\lambda}{k}) \quad \forall \lambda \in \overline{kP_+} \cap \mathfrak{M} \text{ и } k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

и наоборот.

Замечание 9. В дальнейшем для простоты будем называть функцию f в формуле (9) функцией, связанной с $\mathcal{F}$.

Замечание 10. Если отбросить предположение о том, что алгебра Риса нормальна, теорема 6 может оказаться неверной. Например, пусть $G = SL_2(\mathbb{C})$. Тогда можно отождествить $\mathfrak{a}^*$ с $\mathbb{R}$, а единственный положительный корень α с точкой $2 \in \mathbb{R}$. Единственная компактификация Фано группы G имеет многогранник $P_+ = [0, 3]$. Положим $\Gamma = \mathbb{Z}$,

$$s_0^{(1)} = 1, \quad s_1^{(1)} = 0, \quad s_2^{(1)} = 1, \quad s_3^{(1)} = 0$$

а остальные $s_m^{(k)}$, $k, m \in \mathbb{N}$, заданы формулой

$$s_\lambda^{(k)} = \max\left\{ \sum_{i=1}^{k} s_{\mu_i}^{(1)} \;\middle|\; \mu_i \in \overline{P_+} \cap \mathfrak{M},\ \mathrm{End}(V_\lambda) \subset \mathrm{End}(V_{\mu_1}) \cdots \mathrm{End}(V_{\mu_k}) \right\} \geqslant 0.$$

Можно непосредственно проверить, что это определяет G-эквивариантную, не являющуюся нормальной, $\mathbb{R}$-тестовую конфигурацию $\mathcal{F}$, для которой соотношение (9) нарушается. Нормализация $\mathcal{F}$ — это просто тривиальная тестовая конфигурация.

На самом деле, чтобы найти минимизатор H-инварианта, достаточно рассмотреть только $G\times G$-эквивариантные специальные $\mathbb{R}$-тестовые конфигурации. Это следует из теорем единственности [19] для гладких многообразий Фано и [9] для общих $\mathbb{Q}$-многообразий Фано. Перечислим имеющиеся аргументы: согласно [9, Теорема 1.2] H-инвариант допускает единственный минимизатор $\mathcal{F}_{\min}$ среди фильтраций, который действительно является специальной $\mathbb{R}$-тестовой конфигурацией. Поскольку $\hat{G}$ действует на множестве фильтраций, $\mathcal{F}_{\min}$ должен быть $G\times G$-эквивариантным.

Нам понадобится следующий результат классификации эквивариантных специальных $\mathbb{R}$-тестовых конфигураций. Напомним, что центральный слой специальной $\mathbb{R}$-тестовой конфигурации редуцирован и неприводим. Из теоремы 8 вытекает следующий результат.

Следствие 11 (см. [22, Corollary 4.6]). *Пусть (M, L) — поляризованная G-компактификация. Тогда для любого $\Lambda \in \overline{\mathfrak{t}_+}$ существует такая $\hat{G}$-эквивариантная специальная $\mathbb{R}$-тестовая конфигурация $\mathcal{F}_\Lambda$ (M, L), что центральный слой $\mathcal{X}_0$ является компактификацией $\hat{G}$-сферического однородного пространства и допускает действие тора $\overline{\exp(t\Lambda)} \subset \hat{G}$. Обратно, для любой $\hat{G}$-эквивариантной специальной $\mathbb{R}$-тестовой конфигурации $\mathcal{F}$ (M, L) существует такой $\Lambda \in \overline{\mathfrak{a}_+}$, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\Lambda$.*

Классификационная теорема (теорема 6 позволяет доказать следующее утверждение (см. [22, Sec. 5]).

Теорема 12 (см. [22, Theorem 5.3]). *Пусть (M, L) — поляризованная G-компактификация с многогранником моментов P_+, а $\mathcal{F}$ — $G \times G$-эквивариантная нормальная $\mathbb{R}$-тестовая конфигурация (M, L), связанная с функцией f. Тогда*

$$H(\mathcal{F}_f) \geqslant \ln\left(\frac{1}{V}\int\limits_{P_+} e^{-f(y)+f(2\rho)}\pi(y)dy\right)$$

с точностью до аддитивной равномерной константы, и равенство выполняется, если $\mathcal{F}$ является специальной.

Набросок доказательства. Вычислим члены $S^{\mathrm{NA}}(\cdot)$ и L^{NA}, введенные выше, используя (9). Заметим, что тело Окунькова сферического многообразия является расслоением над P_+, так что на каждом $\lambda \in \overline{P_+} \cap \frac{1}{k}\mathfrak{M}$ слой является многогранником Гельфанда—Цетлина неприводимого представления $\mathrm{End}(V_{k\lambda})$ (в силу линейности многогранника Гельфанда—Цетлина конструкция корректна для различных вариантов выбора k; см. [1]). Следовательно,

$$\Delta(\mathcal{F}^{(t)}) \subset \left\{z = (\lambda, z') \in \Delta \mid f(\lambda) \geqslant t\right\},$$

и равенство выполняется, если центральный слой редуцирован (т.е. выполняется (9)). Следовательно,

$$G_{\mathcal{F}}(z) \leqslant \sup\left\{t \mid z = (\lambda, z') \in \Delta,\ f(\lambda) \geqslant t\right\} = f(\lambda)$$

при $z = (\lambda, z') \in \Delta_\lambda \subset \Delta$, и равенство выполняется, если $\mathcal{F}$ имеет редуцированный центральный слой. Таким образом,

$$S^{\mathrm{NA}}(\mathcal{F}) \leqslant -\ln\left(\frac{1}{V}\int\limits_{P_+} e^{-f(\lambda)}\pi(\lambda)d\lambda\right) + \ln\prod_{\alpha\in\Phi_+}\langle\alpha,\rho\rangle^2, \tag{10}$$

и равенство выполняется, если $\mathcal{F}$ имеет редуцированный центральный слой.

Для вычисления $L^{\mathrm{NA}}(\cdot)$ используем конструкцию аппроксимирующей последовательности из [19, Sec. 2.2] (см. также [22, Sec. 4.2]). Иными словами, можно построить последовательность $\mathbb{Z}$-конфигураций $\{\mathcal{F}_p\}_{p\in\mathbb{N}_+}$, ассоциированную с функциями $\{f_p\}_{p\ in\mathbb{N}_+}$,[1] где f_p сходится к f равномерно. По lct-формуле Бермана (см. [33, Sec. 4.3]) получаем $L^{\mathrm{NA}}(\mathcal{F}_p) = f_p(2\rho)$. Согласно [19,

[1]Функция, ассоциированная с $G\times G$-эквивариантной $\mathbb{Z}$-тестовой конфигурацией, определяется в смысле замечания 7. В этом случае $s_\lambda^{(k)} = [kf(\lambda/k)]$ для $\lambda \in \overline{kP_+} \cap \mathbb{M}, k \in \mathbb{N}$.

Remarks 2.29, 3.32], имеем
$$\lim_{p\to+\infty} L^{\mathrm{NA}}(\mathcal{F}_p) \leqslant L^{\mathrm{NA}}(\mathcal{F}),$$
причем равенство выполняется, если $\mathcal{F}$ определяется нормированием на G. Обратим внимание, что специальная $\mathbb{R}$-тестовая конфигурация определяется нормированием. Комбинируя с (10), получаем требуемое утверждение. □

Возьмем опорную функцию ℓ вогнутой функции f в точке 2ρ. Поскольку f является W-инвариантной и вогнутой, имеем $\nabla\ell \in (-\mathfrak{t}_+)$. Рассмотрим специальную $\mathbb{R}$-тестовую конфигурацию $\mathcal{F}_{-\ell}$ и ее H-инвариант
$$H(\mathcal{F}_{-\ell}) = \ln\left(\frac{1}{V}\int\limits_{P_+} e^{-\ell(y)+\ell(2\rho)}\pi dy\right).$$
С другой стороны, поскольку
$$\ell(y)-\ell(2\rho) \geqslant f(y)-f(2\rho),$$
очевидно, что
$$H(\mathcal{F}_{\ell}) = \ln\left(\frac{1}{V}\int\limits_{P_+} e^{-\ell(y)+\ell(2\rho)}\pi(y) dy\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{V}\int\limits_{P_+} e^{-f(y)+f(2\rho)}\pi(y) dy\right) \leqslant H(\mathcal{F}).$$
Следовательно, для любой $G\times G$-эквивариантной нормальной $\mathbb{R}$-тестовой конфигурации можно построить специальную $G\times G$-эквивариантную $\mathbb{R}$-тестовую конфигурацию с меньшим H-инвариантом. Снова видим, что минимизатор H-инварианта среди эквивариантных тестовых конфигураций является специальным.

Легко видеть, что функционал
$$\mathcal{H}(\Lambda) := V\cdot e^{H(\mathcal{F}_\Lambda)} = \int\limits_{P_+} e^{\Lambda(y-2\rho)}\pi(y)dy$$
является правильной выпуклой функцией от Λ. Следовательно, минимизатор $H(\cdot)$ должен быть достигнут на некотором $\Lambda_0\in\mathfrak{t}_+$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Следствие 13 (см. [22, Proposition 5.7])**.** *Существует единственный элемент $\Lambda_0\in\mathfrak{t}_+$ такой, что соответствующая $\mathbb{R}$-тестовая конфигурация $\mathcal{F}_{\Lambda_0}$ является специальной $\mathbb{R}$-тестовой конфигурацией, и*
$$H(\mathcal{F}_{\Lambda_0}) \leqslant H(\mathcal{F})$$
для всех $G\times G$-эквивариантных нормальных $\mathbb{R}$-тестовых конфигураций $\mathcal{F}$. Более того, $\mathcal{F}_{\Lambda_0}$ является «полустабильным вырождением» для M.

Заметим, что центральный слой $\mathcal{X}_0$ в $\mathcal{F}_{\Lambda_0}$ является нормальным. Следовательно, он является $G\times G$-сферическим многообразием. Сферические данные $\mathcal{X}_0$ можно определить в соответствии с [22, Sec. 3], используя аппроксимирующий прогресс (см. [?, Sec. 3] и [19, Sec. 2.2]), который можно реализовать с помощью $\mathbb{Z}$-тестовой конфигурации. Для этого возмутим элемент Λ_0 до рационального Λ_0', так что $\mathcal{F}_{\Lambda_0'}$ будет $\mathbb{Z}$-конфигурацией, центральный слой которой также есть $_0$. Обратим внимание, что согласно [19, Sec. 2.2] (см. также [19, pp. 9-10]) Λ_0' следует выбирать в алгебре Ли $\overline{\exp(t\Lambda_0)}$.

С другой стороны, доминирующая камера Вейля $\mathfrak{t}_+$ представляет собой конус, граница которого состоит из стенок Вейля
$$W_\alpha := \{x\in\mathfrak{t} | \alpha(x)=0\},$$
где α — простой корень из G. Предположим, что Λ_0 удовлетворяет условию
$$\alpha_i(\Lambda_0) = 0 \tag{11}$$
для простых корней $\alpha_1,\dots,\alpha_{i_0}$
$$\alpha_i(\Lambda_0) > 0 \tag{12}$$

для остальных простых корней $\alpha_{i_0+1}, \ldots, \alpha_r$. Поскольку Λ_0' лежат в алгебре Ли однопараметрической подгруппы $\overline{\exp(t\Lambda_0)}$, она также удовлетворяет условиям (11)–(12). Сферическая подгруппа в $\mathcal{X}_0$ может быть определена с помощью [22, Proposition 3.3]. Согласно стандартному расчету [31, Sec. 24] конус нормирования $\mathcal{X}_0$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{V}(\mathcal{X}_0) := \{x \mid \alpha_i(x) \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, i_0\}.$$

С другой стороны, из (4) сразу получаем, что многогранник моментов $(\mathcal{X}_0, K_{\mathcal{X}_0}^{-1})$ также равен P_+.

Условие того, что Λ_0 — минимум, дает

$$\mathbf{b}(\Lambda_0) := \int_{P_+} y_i e^{\Lambda_0(y)} \pi dy \Big/ \int_{P_+} e^{\Lambda_0(y)} \pi dy \in 2\rho + \overline{\mathcal{V}(\mathcal{X}_0)^\vee}. \tag{13}$$

Согласно [16, Theorem 5.3], (13) эквивалентно свойству $(\mathcal{X}_0, \Lambda_0)$ быть $\hat{G}$-эквивариантно модифицированной K-полустабильной.

Предложение 14 (см. [22, Proposition 5.6])**.** *Предположим, что $\mathcal{F}_{\Lambda_0}$ минимизирует $H(\mathcal{F}_\Lambda)$, так что Λ_0 удовлетворяет условию* (11)–(12)*. Если* (13) *является строгим, т.е.*

$$\mathbf{b}(\Lambda_0) \in 2\rho + \operatorname{Int}(\mathcal{V}(\mathcal{X}_0)^\vee), \tag{14}$$

то $\mathcal{X}_0$ является модифицированным K-полистабильным, а поток Кэлера—Риччи (**??**) *на M сходится к $(\mathcal{X}_0, \Lambda_0)$.*

Доказательство состоит в проверке модифицированной $G \times G$-равномерной K-стабильности $(\mathcal{X}_0, \Lambda_0)$ при условии (14) (подробности см. в доказательстве [22, Proposition 5.6]).

Замечание 15. Имеются два экстремальных случая: если Λ_0 лежит в линейной части $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ камеры Вейля $\mathfrak{t}_+$, то соответствующая $\mathcal{F}_{\Lambda_0}$ действительно есть тестовая конфигурация произведения. В этом случае $\mathcal{X}_0$ совпадает с M и является модифицированным K-полустабильным относительно векторного поля Λ_0. Если Λ_0 лежит внутри камеры Вейля $\mathfrak{t}_+$, то центральный слой $\mathcal{X}_0$ $\mathcal{F}_{\Lambda_0}$ является орисферическим многообразием (см. [2, Sec. 4] и [16, Sec. 3.4.2]). Заметим, что орисферическое многообразие всегда допускает солитон Кэлера—Риччи. Следовательно, $\mathcal{X}_0$ является предельным пространством (1). Отметим также, что любое торическое многообразие Фано принадлежит обоим случаев, поэтому он всегда допускает солитон Кэлера—Риччи.

4. Пример: случаи ранга 2. В этом разделе применим следствие 13 в случаях, когда $\operatorname{rank}(G) = 2$, для нахождения полустабильного предела $\mathbb{Q}$-Фано G-компактификации. Затем, используя недавний результат из [23], вычислим полистабильное вырождение этого предела и получим предельное пространство (1). Нас особенно интересует случай, когда формула (14) не имеет места.

Предположим, что G — комплексная редуктивная группа ранга 2. Пусть M — $\mathbb{Q}$-Фано G-компактификация с многогранником моментов P_+. Согласно следствию 13, $H(\mathcal{F}_{\Lambda_0})$ является единственным минимумом Λ_0 в замкнутой положительной камере Вейля $\mathfrak{t}_+$. Соответствующий центральный слой $\mathcal{X}_0$ является $G \times G$-сферическим многообразием Фано с многогранником моментов P_+. Далее оно модифицируется как K-полустабильное относительно векторного поля Λ_0. Это эквивалентно тому, что функционал

$$\mathcal{L}_{\Lambda_0}(u) := \int_{P_+} \langle \nabla u, y - 2\rho \rangle e^{\Lambda_0(y)} \pi \, dy \tag{15}$$

неотрицателен для всех u в

$$\mathcal{C}_{1,W} := \Big\{ u : P^* \to \mathbb{R} \mid u \text{ является } W\text{-инвариантной, выпуклой и непрерывной в } P^* \text{ и } \int_{\partial P_+} u\pi \, d\sigma_0 < +\infty \Big\}. \tag{16}$$

Здесь через P^* мы обозначаем объединение $\mathrm{Int}(P)$ и относительной внутренности его гиперграней. Весовая функция имеет вид

$$\pi(y) = \prod_{\alpha\in\Phi_+} \langle\alpha, y\rangle^2;$$

$d\sigma_0$ — стандартная мера Лебега на ∂P. Кроме того, $\mathcal{L}_{\Lambda_0}(\cdot)$ обращается в нуль для любых W-инвариантных аффинных функций на P_+ (см. [16, 23]).

Возможны два случая:

Случай A: $\mathcal{X}_0$ является модифицированным K-стабильным относительно векторного поля Λ_0. В этом случае полистабильное вырождение $\mathcal{X}_0$ будет тривиальным. На самом деле $\mathcal{X}_0$ допускает солитонную метрику Кэлера—Риччи с солитонным векторным полем Λ_0 (ср. [16, Theorem A] и примеры в [22, Sec. 6]).

Случай B: $\mathcal{X}_0$ является строго модифицированным K-полустабильным относительно векторного поля Λ_0. Как и в [23, лемма 5.1], можно доказать следующее утверждение.

Лемма 16. *M строго K-полустабильна тогда и только тогда, когда существует такой фундаментальный вес $\varpi \in \mathfrak{t}_+$ относительно Φ_+, что $\mathcal{L}_{\Lambda_0}(\ell_\varpi) = 0$ для выпуклой функции*

$$\ell_\varpi(y) := \max_{w\in W}\{\langle w(\varpi), y\rangle\}, \quad y \in P. \tag{17}$$

Построим полистабильное вырождение в случае B следующим образом.

Предложение 17. *Пусть G — комплексная редуктивная группа ранга 2. Пусть M — $\mathbb{Q}$-Фано G-компактификация с многогранником моментовЁP_+. Предположим, что полустабильное вырождение $\mathcal{F}_{\Lambda_0}$ имеет строго модифицированный K-полустабильный центральный слой $\mathcal{X}_0$ относительно $\Lambda_0 \in \mathfrak{t}_+$. Тогда $\mathcal{L}_{\Lambda_0}(u) = 0$ в том и только том случае, когда u лежит в*

$$\hat{\mathcal{C}}^0 := \{u \mid u \text{ аффинна в } P_+\}.$$

Существует единственное полистабильное вырождение $\mathcal{F}_*$, которое вырождает $\mathcal{X}_0$ в $\mathbb{Q}$-орисферическое многообразие Фано $\mathcal{X}_*$. В частности, $\mathcal{X}_*$ является модифицированным K-стабильным.

Доказательство. Согласно последней части замечания 15б G не может быть тором. Следовательно, его корневая система содержит по крайней мере одну пару корней. Кроме того, Λ_0 не может лежать внутри $\mathfrak{t}_+$. Возможны два случая:

Случай 1: $\Phi = \{\pm\alpha\}$ содержит в точности одну пару корней. В этом случае, $\Lambda_0 \perp \alpha$ лежит в центре $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$;

Случай 2: $\Phi_+ = \{\alpha, \alpha'\}$ состоит из двух простых корней. В этом случае

$$\mathfrak{t}_+ = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}_{\geqslant 0}}\{\alpha^\vee, \alpha'^\vee\}.$$

Поскольку $\Lambda_0 \in \partial\mathfrak{t}_+$, можно считать без ограничения общности, что $\Lambda_0 = c\alpha'^\vee$ для некоторого $c > 0$. Снова имеем $\Lambda_0 \perp \alpha$.

Согласно [22, Sec. 3], в обоих случаях сферическая система корней $\mathcal{X}_0$ равна $\{\pm\alpha\}$. Обозначим через

$$s_\alpha(y) = y - 2\frac{\langle\alpha, y\rangle}{|\alpha|^2}\alpha$$

отражение относительно α. Тогда единственным нетривиальным элементом в малой группе Вейля $\mathcal{X}_0$ является s_α. Положим $\hat{P} := P_+ \cup s_\alpha(P_+)$. Нетрудно проверить, что $\hat{P}_+$ является s_α-инвариантным выпуклым многогранником. Пусть $\hat{P}^*$ — объединение $\mathrm{Int}(\hat{P})$ с относительной внутренностью всех его гиперграней. Аналогично (16) введем

$$\hat{\mathcal{C}}_{1,s_\alpha} := \left\{u : \hat{P}^* \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} u \text{ является } s_\alpha\text{-инвариантной,} \\ \qquad\text{выпуклой и непрерывной в } \hat{P}^* \text{ и } \displaystyle\int_{\partial P_+} u\pi\, d\sigma_0 < +\infty \end{array}\right\}.$$

Напомним, что $\mathcal{X}_0$ является модифицированным K-полустабильным. Согласно [23, Lemma 5.1], функционал $\mathcal{L}_{\Lambda_0}(\cdot)$, определенный (15), неотрицателен на $\hat{\mathcal{C}}_{1,s_\alpha}$ и обращается в нуль на любой s_α-инвариантной аффинной функции на P_+.

С другой стороны, поскольку $\mathcal{X}_0$ является строго модифицированным K-полустабильным, существует некоторая s_α-инвариантная выпуклая функция u_0 на $\hat{P}$, не являющаяся аффинной. Согласно [23, Proposition 3.5], u_0 удовлетворяет однородному уравнению Монжа—Ампера на $\hat{P}$. Используя аргументы из [23, Proposition 5.4], заключаем, что

$$u_0 = \ell_{\alpha^\vee}$$

определяется с помощью (17), с точностью до аддитивной s_α-инвариантной аффинной функции. Отсюда заключаем, что $\mathcal{L}_{\Lambda_0}(u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u \in \hat{\mathcal{C}}^0$.

Отметим, что для любой $u \in \hat{\mathcal{C}}^0$ $\mathbb{R}$-тестовая конфигурация, связанная с u, совпадает с $\mathbb{R}$-тестовой конфигурацией $\mathcal{F}_{\alpha^\vee}$, связанной с $\ell_{\alpha^\vee}$. Можно непосредственно проверить, что эта $\mathbb{R}$-тестовая конфигурация $\mathcal{F}_{\alpha^\vee}$ имеет орисферический центральный слой $\mathcal{X}_{\alpha^\vee}$ (см. [2, Sec. 4] или [22, Proposition 3.2]). Тогда модифицированная K-стабильность $\mathcal{X}_{\alpha^\vee}$ относительно Λ_0 следует из того, что $\mathcal{L}_{\Lambda_0}(\cdot)$ обращается в нуль на $\hat{\mathcal{C}}^0$.

С другой стороны, согласно следствию 11, эквивариантная $\mathbb{R}$-тестовая конфигурация с неприводимым центральным слоем должна быть ассоциирована с некоторой функцией $u \in \hat{\mathcal{C}}^0$. Отсюда ясно, что с точностью до подкручивания полистабильное отрицание равно $\mathcal{F}_* = \mathcal{F}_{\alpha^\vee}$. □

Замечание-вопрос. Окончательный предел $\mathcal{X}_*$ на самом деле является предельным пространством (1) на M. Он допускает солитон Кэлера—Риччи относительно векторного поля Λ_0. Единственность Λ_0 и $\mathcal{F}_*$ влечет алгебраическую единственность предела, доказанную в [19], однако пока не известно, существует ли какой-либо пример, принадлежащий случаю B и имеющий нетривиальное полистабильное вырождение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Окуньков А. Ю.* Замечание о полиноме Гильберта сферического многообразия// Функц. анал. прилож. — 1997. — *31*, № 2. — С. 82–85.
2. *Попов В. Л.* Стягивание действий редуктивных алгебраических групп// Мат. сб. — 1986. — *130 (172)*, № 3 (7). — С. 310–334.
3. *Тимашев Д. А.* Эквивариантные компактификации редуктивных групп// Мат. сб. — 2003. — *194*, № 4. — С. 119–146.
4. *Alexeev V. A., Brion M.* Stable reductive varieties, II: Projective case// Adv. Math. — 2004. — *184*. — P. 382–408.
5. *Alexeev V. A., Katzarkov L. V.* On K-stability of reductive varieties// Geom. Funct. Anal. — 2005. — *15*. — P. 297–310.
6. *Bamler R.* Convergence of Ricci flows with bounded scalar curvature// Ann. Math. — 2018. — *188*. — P. 753–831.
7. *Berman R., Boucksom S., Eyssidieux P., Guedj V., and Zeriahi A.* Kähler–Einstein metrics and the Kähler–Ricci flow on log Fano varieties// J. Reine Angew. Math. — 2019. — *751*. — P. 27–89.
8. *Berman R., Witt-Nystrom D.* Complex optimal transport and the pluripotential theory of Kähler–Ricci solitons/ `arXiv:1401.8264 [math DG]`.
9. *Blum H., Liu Y.-Ch., Xu Ch.-Y., Zhuang Z.-Q.* The existence of the Kähler–Ricci soliton degeneration/ `arXiv:2103.15278 [math AG]`.
10. *Boucksom S., Hisamoto T., Jonsson M.* Uniform K-stability, Duistermaat–Heckman measures and singularities of pairs// Ann. Inst. Fourier. — 2017. — *67*. — P. 743–841.
11. *Cao H.* Deformation of Kähler metrics to Kähler–Einstein metrics on compact Kähler manifolds// Invent. Math. — 1985. — *81*. — P. 359–372.
12. *Chen X.-X., Donaldson S., Sun S.* Kähler–Einstein metrics on Fano manifolds, I-III// J. Am. Math. Soc. — 2015. — *28*. — P. 183–278.
13. *Chen X.-X., Wang B.* Space of Ricci flows. Part B: Weak compactness of the flows// J. Differ. Geom. — 2020. — *116*. — P. 1–123.

14. *Chen X.-X., Sun S., Wang B.* Kähler–Ricci flow, Kähler-Einstein metric, and K-stability// Geom. Topol. — 2018. — *22.* — P. 3145–3173.
15. *Datar V., Szèkelyhidi G.* Kähler–Einstein metrics along the smooth continuity method// Geom. Funct. Anal. — 2016. — *26.* — P. 975–1010.
16. *Delcroix T.* K-Stability of Fano spherical varieties// Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4). — 2020. — *53.* — P. 615–662.
17. *Donaldson S.* Scalar curvature and stability of toric varieties// J. Differ. Geom. — 2002. — *62.* — P. 289–348.
18. *Han J., Li Ch.* On the Yau–Tian–Donaldson conjecture for generalized Kähler–Ricci soliton equations/ `arXiv: 2006.00903 [math.DG]`.
19. *Han J.-Y., Li Ch.* Algebraic uniqueness of Kähler–Ricci flow limits and optimal degenerations of Fano varieties/// `arXiv: 2009.01010 [math.DG]`.
20. *Li Ch.* G-uniform stability and Kähler–Einstein metrics on Fano varieties// Invent. Math. — 2022. — *227.* — P. 661–744.
21. *Li Ch., Wang X.-W., Xu Ch.-Y.* Algebracity of metric tangent cones and equivariant K-stability// J. Am. Math. Soc. — 2021. — *34.* — P. 1175–1214.
22. *Li Y., Li Zh.-Y.* Equivariant $\mathbb{R}$-test configurations and semistable limits of $\mathbb{Q}$-Fano group compactifications/ `arXiv: 2103.06439 [math.DG]`.
23. *Li Y., Zhou B.* K-stability and polystable degenerations of polarized spherical varieties/ `arXiv: 2111.04269 [math.DG]`.
24. *Tian G.* Kähler–Einstein metrics with positive scalar curvature// Invent. Math. — 1997. — *130.* — P. 1–37.
25. *Tian G.* K-stability and Kähler–Einstein metrics// Commun. Pure Appl. Math. — 2015. — *68.* — P. 1085–1156.
26. *Tian G., Zhang Sh.-J., Zhang Zh.-L., Zhu X.-H.* Perelman's entropy and Kähler–Ricci flow an a Fano Manifold// Trans. Am. Math. Soc. — 2013. — *365.* — P. 6669–6695.
27. *Tian G., Zhang Zh.-L.* Regularity of Kähler–Ricci flows on Fano manifolds// Acta Math. — 2016. — *216.* — P. 127–176.
28. *Tian G., Zhu X.-H.* Uniqueness of Kähler–Ricci solitons// Acta Math. — 2000. — *184.* — P. 271–305.
29. *Tian G., Zhu X.-H.* Convergence of the Kähler–Ricci flow// J. Am. Math. Sci. — 2006. — *17.* — P. 675–699.
30. *Tian G., Zhu X.-H.* Convergence of the Kähler–Ricci flow on Fano manifolds// J. Reine Angew Math. — 2013. — *678.* — P. 223–245.
31. *Timashev D. A.* Homogenous Spaces and Equivariant Embeddings. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
32. *Wang F., Zhou B., Zhu X.-H.* Modified Futaki invariant and equivariant Riemann–Roch formula// Adv. Math. — 2016. — *286.* — P. 1205–1235.
33. *Yao Y.* Mabuchi solitons and relative Ding stability of toric Fano varieties/ `arXiv: 1701.04016 [math.DG]`.

Yan Li
School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing, China
E-mail: `liyan.kitai@yandex.ru`

ZhenYe Li
College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing, China
E-mail: `lizhenye@pku.edu.cn`