

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Том 222 (2023). С. 42–63 DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-42-63

УДК 517.958; 629.7.052

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. III

© 2023 г. В. М. МОРОЗОВ, В. И. КАЛЕНОВА, М. Г. РАК

Аннотация. Рассматриваются задачи стабилизации стационарных движений (положений равновесия и регулярных прецессий) спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях в предположении, что центр масс движется по круговой орбите. Математическими моделями рассматриваемых задач являются системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Представлен строгий аналитический подход к изучению этой проблемы, который позволяет эффективно и корректно строить алгоритмы стабилизации. Метод основан на приводимости нестационарных систем, описывающих указанные задачи, к стационарным системам. Предложены решения ряда задач стабилизации стационарных движений спутника при помощи магнитных систем. Представлены результаты математического моделирования предложенных алгоритмов, подтверждающие эффективность разработанной методики. Настоящая статья является третьей частью работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 220. — С. 71–85. Вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения.

Ключевые слова: линейная нестационарная система, приводимость, стационарные движения, линеаризованные уравнения движений спутника, стабилизация, управляемость, алгоримы управления.

STABILIZATION OF STATIONARY MOTIONS OF A SATELLITE NEAR THE CENTER OF MASS IN A GEOMAGNETIC FIELD. III

© 2023 V. M. MOROZOV, V. I. KALENOVA, M. G. RAK

ABSTRACT. In this paper, we consider problems of stabilization of stationary motions (equilibrium positions and regular precessions) of a satellite near the center of mass in gravitational and magnetic fields under the assumption that the center of mass moves in a circular orbit. Mathematical models of the problems considered are systems of differential equations with periodic coefficients. We present a rigorous analytical approach to this problem, which allows efficient and correct construction of stabilization algorithms. The method is based on the reducibility of nonstationary systems that describe these problems to stationary systems. Solutions for a number of problems of stabilizing stationary motions of a satellite with the help of magnetic systems are proposed. We present the results of mathematical modeling of the algorithms, which confirm the effectiveness of the developed methodology. This paper is the third part of the work. The first part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. -2023. -220. -P. 71-85. The second part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. -2023. -220. -P. 71-85.

Keywords and phrases: linear nonstationary system, reducibility, stationary motions, linearized equations of satellite motions, stabilization, controllability, control algorithms.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 3. Стабилизация стационарных движений спутника в геомагнитном поле	43
3.1. Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных моментов	44
3.2. Стабилизация положения равновесия при помощи моментов сил Лоренца	53
Список литературы	60

Глава З

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

В этой главе рассматриваются вопросы стабилизации стационарных движений спутника около центра масс при помощи управляющих магнитных моментов различной природы, выражения для которых представлены в главе 1.

Вопрос о стабилизации стационарных движений тем или иным способом представляет практический интерес. Один из таких способов основан на электродинамическом взаимодействии спутника с магнитным полем Земли. Магнитные системы ориентации, использующие электродинамическое взаимодействие, широко применяются в практике космических исследований.

Во время движения спутника по круговой орбите принятое в работе выражение для магнитной индукции геомагнитного поля изменяется периодически с периодом, равным периоду обращения спутника по орбите. Поэтому уравнения управляемого движения, линеаризованного в окрестности стационарных движений, представляют собой линейную систему, нестационарную по управлению. Ниже показано, что эти системы относятся к определенному классу ЛНС, которые допускают их конструктивное преобразование к стационарным системам большего порядка. Этот подход к исследованию систем указанного класса представлен в главе 2 и здесь применяется к решению задач управления ориентацией спутника при помощи магнитных моментов.

Предлагаемый подход состоит из четырех этапов.

- 1. Построить конструктивное преобразование исходной нестационарной системы к стационарной системе большей размерности.
- 2. Провести анализ управляемости полученной стационарной системы.
- 3. При наличии управляемости построить для стационарной системы алгоритм управления в виде линейной обратной связи, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Этот алгоритм можно строить либо назначая постоянные коэффициенты управления, которые обеспечат наперед заданные корни характеристического уравнения замкнутой системы, либо строя оптимальный алгоритм на основе квадратичного критерия качества на бесконечном интервале времени, что позволит также получить линейную обратную связь с постоянными коэффициентами.
- 4. Осуществить обратный переход к исходным переменным нестационарной системы, вводя дополнительные переменные таким образом, чтобы преобразование к переменным стационарной системы было невырожденным.

Использование алгоритмов стабилизации для стационарных систем имеет ряд достоинств.

- 1. Управление строится в виде обратной связи с постоянными коэффициентами. Это управление обеспечивает асимптотическую устойчивость приведенной стационарной системы.
- 2. Процесс построения управления достаточно хорошо алгоритмизирован. В частности, для получения результата при использовании оптимального алгоритма следует задать лишь параметры оптимизируемого функционала.

В этой главе представлено решение ряда задач стабилизации стационарных движений спутника. Управление трехосной ориентацией спутника в окрестности его положения относительного равновесия при помощи собственного магнитного момента, создаваемого магнитными катушками, рассмотрено в разделе 3.1, стабилизация при помощи моментов лоренцевых сил описана в разделе 3.2. Совместное использование указанных моментов рассмотрено в разделе 3.3. Задача стабилизации регулярных прецессий рассмотрена в разделе 3.4.

Краткое рассмотрение задачи определения ориентации спутника по измерениям, доставляемым магнитометром, содержится в разделе 3.5.

Моделирование алгоритмов стабилизации для всех рассмотренных задач проводилось при помощи стандартного пакета Matlab 7.1. Для демонстрации работоспособности предложенных алгоритмов рассматривались задачи стабилизации стационарных движений спутников с различными механическими и геометрическими параметрами при их движении по орбитам с различными наклонами [1,48,49,63].

В Приложении рассмотрено применение предложенного подхода при использовании более полной модели геомагнитного поля.

3.1. Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных моментов

Задача стабилизации положения относительного равновесия спутника состоит в том, чтобы построить управление, обеспечивающее его асимптотическую устойчивость. При решении этой задачи будем основываться на линеаризованных уравнениях движения.

3.1.1. Линеаризованные уравнения движения. Управляющий момент создается за счет взаимодействия внутреннего магнитного момента спутника, снабженного магнитными катушками, с геомагнитным полем (1.1.6). Выражение для линеаризованного момента представляется в виде (1.1.13). Линеаризованные уравнения управляемого движения (1.1.15) в данном случае имеют вид

$$\ddot{x}_1 - d_1 \dot{x}_3 - \kappa_1 x_1 = \mu_0 [2\beta_1 u_2 s\tau + \beta_4 u_3],$$

$$\ddot{x}_1 - d_1 \dot{x}_3 - \kappa_1 x_1 = \mu_0 [2\beta_1 u_2 s\tau + \beta_4 u_3],$$
(3.1.1)

$$x_3 + a_3 x_1 - \kappa_3 x_3 = -\mu_0 [\rho_5 u_1 + \rho_3 u_2 c\tau],$$

$$\ddot{x}_2 - \kappa_2 x_2 = \mu_0 [-2\beta_2 u_1 s\tau + \beta_2 u_3 c\tau].$$
(3.1.2)

Здесь

$$x_{1} = \theta_{2}, \quad x_{2} = \theta_{3}, \quad x_{3} = \theta_{1};$$

$$d_{1} = \frac{d}{J_{1}}, \quad d_{3} = \frac{d}{J_{3}}, \quad d = J_{2} - J_{1} - J_{3};$$

$$\kappa_{1} = 4\frac{J_{3} - J_{2}}{J_{1}}, \quad \kappa_{2} = 3\frac{J_{3} - J_{1}}{J_{2}}, \quad \kappa_{3} = \frac{J_{1} - J_{2}}{J_{3}};$$

$$\beta_{j} = \frac{sI}{J_{j}} \quad (j = 1, 2, 3), \quad \beta_{4} = \frac{cI}{J_{1}}, \quad \beta_{5} = \frac{cI}{J_{3}}.$$

Подсистемы (3.1.1), (3.1.2) связаны только через управления. Систему (3.1.1), (3.1.2) можно представить в виде системы первого порядка

$$\dot{\xi} = A_{\xi}\xi + B_{\xi}(\tau)u, \qquad (3.1.3)$$

где

$$\xi_{(6\times1)} = \begin{bmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \xi^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 & \dot{x}_1 & \dot{x}_3 \end{bmatrix}^{\top}, \quad \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} x_2 & \dot{x}_2 \end{bmatrix}^{\top},$$

$$A_{\xi} = \operatorname{diag}(A^{(1)}, A^{(2)}), \quad B_{\xi}(\tau) = \begin{bmatrix} B^{(1)} \\ (4\times3) \\ B^{(2)} \\ (2\times3) \end{bmatrix}.$$

Эту систему удобно представить в виде двух подсистем

$$\dot{\xi}^{(1)} = A^{(1)}\xi^{(1)} + B^{(1)}_{\xi}u; \qquad (3.1.4)$$

$$\dot{\xi}^{(2)} = A^{(2)}\xi^{(2)} + B^{(2)}_{\xi}u; \qquad (3.1.5)$$

где матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} A^{(1)}_{(4\times4)} &= \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ A_{21} & D \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \operatorname{diag}(\kappa_1, \kappa_3), \quad D = \begin{bmatrix} 0 & d_1 \\ -d_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \kappa_2 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_{\xi} &= \begin{bmatrix} B^{(1)}_{\xi} \\ B^{(2)}_{\xi} \end{bmatrix}, \quad B^{(1)}_{\xi} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta_1 s \tau & \beta_4 \\ -\beta_5 & -\beta_3 c \tau & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{(2)}_{\xi} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2\beta_2 s \tau & 0 & \beta_2 c \tau \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь O_2 — нулевая матрица. (2×2)

В Приложении 3.6.2 приведены нелинейные уравнения движения по экватору с точностью до членов второго порядка включительно.

3.1.2. Приведение к стационарной системе. Системы (3.1.1), (3.1.2) (соответственно (3.1.4), (3.1.5)) относятся к классу ЛНС, содержащих управление, которые допускают приведение к стационарным системам в расширенном пространстве состояний (см. гл. 2). Матрицы коэффициентов при управлении в указанных системах уравнений имеют вид

$$B(\tau) = B_{01}c\tau + B_{02}s\tau + B_{03}, \quad (B_{0k} = \text{const}).$$

Коэффициенты матриц $B(\tau)$ в уравнениях системы (3.1.4) являются элементами вектора

$$f^{(1)}(\tau) = [\cos\tau, \sin\tau, 1]^{\top},$$

а в уравнениях системы (3.1.5) — элементами вектора

$$f^{(2)}(\tau) = [\cos\tau, \sin\tau]^{\top},$$

которые удовлетворяют следующим уравнениям

$$\dot{f}^{(i)} = S_i f^{(i)}$$
 $(i = 1, 2);$ $S_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$ $S_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Здесь удобно ввести новые переменные y_i (j = 1, ..., 8) в скалярной форме по формулам

$$x_1 = y_1 c\tau + y_3 s\tau + y_5, \quad x_3 = y_2 c\tau + y_4 s\tau + y_6, \quad x_2 = y_7 c\tau + y_8 s\tau.$$
 (3.1.6)

Дважды дифференцируя эти соотношения, подставляя их в систему (3.1.1), (3.1.2) и приравнивая коэффициенты при функциях соs τ , sin τ , 1, получим системы, соответствующие системе (2.2.13)

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 - \bar{\kappa}_1 y_1 - d_1 \dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 - d_1 y_4 &= 0, \\ \ddot{y}_2 - \bar{\kappa}_3 y_2 + d_3 \dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 + d_3 y_3 &= -\mu_0 \beta_3 u_2, \\ \ddot{y}_3 - \bar{\kappa}_1 y_3 - d_1 \dot{y}_4 - 2\dot{y}_1 + d_1 y_2 &= 2\mu_0 \beta_1 u_2, \\ \ddot{y}_4 - \bar{\kappa}_3 y_4 + d_3 \dot{y}_3 - 2\dot{y}_2 - d_3 y_1 &= 0, \end{aligned}$$

$$(3.1.7)$$

$$\ddot{y}_5 - \kappa_1 y_5 - d_1 \dot{y}_6 = \mu_0 \beta_4 u_3, \ddot{y}_6 - \kappa_3 y_6 + d_3 \dot{y}_5 = -\mu_0 \beta_5 u_1,$$
(3.1.8)

$$\ddot{y}_7 - \bar{\kappa}_2 y_7 + 2\dot{y}_8 = \mu_0 \beta_2 u_3, \ddot{y}_8 - \bar{\kappa}_2 y_8 - 2\dot{y}_7 = -2\mu_0 \beta_2 u_1, \quad \bar{\kappa}_i = \kappa_i + 1 \quad (i = 1, 2, 3).$$

$$(3.1.9)$$

Стационарная система состоит из двух независимых систем (3.1.7) и (3.1.8), (3.1.9), в которые входят управления u_2 и u_1 , u_3 соответственно.

Замечание 3.1. Ранг матрицы коэффициентов при магнитных моментах в системе (3.1.1), (3.1.2)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2\beta_1 s\tau & \beta_4 \\ -\beta_5 & -\beta_3 c\tau & 0 \\ -2\beta_2 s\tau & 0 & \beta_2 c\tau \end{bmatrix}$$

45

равен двум. Поэтому среди управлений u_1, u_2, u_3 лишь два независимых.

3.1.3. Управляемость. Управляемость в рассматриваемой задаче можно исследовать как исходя из нестационарной системы (3.1.1), (3.1.2), так и анализируя стационарные системы (3.1.7)–(3.1.9).

3.1.3.1. Управляемость стационарной системы. Рассмотрим стационарную систему (3.1.7)– (3.1.9). Компоненты исходного вектора состояния x_1, x_2, x_3 выражаются через переменные y_1, \ldots, y_8 . Если система (3.1.8), (3.1.9) относительно переменных y_5, \ldots, y_8 , содержащих информацию о всех компонентах вектора состояния x_1, x_2, x_3 , управляема при помощи управлений u_1, u_3 , то систему (3.1.7), включающую в себя переменные y_1, \ldots, y_4 , рассматривать нет необходимости. В таком случае будем считать, что $y_i(\tau) = 0$ ($i = 1, \ldots, 4$) и $u_2 = 0$. Тогда из формул (3.1.6) следует

$$x_1 = y_5, \quad x_3 = y_6, \quad x_2 = y_7 c\tau + y_8 s\tau.$$
 (3.1.10)

Предположим, что орбита спутника не является ни экваториальной, ни полярной, т. е. $sI \neq 0$, $cI \neq 0$. Предполагая, что $u_2 = 0$ и не рассматривая систему (3.1.7), исследуем управляемость стационарной системы (3.1.8), (3.1.9).

Согласно [7], стационарная система неуправляема, если в ней существует интеграл, не зависящий от наличия управлений. Умножим второе уравнение системы (3.1.8) на $2\beta_2$, четвертое уравнение на $-\beta_5$ и сложим, $\beta_5 \bar{\kappa}_2 y_8 - 2\beta_2 \kappa_3 y_6 = 0$. Откуда следует, что при выполнении условий $\bar{\kappa}_2 = 0$, $\kappa_3 = 0$, т. е.

$$J_1 = J_2 = \frac{3}{2}J_3 \tag{3.1.11}$$

в системе (3.1.8) существует не зависящий от наличия управления u_1 интеграл

$$2\beta_2(\dot{y}_6 + d_3y_5) + \beta_5(\dot{y}_8 - 2y_7) = \text{const.}$$

Умножим первое уравнение системы (3.1.9) на β_2 , третье уравнение на $-\beta_4$ и сложим. Тогда в этой системе существует не зависящий от наличия управления u_3 интеграл

$$\beta_2(\dot{y}_5 - d_1y_6) - \beta_4(\dot{y}_7 + 2y_8) = \text{const},$$

если выполняется условие $\beta_2 \kappa_1 y_5 - \beta_4 \bar{\kappa}_2 y_7 = 0$ или

$$\kappa_1 = 0, \quad \bar{\kappa}_2 = 0, \quad \text{t. e.} \quad J_2 = J_3 = \frac{3}{4}J_1.$$
(3.1.12)

Итак, если условия (3.1.11) или (3.1.12) не выполняются, то стационарная система (3.1.8), (3.1.9) управляема.

Как уже указывалось в главе 2, приведенные стационарные системы являются избыточными по отношению к исходной системе. Если стационарная система управляема, то управляема и исходная нестационарная система. Однако неуправляемость стационарной системы может и не повлечь неуправляемость исходной нестационарной системы.

3.1.3.2. Управляемость нестационарной системы. Как и выше, при анализе управляемости стационарной системы полагаем, что $u_2 = 0$.

Нестационарная система (3.1.4), (3.1.5), согласно критерию [7], управляема, если можно указать такую точку τ^* , в которой

$$\operatorname{rank} U(\tau^*) = 6, \qquad (3.1.13)$$

$$U(\tau) = \begin{bmatrix} W_1(\tau) & \dots & W_6(\tau) \end{bmatrix}, \qquad (3.1.13)$$

$$W_1(\tau) = B_{\xi}(\tau), \quad W_k(\tau) = A_{\xi}(\tau) W_{k-1}(\tau) - \dot{W}_{k-1}(\tau) \quad (k = 2, \dots, 6), \qquad (3.1.13)$$

$$B_{\xi} = \begin{bmatrix} B_{\xi}^{(1)} \\ B_{\xi}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad B_{\xi}^{(1)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta_4 \\ -\beta_5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\xi}^{(2)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\beta_2 s\tau & \beta_2 c\tau \end{bmatrix}.$$

Матрица $U(\tau)$ имеет вид

$$U(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_4 & -d_1\beta_5 & 0 & 0 & l_{26}\beta_4 \\ 0 & 0 & -\beta_5 & 0 & 0 & -d_3\beta_4 & l_{45}\beta_5 & 0 \\ 0 & \beta_4 & -d_1\beta_5 & 0 & 0 & l_{26}\beta_4 & l_{27}\beta_5 & 0 \\ -\beta_5 & 0 & 0 & -d_3\beta_4 & l_{45}\beta_5 & 0 & 0 & l_{48}\beta_4 \\ 0 & 0 & -2\beta_2s\tau & \beta_2c\tau & 4\beta_2c\tau & 2\beta_2s\tau & 2l_{57}\beta_2s\tau & l_{58}\beta_2c\tau \\ -2\beta_2s\tau & \beta_2c\tau & 2\beta_2c\tau & \beta_2s\tau & 2l_{65}\beta_2s\tau & l_{66}\beta_2c\tau & 2l_{67}\beta_2c\tau & l_{68}\beta_2s\tau \end{bmatrix}$$
$$l_{26} = -d_1d_3 + \kappa_1, \quad l_{45} = d_1d_3 - \kappa_3, \quad l_{48} = -d_3(l_{26} + \kappa_3), \\ l_{65} = -l_{66} = 1 - \kappa_2, \quad l_{27} = d_1(l_{45} - \kappa_1), \quad l_{57} = 2 + l_{65}, \\ l_{67} = l_{68} = 2\kappa_2 - l_{65}, \quad l_{58} = l_{66} - 2. \end{bmatrix}$$

Можно показать, что первые пять столбцов матрицы управляемости $U(\tau)$ линейно независимы при любых значениях параметров. Шестой столбец матрицы $U(\tau)$ является линейной комбинацией первых пяти только при выполнении условия (3.1.12). Ранг матрицы $U(\tau)$, составленной из первых пяти столбцов и седьмого при условии (3.1.11) равен шести.

Таким образом, нестационарная система (3.1.1), (3.1.2) управляема при любых значениях моментов инерции спутника, несмотря на то, что соответствующая стационарная система не является полностью управляемой.

Замечание 3.2. Как указывалось в [20], в работе [77] сформулированы лишь достаточные условия управляемости системы (3.1.1), (3.1.2) для любой неэкваториальной орбиты, имеющие вид

$$J_3 \neq J_2, J_2(J_1 - J_2 + J_3) \neq 6J_3(J_3 - J_1).$$
(3.1.14)

Если тензор инерции спутника, например, — шаровой $(J_1 = J_2 = J_3)$, то условия управляемости (3.1.13) выполнены, т. е. управляемость имеет место, несмотря на то, что условия (3.1.14) нарушаются.

Если орбита экваториальная (I = 0), то система (3.1.2), (3.1.3) становится стационарной: $\beta_j = 0$ (j = 1, 2, 3), и система неуправляема.

Если орбита полярная $(I = \pi/2)$, то система (3.1.1), (3.1.2) расщепляется на две независимые группы: уравнения для переменных x_1 , x_3 с управлениями u_2 ; уравнения для x_2 с управлениями u_1 , u_3 . Применяя критерий [13], нетрудно получить, что система уравнений относительно переменных x_1 , x_3 управляема, а система относительно переменной x_2 управляема при наличии хотя бы одного из управлений u_1 или u_3 .

3.1.4. Алгоритмы стабилизации. Одна из основных идей предлагаемого метода состоит в использовании стационарной системы для построения стабилизирующего управления. Алгоритм строится на основе стационарной системы (3.1.8), (3.1.9).

Для построения алгоритма стабилизации удобнее представить систему (3.1.8), (3.1.9) в форме Коши, вводя переменные

которые удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{z} = A_z z + B_z U, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \end{bmatrix}^{\top}, \quad (3.1.15)$$

$$A_z = \operatorname{diag}(A_{z1}, A_{z2}); \quad A_{z1} = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ K_1 & -D_1 \end{bmatrix}, \quad A_{z2} = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ K_2 & -D_2 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \operatorname{diag}(\kappa_1, \kappa_3), \quad K_2 = \operatorname{diag}(\bar{\kappa}_2, \bar{\kappa}_2), \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{z} = \begin{bmatrix} O_{2} \\ B_{1} \\ O_{2} \\ B_{2} \end{bmatrix}, \quad B_{1} = \mu_{0} \begin{bmatrix} 0 & \beta_{4} \\ -\beta_{5} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{2} = \mu_{0} \begin{bmatrix} 0 & \beta_{2} \\ -2\beta_{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача стабилизации стационарной управляемой системы (3.1.15) состоит в том, чтобы построить управление U, обеспечивающее стремление к нулю компонент вектора состояния $z(\tau)$ при $\tau \to \infty$.

Стабилизирующее управление $U(\tau)$ строится в виде обратной связи по состоянию $U(\tau) = -K_z z(\tau)$, а матрица коэффициентов управления $K_z = \text{const}$ выбирается из условия минимума квадратичного функционала

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} [z^{\top}(\tau)Qz(\tau) + U^{\top}(\tau)\Gamma U(\tau)]d\tau.$$

Здесь $Q(8 \times 8)$ — неотрицательно определенная, $\Gamma(2 \times 2)$ — положительно определенная — постоянные матрицы.

Оптимальное управление имеет вид [2,11,25,54] (см. гл. 2, раздел 2.1)

$$U(\tau) = -K_z z(\tau), \quad K_z = \Gamma^{-1} B_z P.$$
 (3.1.16)

Матрица $P(8 \times 8)$ является положительно определенным решением матричного алгебраического уравнения Риккати

$$PA_z + A_z^\top P - PB_z \Gamma^{-1} B_z^\top P + Q = 0.$$

Синтезированное управляющее воздействие является функцией переменных $z(\tau)$ стационарной системы (3.1.15) более высокого порядка, чем исходная нестационарная система (3.1.4), (3.1.5). Для введения управления непосредственно в исходную систему следует выразить вектор $z(\tau)(8 \times 1)$ через исходный вектор состояния $\xi(6 \times 1) = [x_1 \ x_3 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_3 \ x_2 \ \dot{x}_2]^{\top}$ и некоторый дополнительный вектор.

Дополним вектор ξ вектором $\xi_d = \begin{bmatrix} \xi_7 & \xi_8 \end{bmatrix}^\top$ так, чтобы матрица T преобразования

$$\bar{\xi} = Tz \left(\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi \\ \xi_d \end{bmatrix} \right) \tag{3.1.17}$$

была невырожденной.

Компоненты вектора $\bar{\xi}$ связаны с компонентами вектора состояния $z(\tau)$ стационарной системы (3.1.15) соотношениями

$$x_{1} = \xi_{1} = z_{1}, \quad x_{3} = \xi_{2} = z_{2}, \quad \dot{x}_{1} = \xi_{3} = z_{3}, \quad \dot{x}_{3} = \xi_{4} = z_{4},$$

$$x_{2} = \xi_{5} = z_{5}c\tau + z_{7}s\tau, \quad \dot{x}_{2} = \xi_{6} = z_{6}c\tau + z_{8}s\tau,$$

$$\xi_{7} = -z_{5}s\tau + z_{7}c\tau, \quad \xi_{8} = -z_{6}s\tau + z_{8}c\tau.$$
(3.1.18)

Матрицу преобразования запишем в виде

$$T(\tau) = \operatorname{diag}(T_1, T_2), \quad T_1 = E_4, \quad T_2(\tau) = \begin{bmatrix} c\tau E_2 & s\tau E_2 \\ -s\tau E_2 & c\tau E_2 \end{bmatrix}$$

Вектор ξ удовлетворяет системе уравнений первого порядка (3.1.4), (3.1.5). Уравнения для дополнительного вектора, согласно (2.3.12), имеют вид

$$\dot{\xi}_d = A^{(2)}\xi_d + B_d(\tau)U, \quad B_d(\tau) = \mu_0 \begin{bmatrix} -2\beta_2 c\tau & \beta_2 s\tau \end{bmatrix}.$$
 (3.1.19)

Тогда уравнение для вектора $\tilde{\xi}$ можно записать в виде

Āε

$$\bar{\xi} = \bar{A}_{\xi}\bar{\xi} + \bar{B}_{\xi}(\tau)U, \qquad (3.1.20)$$
$$= \operatorname{diag}(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(2)}), \quad \bar{B}_{\xi} = \begin{bmatrix} B^{(1)}(\tau) \\ B^{(2)}(\tau) \\ B_{d}(\tau) \end{bmatrix}.$$



Рис. 3.1. Поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ (i = 1, 2, 3) в отсутствие управления.

Нестационарная система (3.1.20) включает в себя исходную систему (3.1.4), (3.1.5) в качестве подсистемы. Управление (3.1.16), построенное для стационарной системы (3.1.15), при помощи выражений (3.1.18) можно ввести в систему (3.1.20) в виде

$$U = -K_z T^{-1}(\tau)\bar{\xi}.$$

Замкнутая этим управлением система имеет вид

$$\dot{\xi} = (\bar{A}_{\xi} - \bar{B}_{\xi}(\tau)K_z T^{-1}(\tau))\bar{\xi}.$$
(3.1.21)

Решения $\bar{\xi}(\tau)$ системы (3.1.21), содержащие компоненты исходного вектора $\xi(\tau)$, стремятся к нулю при $\tau \to \infty$, в силу выбора матрицы K_z , так как компоненты вектора $\bar{\xi}$ связаны с компонентами вектора z ограниченным преобразованием (3.1.18).

3.1.5. Моделирование. Целью проведения моделирования предложенных алгоритмов являлась демонстрация их работоспособности в различных ситуациях. Поэтому рассматривались алгоритмы стабилизации стационарных движений спутников с различными геометрическими и механическими параметрами — спутников, относительное равновесие которых в отсутствие управлений является не асимптотически устойчивым, а также спутников с неустойчивым положением относительного равновесия.

При моделировании алгоритмов стабилизации коэффициенты вычислялись с использованием стандартной программы LQR для стационарных систем.

Параметр, определяющий величину собственного магнитного момента

$$\mu_0 = \frac{\mu_E}{\mu}, \quad \mu_E = 7,812 \cdot 10^6 \text{ km}^3 \cdot \text{kr} \times \text{c}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}, \quad \mu = 3,986 \cdot 10^5 \text{ km}^3 \text{c}^{-2}.$$

Начальные отклонения значений углов 0,15, 0,15, 0,2, начальные значения отклонений скоростей в безразмерном времени: 0,1, 0,1, 0,15.

На рисунках 3.1, 3.2 представлены результаты моделирования алгоритма стабилизации для спутника с параметрами: $J_1 = 2,5 \text{ кr} \cdot \text{m}^2$, $J_2 = 5,8 \text{ кr} \cdot \text{m}^2$, $J_3 = 3,6 \text{ кr} \cdot \text{m}^2$ [63] (неустойчивое положение относительного равновесия). Спутник движется по орбите с углом наклона $I = 60^{\circ}$. Время орбитального периода $\tau = 2\pi$, что соответствует $\approx 1,5$ ч.

Матрицы в квадратичном функционале приняты в виде

$$Q = \alpha E_8, \quad \Gamma = \gamma E_2,$$

где величины $\alpha = 1,0, \gamma = 1,0.$

Для сравнения представлено поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ (i = 1, 2, 3) в отсутствие управления $(u_i = 0)$ и при наличии стабилизирующего управления $(u_i \neq 0)$. Сплошными линиями описывается поведение углов, пунктирными — скоростей.

На рисунках 3.3–3.6 приведены результаты моделирования поведения углов при реализации алгоритма стабилизации для спутника с параметрами $J_1 = 3,6$ кг · м², $J_2 = 5,8$ кг · м², $J_3 =$



Рис. 3.2. Поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ (i = 1, 2, 3) при наличии стабилизирующего управления.



Рис. 3.3. Поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ (i = 1, 2, 3) при $I = 60^{\circ}$.



Рис. 3.4. Поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ (i = 1, 2, 3) при $I = 15^{\circ}$.

2,5 кг·м² [52]. Такие параметры удовлетворяют условиям устойчивого положения относительного равновесия спутника.

Для анализа поведения стабилизируемых переменных вблизи нарушения условий управляемости проводилось моделирование при движении спутника вблизи экваториальной и полярной орбит. Представлено поведение отклонений углов и угловых скоростей для различных углов наклона орбиты: $I = 60^{\circ}$, $I = 15^{\circ}$, $I = 82,5^{\circ}$.



Рис. 3.5. Поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ (i = 1, 2, 3) при $I = 82,5^{\circ}$.



Рис. 3.6. Поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ (i = 1, 2, 3), $J_1 = J_2 = J_3$, $I = 97,8^{\circ}$.

Из сравнения рисунков 3.1 и 3.3 следует, что для принятого алгоритма стабилизации процесс затухания колебаний переменных до заданных значений практически не зависит от характера устойчивости относительного равновесия спутника. Процесс стабилизации практически завершился к моменту времени $\tau = 20 \approx 4,5$ ч.

Анализ приведенных графиков показывает, что время процесса стабилизации увеличивается при движении по орбитам, близким к экваториальным или полярным.

На рисунке 3.6 приведены результаты моделирования алгоритма стабилизации в том случае, когда тензор инерции ИСЗ — шаровой, и орбита близка полярной. Значения параметров спутника: $J_1 = J_2 = J_3 = 130 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ [47]; наклон орбиты $I = 97.8^\circ$; параметры функционала Φ : $\alpha = 1.0$, $\gamma = 0.0001$.

В этом случае время стабилизации и амплитуда переходных процессов увеличиваются.

Проведенное подробное математическое моделирование подтвердило эффективность предложенной методики решения задачи стабилизации.

3.1.6. Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил. Аэродинамические моменты оказывают существенное влияние на движение спутника около центра масс на низких орбитах (до 700 км). Задача стабилизации относительного равновесия при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил рассматривалась в [22, 65, 74].

Будем предполагать, что кроме гравитационного момента на спутник действует также восстанавливающий аэродинамический момент, выражение для которого принимается в традиционном виде (1.1.12). Положение относительного равновесия (1.1.9) сохраняется и при наличии аэродинамического момента.

Управляющий момент, как и выше в п. 1.1.1, создается за счет взаимодействия собственного магнитного момента спутника с магнитным полем Земли (3.1.1).

Выражение для аэродинамического момента \mathbf{M}_a в линеаризованных уравнениях принимается в виде (1.1.13) [74] $\mathbf{M}_a = C_a \omega_0^2 \begin{bmatrix} 0 & \theta_3 & \theta_1 \end{bmatrix}^\top$, коэффициент C_a зависит от аэродинамических характеристик спутника.

3.1.6.1. Линеаризованные уравнения. В этом случае линеаризованные уравнения управляемого движения (1.1.16) принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - d_1 \dot{x}_3 - \kappa_1 x_1 &= \mu_0 [2\beta_1 u_2 s\tau + \beta_4 u_3]; \\ \ddot{x}_3 + d_3 \dot{x}_1 - \kappa_3^* x_3 &= -\mu_0 [\beta_5 u_1 + \beta_3 u_2 c\tau]; \\ \ddot{x}_2 - \kappa_2^* x_2 &= \mu_0 [-2\beta_2 u_1 s\tau + \beta_2 u_3 c\tau]; \\ x_1 &= \theta_2, \quad x_2 = \theta_3, \quad x_3 = \theta_1; \\ d_1 &= \frac{d}{J_1}, \quad d_3 &= \frac{d}{J_3}, \quad d = J_2 - J_1 - J_3; \\ \kappa_1 &= 4 \frac{J_3 - J_2}{J_1}, \quad \kappa_2^* &= 3 \frac{J_3 - J_1}{J_2} + \frac{C_a}{J_2}, \quad \kappa_3^* &= \frac{J_1 - J_2}{J_3} + \frac{C_a}{J_3}; \\ \beta_j &= \frac{sI}{J_j} \quad (j = 1, 2, 3), \quad \beta_4 &= \frac{cI}{J_1}, \quad \beta_5 &= \frac{cI}{J_3}. \end{aligned}$$
(3.1.22)

Преобразование (3.1.16) приводит систему (3.1.22) к следующей стационарной системе

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{1} - \bar{\kappa}_{1}y_{1} - d_{1}\dot{y}_{2} + 2\dot{y}_{3} - d_{1}y_{4} &= 0, \\ \ddot{y}_{2} - \bar{\kappa}_{3}^{*}y_{2} + d_{3}\dot{y}_{1} + 2\dot{y}_{4} + d_{3}y_{3} &= -\mu_{0}\beta_{3}u_{2}, \\ \ddot{y}_{3} - \bar{\kappa}_{1}y_{3} - d_{1}\dot{y}_{4} - 2\dot{y}_{1} + d_{1}y_{2} &= 2\mu_{0}\beta_{1}u_{2}, \\ \ddot{y}_{4} - \bar{\kappa}_{3}^{*}y_{4} + d_{3}\dot{y}_{3} - 2\dot{y}_{2} - d_{3}y_{1} &= 0, \\ \ddot{y}_{5} - \kappa_{1}y_{5} - d_{1}\dot{y}_{6} &= \mu_{0}\beta_{4}u_{3}, \\ \ddot{y}_{6} - \kappa_{3}^{*}y_{6} + d_{3}\dot{y}_{5} &= -\mu_{0}\beta_{5}u_{1}, \\ \ddot{y}_{7} - \bar{\kappa}_{2}^{*}y_{7} + 2\dot{y}_{8} &= \mu_{0}\beta_{2}u_{3}, \\ \ddot{y}_{8} - \bar{\kappa}_{2}^{*}y_{8} - 2\dot{y}_{7} &= -2\mu_{0}\beta_{2}u_{1}. \end{aligned}$$

$$(3.1.23)$$

Здесь $\bar{\kappa}_i = \kappa_i + 1$ $(i = 1, 3); \bar{\kappa}_i^* = \bar{\kappa}_i + 1$ (i = 2, 3).

Система (3.1.23), (3.1.24) отличается от ранее рассмотренной системы (3.1.7)–(3.1.9) лишь выражениями для коэффициентов $\bar{\kappa}_i^*$.

Стационарная система (3.1.23), (3.1.24) состоит из двух независимых подсистем, в которые входят управления u_2 и u_1 , u_3 соответственно.

3.1.6.2. Управляемость. Если считать, что $u_2 = 0$, то систему (3.1.23), как и выше, рассматривать не требуется (переменные y_1, \ldots, y_4 вводить не нужно).

Исследуя управляемость стационарной системы (3.1.24) тем же способом (как и выше в п. 2.1.1) из условия существования интегралов, не зависящих от управлений, нетрудно показать, что имеют место следующие условия неуправляемости

$$J_1 = \frac{1}{4}(2J_2 + 3J_3), \qquad C_a = \frac{1}{4}(2J_2 - 3J_3), \qquad (3.1.25)$$

 $J_2 = J_3, C_a = 3J_1 - 4J_3. (3.1.26)$

Управляемость нестационарной системы (3.1.22) исследуется так же, как и выше, и матрица управляемости имеет вид (3.1.13), где

$$\begin{split} l_{26} &= -d_1 d_3 + \kappa_1, \quad l_{45} = d_1 d_3 - \kappa_3^*, \quad l_{48} = -d_3 (l_{26} + \kappa_3^*), \\ l_{65} &= -l_{66} = 1 - \kappa_2^*, \quad l_{27} = d_1 (l_{45} - \kappa_1), \quad l_{57} = 2 + l_{65}, \end{split}$$



Рис. 3.7. Влияние аэродинамического момента на процесс стабилизации углов θ_i (i = 1, 2, 3).

$$l_{67} = l_{68} = 2\kappa_2^* - l_{65}, \quad l_{58} = l_{66} - 2.$$

Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что условиями неуправляемости исходной нестационарной системы (3.1.22) являются условия

$$J_2 = J_3 = 3J_1, \quad C_a = -9J_1. \tag{3.1.27}$$

При отсутствии аэродинамических сил $(C_a = 0)$ эти условия не выполняются, тогда (как уже указывалось в [20]), система (3.1.22) управляема при любых значениях моментов инерции спутника.

Замечание 3.3 (см. [20]). В работе [74] указаны лишь достаточные условия управляемости системы (3.1.22).

3.1.6.3. Моделирование. Алгоритм стабилизации был построен на основании приведенной стационарной системы (3.1.24), и в соответствии с ним было проведено математическое моделирование. Цель моделирования — показать влияние величины аэродинамического момента на процесс стабилизации.

Рассматривалась стабилизация малого спутника с параметрами $J_1 = 0,036 \text{ kr} \cdot \text{m}^2, J_2 = 0,09 \text{ kr} \cdot \text{m}^2, J_3 = 0,088 \text{ kr} \cdot \text{m}^2$ [74].

Угол наклона орбиты $I = 51,6^{\circ}$. Высота орбиты 415 км.

Начальные значения отклонений углов 0,15, 0,15, 0,2, безразмерных угловых скоростей 0,1, 0,1, 0,15.

Матрицы, определяющие функционал Φ приняты в том же, как и в п. 2.3.1, виде $Q = \alpha E_8$, $\Gamma = \gamma E_2$. Здесь величины $\alpha = 0.0014$; $\gamma = 2100.0$.

Для сравнения величины аэродинамического момента введем характерное значение $C_{a*} = 3,0(J_3 - J_1)$, сопоставимое с максимальным значением гравитационного момента.

На рисунках 3.7, 3.8 представлено поведение переменных углов и угловых скоростей $(\theta_i, d\theta_i/d\tau (i = 1, 2, 3))$ для различных значений величины аэродинамического момента: $C_{a0} = 0$, $C_{a1} = 0.5C_*, C_{a2} = C_{a*}$.

Из рисунков видно, что величина аэродинамического момента практически не сказывается на времени сходимости, но существенно влияет на амплитуду переходного процесса.

3.2. Стабилизация положения равновесия при помощи моментов сил Лоренца

Рассмотрим задачу стабилизации относительного равновесия спутника (1.1.10) при использовании электродинамического эффекта влияния лоренцевых сил, действующих на заряженную часть его поверхности.



Рис. 3.8. Влияние аэродинамического момента на процесс стабилизации угловых скоростей $d\theta_i/d\tau$ (i = 1, 2, 3).

3.2.1. Линеаризованные уравнения. Во время движения спутника взаимодействие заряда экрана с геомагнитным полем Земли приводит к возникновению сил Лоренца. Главный момент этих сил относительно центра масс спутника определяется по формуле (1.1.7). Выражение для линеаризованного момента имеет вид (1.1.14)

$$M_{m1}^{q} = \mu_{0}(-b_{1}v_{2} + b_{2}v_{3}s\tau), \quad M_{m2}^{q} = \mu_{0}\tilde{b}_{1}v_{1}, \quad M_{m3}^{q} = \mu_{0}\tilde{b}_{2}v_{3}s\tau.$$
(3.2.1)

Величины $v_1 = x_q$, $v_2 = y_q$, $v_3 = z_q$ (координаты центра электрического заряда относительно центра масс) считаются управляющими параметрами.

Линеаризованные уравнения движения (1.1.15), управляемого моментом лоренцевых сил \mathbf{M}_m^q , в этом случае имеют вид

$$\ddot{x}_{1} - d_{1}\dot{x}_{3} - \kappa_{1}x_{1} = \mu_{0}(-b_{1}v_{2} + b_{2}v_{3}s\tau),$$

$$\ddot{x}_{3} + d_{3}\dot{x}_{1} - \kappa_{3}x_{3} = \mu_{0}\tilde{b}_{2}v_{1}s\tau,$$

$$\ddot{x}_{2} - \kappa_{2}x_{2} = \mu_{0}\tilde{b}_{1}v_{1}.$$
(3.2.2)
(3.2.3)

Здесь

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_2, \quad x_2 = \theta_3, \quad x_3 = \theta_1; \\ d_1 &= \frac{d}{J_1}, \quad d_3 = \frac{d}{J_3}, \quad d = J_2 - J_1 - J_3; \\ \kappa_1 &= 4 \frac{J_3 - J_2}{J_1}, \quad \kappa_2 = 3 \frac{J_3 - J_1}{J_2}, \quad \kappa_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3}; \\ b_1 &= \frac{qR\omega_0 cI}{J_1}, \quad b_2 = \frac{2qR\omega_0 sI}{J_1}; \\ \tilde{b}_1 &= \frac{qR\omega_0 cI}{J_2}, \quad \tilde{b}_2 = \frac{2qR\omega_0 sI}{J_3}. \end{aligned}$$

Представим систему (3.2.2), (3.2.3) в виде системы первого порядка, которую удобно записать в виде двух подсистем

$$\dot{\xi}^{(1)} = A^{(1)}\xi^{(1)} + B^{(1)}_{\xi}v, \qquad (3.2.4)$$

$$\dot{\xi}^{(2)} = A^{(2)}\xi^{(2)} + B^{(2)}_{\xi}v. \tag{3.2.5}$$

Здесь

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 & \dot{x}_1 & \dot{x}_3 \end{bmatrix}^{\top}, \quad \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} x_2 & \dot{x}_2 \end{bmatrix}^{\top},$$

$$\begin{split} A_{(4\times4)}^{(1)} &= \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ A_{21} & D \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \operatorname{diag}(\kappa_1, \kappa_3), \quad D = \begin{bmatrix} 0 & d_1 \\ -d_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \kappa_2 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_{\xi}^{(1)} &= \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & b_2 s \tau \\ \tilde{b}_2 s \tau & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\xi}^{(2)} &= \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tilde{b}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{split}$$

Подсистемы (3.2.2), (3.2.3), а также (3.2.4), (3.2.5) связаны только через управление.

Системы (3.2.2) и (3.2.4) относятся к классу нестационарных систем, содержащих управление, которые (как и в разделе 1.1), допускают приведение к стационарным системам в расширенном пространстве состояний. Системы (3.2.3) и (3.2.5) стационарны.

3.2.2. Приведение к стационарной системе. Для преобразования системы (3.2.2) к стационарной системе введем новые переменные y_i (j = 1, ..., 6) по формулам

$$x_1 = y_1 c\tau + y_3 s\tau + y_5, \quad x_3 = y_2 c\tau + y_4 s\tau + y_6. \tag{3.2.6}$$

Дважды дифференцируя эти соотношения, подставляя их в систему (3.2.2) и приравнивая коэффициенты при функциях $\cos \tau$, $\sin \tau$, 1, получим

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{1} &-\bar{\kappa}_{1}y_{1} - d_{1}\dot{y}_{2} + 2\dot{y}_{3} - d_{1}y_{4} = 0, \\ \ddot{y}_{2} &-\bar{\kappa}_{3}y_{2} + d_{3}\dot{y}_{1} + 2\dot{y}_{4} + d_{3}y_{3} = 0, \\ \ddot{y}_{3} &-\bar{\kappa}_{1}y_{3} - d_{1}\dot{y}_{4} - 2\dot{y}_{1} + d_{1}y_{2} = \mu_{0}b_{2}v_{3}, \\ \ddot{y}_{4} &-\bar{\kappa}_{3}y_{4} + d_{3}\dot{y}_{3} - 2\dot{y}_{2} - d_{3}y_{1} = -\mu_{0}\tilde{b}_{2}v_{1}, \\ \ddot{y}_{5} &-\kappa_{1}y_{5} - d_{1}\dot{y}_{6} = -\mu_{0}b_{1}v_{2}, \\ \ddot{y}_{6} &-\kappa_{3}y_{6} + d_{3}\dot{y}_{5} = 0, \end{aligned}$$
(3.2.7)

$$\ddot{y}_7 - \kappa_2 y_7 = \mu_0 b_1 v_1 \quad (x_2 = y_7).$$
(3.2.9)

Здесь $\bar{\kappa}_1 = \kappa_1 + 1$, $\bar{\kappa}_3 = \kappa_3 + 1$. Стационарная система (3.2.7)–(3.2.9) состоит из двух независимых систем (3.2.7), (3.2.9) и (3.2.8), в которые входят управления v_1 , v_3 и v_2 соответственно.

3.2.3. Управляемость. Будем полагать, что круговая орбита спутника не является ни полярной $(I \neq \pi/2)$, ни экваториальной $(I \neq 0)$, так как при этих условиях коэффициенты в матрице при управлениях равны нулю.

Как и в разделе 3.1, будем исследовать сначала управляемость стационарной системы (3.2.7)–(3.2.9).

Из рассмотрения уравнения (3.2.9) следует, что введение управления v_1 необходимо, так как при его отсутствии переменная $y_7 = x_2$, очевидно, неуправляема.

Ранг матрицы коэффициентов при управлении в системе (3.2.7)–(3.2.9) равен двум. Будем считать, что $v_2 = 0$, тогда, положив $y_5 \equiv 0$, $y_6 \equiv 0$, будем рассматривать систему (3.2.7), (3.2.9).

В системе (3.2.7) есть интегралы, не зависящие от наличия управлений, если выполнено одно из условий:

1. d = 0 и $\bar{\kappa}_1 = 0$ или $J_2 = J_1 + J_3$, $4(J_3 - J_2) + J_1 = 0$;

2.
$$d = 0$$
 и $\bar{\kappa}_3 = 0$ или $J_2 = J_1 + J_3$.

Первое условие физически нереализуемо, второе условие является достаточным условием неуправляемости системы (3.2.7) и имеет вид

$$J_2 = J_1 + J_3. \tag{3.2.10}$$

Для анализа управляемости нестационарной системы (3.2.4), (3.2.5) удобно перейти к двойственной системе и проанализировать ее наблюдаемость

$$\xi_1 = -\kappa_1 \xi_3, \quad \xi_2 = -\kappa_3 \xi_4, \quad \xi_3 = -\xi_1 + d_3 \xi_4, \quad \xi_4 = -\xi_2 - d_1 \xi_3, \\ \dot{\xi}_5 = -\kappa_2 \xi_6, \quad \dot{\xi}_6 = -\xi_5, \quad \sigma_1 = \tilde{b}_2 \xi_4 s \tau + \tilde{b}_1 \xi_6, \quad \sigma_2 = b_2 \xi_3 s \tau.$$
(3.2.11)

При анализе наблюдаемости можно считать, что $\bar{\sigma}_2 = \xi_3$.

Рассмотрим сначала измерение $\bar{\sigma}_2 = \xi_3$.

Если $d \neq 0$, $\kappa_3 \neq 0$, можно ввести переменные $\eta_1 = \xi_3$, $\eta_2 = -\xi_1 + d_3\xi_4$, $\eta_3 = \xi_2$, $\eta_4 = \xi_4$, которые подчиняются системе уравнений

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2, \qquad \dot{\eta}_2 = (\kappa_1 - d_1 d_3) \eta_1 - d_3 \eta_3, \dot{\eta}_3 = -\kappa_3 \eta_4, \qquad \dot{\eta}_4 = -d_1 \eta_1 - \eta_3, \bar{\sigma}_2 = \eta_1.$$

Очевидно, что эта система наблюдаема по измерению $\bar{\sigma}_2$. Поскольку переменная ξ_4 наблюдаема, можно модифицировать измерение σ_1 и построить новое измерение $\bar{\sigma}_1 = \xi_6$. Тогда легко видеть, что переменные ξ_5 , ξ_6 наблюдаются.

Пусть теперь d = 0, т. е. выполнено условие (3.2.10). В этом случае по измерению $\bar{\sigma}_2 = \xi_3$ определяются лишь ξ_1, ξ_3 , а по измерению σ_1 наблюдаются все остальные переменные.

Пусть $\kappa_3 = 0$. По измерению $\bar{\sigma}_2 = \xi_3$ определяются лишь $\xi_3, -\xi_1 + d_3\xi_4, \xi_2$. А по измерению σ_1 наблюдаются все остальные переменные, если $\kappa_2 + 1 \neq 0$.

Таким образом, нестационарная система (3.2.11) наблюдаема, а следовательно, система (3.2.4), (3.2.5) управляема, если не выполняются оба условия $\kappa_3 = 0$, $\kappa_2 + 1 = 0$. Система (3.2.4), (3.2.5) неуправляема, если

$$J_1 = J_2 = \frac{3}{2}J_3. \tag{3.2.12}$$

3.2.4. Алгоритм стабилизирующего управления. Алгоритм стабилизации строится на основании приведенной стационарной системы (3.2.7), (3.2.9), которая является управляемой, за исключением случая (3.2.10). (Далее, как и выше, считаем, что $v_2 = 0$).

Переменные исходной нестационарной системы $\xi^{(1)}$ (3.2.4) связаны с переменными стационарной системы $z^{(1)}$ соотношениями

$$\xi^{(1)} = F^{\top}(\tau)z^{(1)}, \quad \begin{array}{ccc} F^{\top}(\tau) = \begin{bmatrix} c\tau E_2 & s\tau E_2 & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & c\tau E_2 & s\tau E_2 \end{bmatrix}, \\ \dot{F}^{\top} = F^{\top}S^{\top}, \quad S^{\top} = \operatorname{diag}(S_1, S_1), \quad S_1 = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ -E_2 & O_2 \end{bmatrix}.$$
(3.2.13)

Переменные $z^{(1)}(8 \times 1)$ подчиняются следующей системе уравнений

$$\dot{z}^{(1)} = \bar{A}^{(1)} z^{(1)} + B^{(1)} v, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \end{bmatrix}^{\top}, \quad (3.2.14)$$
$$\bar{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} A_{11} & E_4 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; \quad A_{11} = \begin{bmatrix} O_2 & -E_2 \\ E_2 & O_2 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \operatorname{diag}(\kappa_1, \kappa_3, \kappa_1, \kappa_3), \quad A_{22} = \begin{bmatrix} D & -E_2 \\ E_2 & D \end{bmatrix}, \\D = \begin{bmatrix} 0 & d_1 \\ -d_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{(1)} = \begin{bmatrix} O_2 \\ O_2 \\ O_2 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & -b_2 \\ \tilde{b}_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Стационарная система, для которой строится алгоритм стабилизации, состоит из двух независимых подсистем, связанных через управление: системы 8-го порядка (3.2.14) и системы относительно вектора $z^{(2)}(2 \times 1)$, $(z^{(2)} \equiv \xi_2)$:

$$\dot{z}^{(2)} = A^{(2)} z^{(2)} + B^{(2)} v, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \kappa_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{b}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$
 (3.2.15)

Введем вектор

$$z = \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \end{bmatrix},$$

который подчиняется стационарной системе

$$\dot{z} = A_z z + B_z v, \quad A_z = \operatorname{diag}(\bar{A}^{(1)}, A^{(2)}) B_z = \begin{bmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \end{bmatrix}.$$
 (3.2.16)

Задача стабилизации стационарной управляемой системы (3.2.16) состоит в том, чтобы построить управление v, обеспечивающее стремление к нулю компонент ее вектора состояния z при $\tau \to \infty$.

Стабилизирующее управление строится в виде обратной связи по состоянию $v(\tau) = -K_z z(\tau)$, а матрица коэффициентов управления $K_z(2 \times 10) =$ const выбирается из условия минимума квадратичного функционала

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} [z^{\top}(\tau)Qz(\tau) + v^{\top}(\tau)\Gamma v(\tau)]d\tau.$$

Здесь $Q(10 \times 10)$ — неотрицательно и $\Gamma(2 \times 2)$ — положительно определенные постоянные матрицы соответственно.

Оптимальное управление имеет вид

$$v(\tau) = -K_z z(\tau), \quad K_z = \Gamma^{-1} B_z P.$$
 (3.2.17)

Матрица $P(10 \times 10)$ является положительно определенным решением матричного алгебраического уравнения Риккати

$$PA_z + A_z^\top P - PB_z \Gamma^{-1} B_z^\top P + Q = 0.$$

Синтезированное управляющее воздействие является функцией переменных $z(\tau)$ стационарной системы (3.2.16) более высокого порядка, чем исходная нестационарная система (3.2.4), (3.2.5). Для введения управления непосредственно в исходную систему следует выразить вектор z размерности (10 × 1) через исходный вектор состояния, состоящий из вектора $\xi^{(1)}(4 \times 1)$, вектора $\xi^{(2)}(2 \times 1)$. Для того чтобы это преобразование было невырожденным, необходимо ввести дополнительный вектор

$$\xi_{d}_{(4\times1)} = F_{d}^{\top}(\tau)z^{(1)}, \quad F_{d}^{\top}(\tau) = F^{\top}(\tau), \quad S^{\top} = \begin{bmatrix} -s\tau E_{2} & c\tau E_{2} & O_{2} & O_{2} \\ O_{2} & O_{2} & -s\tau E_{2} & c\tau E_{2} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\zeta = Tz, \quad \zeta = \begin{bmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi_d \\ \xi^{(2)} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} F^{\top} & O \\ (4 \times 8) & (4 \times 2) \\ F_d^{\top} & O \\ (4 \times 8) & (4 \times 2) \\ O & E_2 \\ (2 \times 8) \end{bmatrix} \quad (z^{(2)} \equiv \xi_2). \tag{3.2.18}$$

Уравнение для дополнительного вектора ξ_d имеет вид

$$\dot{\xi}_d = A^{(1)}\xi_d + B_d(\tau)v, \quad B_d(\tau) = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & -b_2c\tau\\ \tilde{b}_2c\tau & 0 \end{bmatrix}.$$
(3.2.19)

Тогда уравнение для вектора $\zeta(10 \times 1)$ можно записать в виде

 $A_{\zeta} =$

$$\dot{\zeta} = A_{\zeta}\zeta + B_{\zeta}(\tau)v, \qquad (3.2.20)$$

$$\operatorname{diag}(A^{(1)}, A^{(1)}, A^{(2)}), \quad B_{\zeta} = \begin{vmatrix} B_{\xi}^{(1)}(\tau) \\ B_{d}(\tau) \\ B_{\xi}^{(2)}(\tau) \end{vmatrix}.$$

Нестационарная система (3.2.20) включает в себя исходную систему (3.2.4), (3.2.5) в качестве подсистемы. Управление (3.2.17), построенное для стационарной системы (3.2.16), можно вводить в систему (3.2.20), используя выражения (3.2.18), в виде

$$v = -K_z T^{-1}(\tau) \zeta. (3.2.21)$$

Замкнутая этим управлением система имеет вид

$$\dot{\zeta} = (A_{\zeta} - B_{\zeta}(\tau)K_z T^{-1}(\tau))\zeta.$$
 (3.2.22)



Рис. 3.9. Поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ (i = 1, 2, 3) в отсутствие управления $(v_i = 0)$.



Рис. 3.10. Поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ (i = 1, 2, 3) при наличии управления $(v_i \neq 0)$.

Решения $\zeta(\tau)$ системы (3.2.22), содержащие компоненты исходного вектора $\xi^{(1)}(\tau)$, $\xi^{(2)}(\tau)$, стремятся к нулю при $\tau \to \infty$ в силу выбора матрицы K_z , так как компоненты вектора ζ связаны с компонентами вектора z ограниченным преобразованием (3.2.18).

3.2.5. Моделирование. Проводилось моделирование решения задачи стабилизации относительного равновесия спутника (3.2.20) при помощи моментов сил Лоренца. Алгоритмы стабилизации строились на основе стационарной системы (3.2.16) десятого порядка.

Задача стабилизации рассматривалась для различных значений параметров спутников [40, 48] и различных наклонов орбит. Коэффициенты управления вычислялись с использованием стандартной программы LQR для стационарных систем. Матрицы, входящие в квадратичный функционал, были приняты в виде $Q = \alpha E_{10}$; $\Gamma = \gamma E_2$.

Начальные значения отклонения углов 0,15, 0,15, 0,2; отклонения значений угловых безразмерных скоростей 0,1, 0,1, 0,15.

В коэффициентах b_i , b_i матрицы B_{ζ} при управлении в уравнениях (3.2.20) значение величины заряда, согласно [40] $q = 5.0 \cdot 10^{-3} A \times c$.

На рисунках 3.9–3.14 представлены результаты моделирования поведения компонент вектора состояния при наличии и отсутствии управления; в отсутствие управления рисунки 3.9, 3.11, 3.13; при наличии управления вида (3.2.21) — рисунки 3.9, 3.12, 3.14. Сплошными линиями описывается поведение углов, пунктирными — скоростей.

На рисунках 3.9, 3.10 представлено поведение компонент вектора состояния для значений параметров спутника: J = [1000, 0, 600, 0, 1400, 0] кгм² [40]; угол наклона орбиты $I = 60^{\circ}$; значения параметров функционала: $\alpha = 100, 0, \gamma = 1, 0 \cdot 10^{11}$.



Рис. 3.11. Поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ (i = 1, 2, 3) в отсутствие управления ($v_i = 0$).



Рис. 3.12. Поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ (i = 1, 2, 3) при наличии управления $(v_i \neq 0)$.



Рис. 3.13. Поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ (i = 1, 2, 3) в отсутствие управления $(v_i = 0)$.

На рисунках 3.11, 3.12 представлены результаты моделирования поведения переменных вектора состояния для спутника с характеристиками: J = [115, 120, 135] кгм² [48]; движение по орбите, близкой к полярной ($I = 97,8^{\circ}$); параметры функционала $\alpha = 10,0, \gamma = 1,0 \cdot 10^{11}$.

На рисунках 3.13, 3.14 представлены результаты моделирования для спутника с характеристиками, близкими к шару: $J_1 = [1000, 950, 1050]$ кгм² [48]; движение по орбите, близкой к экваториальной ($I = 10^{\circ}$); параметры функционала $\alpha = 100, 0, \gamma = 1, 0 \cdot 10^{11}$.

Время затухания переходных процессов порядка двух орбитальных периодов.



Рис. 3.14. Поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ (i = 1, 2, 3) при наличии управления $(v_i \neq 0)$.

Моделирование показало эффективность предлагаемых алгоритмов стабилизации для различных комбинаций значений моментов инерции спутника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Электродинамическая стабилизация программного вращения ИСЗ в орбитальной системе координат// Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. Астрон. 2012. № 2. С. 79–90.
- 2. Александров В. В, Лемак С. С., Парусников Н. А. Лекции по механике управляемых систем. М.: Курс, 2018.
- 3. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
- 4. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
- 5. Белецкий В. В., Хентов А. А. Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985.
- 6. *Дубошин Г. Н.* О вращательном движении искусственных небесных тел// Бюлл. ИТА АН СССР. 1960. 7, № 7. С. 511–520.
- 7. *Каленова В. И., Морозов В. М.* Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. — М.: Физматлит, 2010.
- 8. *Каленова В. И., Морозов В. М.* Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением// Прикл. мат. мех. 2012. 76, № 4. С. 576–588.
- 9. Каленова В. И., Морозов В. М. Об управлении линейными нестационарными системами специального вида// Изв. РАН. Теория и системы управления. 2013. № 3. С. 6–15.
- 10. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления// в кн.: Тр. Конгр. ИФАК. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 521–547.
- 11. Калман Р. Е., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
- 12. *Кондурарь В. Т.* Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара// Прикл. мех. техн. физ/ 1960. 36, № 5. С. 890–901.
- 13. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968.
- 14. Лурье А. А. Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961.
- 15. *Морозов В. М.* Об устойчивости движения гиростата под действием гравитационных магнитных и аэродинамических моментов// Космич. исслед. 1967. 5, № 5. С. 727–732.
- 16. *Морозов В. М.* Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов// Космич. исслед. 1969. 7, № 3. С. 395–401.
- 17. *Морозов В. М.* Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного и аэродинамического моментов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. Мат. Мех. 1968. № 6. С. 109–111.
- 18. *Морозов В. М.* Устойчивость движения космических аппаратов// в кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 1–83.
- 19. *Морозов В. М., Каленова В. И.* Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации// Космич. исслед. — 2020. — 58, № 3. — С. 199–207.

- 20. *Морозов В. М., Каленова В. И.* Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов// Космич. исслед. 2021. 59, № 5. С. 393–407.
- 21. *Морозов В. М., Каленова В. И., Рак М. Г.* О стабилизации регулярныз прецессий спутника при помощи магнитных моментов// Прикл. мат. мех. 2021. 85, № 4. С. 436–453.
- 22. Морозов В. М., Каленова В. И. Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил// Космич. исслед. 2022. 60, № 3. С. 246–253.
- 23. Овчинников М. Ю., Пеньков В. И., Ролдугин Д. С., Иванов Д. С. Магнитные системы ориентации малых спутников. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016.
- 24. *Овчинников М. Ю., Ролдугин Д. С.* Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников// Космические аппараты и технологии. — 2019. — 3, № 2 (28). — С. 73–86.
- 25. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978.
- 26. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967.
- 27. *Сазонов В. В., Чебуков С. Ю., Кузнецова Е. Ю.* Двухосная закрутка спутника в плоскости орбиты// Космич. исслед. 2000. 38, № 3. С. 296–306.
- 28. *Сарычев В. А.* Вопросы ориентации искусственных спутников// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1978.
- 29. *Сарычев В. А.* Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов// в кн.: Проблемы аналитической механики и теории устойчивости. М.: Физматлит, 2009. С. 111–126.
- Сарычев В. А., Овчинников М. Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 23. — М.: ВИНИТТИ, 1985.
- 31. *Тихонов А. А.* Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле// Космич. исслед. 2003. 41, № 1. С. 69–79.
- 32. Хентов А. А. Движение около центра масс экваториального спутника на круговой орбите при взаимодействии магнитного и гравитационного полей Земли// 31 — 1967. — С. 947–950.
- 33. *Хентов А. А.* Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника Земли вокруг своего центра масс// Космич. исслед. 1968. 6, № 5. С. 793–795.
- Черноусько Ф. Л. Об устойчивости регулярных прецессий спутника// Прикл. мат. мех. 1964. 28, № 1. — С. 155–157.
- 35. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A. Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system// Adv. Space Res. 2018. 62. P. 142–151.
- Aleksandrov A. Yu, Antipov K. A., Platonov A. V., Tikhonov A. A. Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the König frame// Nonlinear Dyn. — 2015. — 82. — P. 1493–1505.
- 37. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite// Aerospace Sci. Techn. 2020. № 3. P. 1–12.
- Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Monoaxial electrodynamic stabilization of an artificial Earth satellite in the orbital coordinate system via control with distributed delay// IEEE Access. — 2021. — 9. — 132623– 132630.
- 39. Antipov K. A., Tikchonov A. A. Multipole models of the geomagnetic field: Construction of the Nth approximation// Geomagnetizm and Aeronomy. 2013. 53, № 2. P. 271–281.
- Antipov K. A., Tikhonov A. A. On satellite electrodynamic attitude stabilization// Aerospace Sci. Techn. — 2014. — 33. — P. 92–99.
- 41. Bin Zhou Global stabilization of periodic linear systems by bounded controls with application to spacecraft magnetic attitude control// Automatica. 2015. 60. P. 145–154.
- 42. Brewer J. W. Kronecker Products and Matrix calculus in system Theory// IEEE Trans. Circ. Syst. 1978. CAS-25, № 9. P. 772–781.
- 43. Chang A. An algebraic characterization of controllability// IEEE Trans. Automat. Control. 1965. AC-10, № 1. P. 112–113.
- 44. Cubas J., de Ruiter A. Magnetic control without attitude determination for spinning spacecraft// Acta Astronaut. 2020. 169. P. 108–123.
- Cubas J., Farrahi A., Pindado S. Magnetic attitude control for satellites in polar or sun synchronous orbits// J. Guid. Control Dynam. — 2015. — 38. — P. 1947–1958.
- 46. Frik M. A. Attitude stability of satellites subjected to gravity gradient and aerodynamic torques// AIAA J. 1970. 8, № 10. P. 1780–1785.

- 47. Giri D. K., Mukherjee B. K., Sinha M. Three-axis global magnetic attitude control of Earth-pointing satellites in circular orbit: Three-axis global magnetic attitude control// Asian J. Control. 2017. 19, № 6. P. 2028–2041.
- Giri D. K. and Sinha M. Magneto-Coulombic attitude control of Earth-pointing satellites// J. Guid. Control Dynam. — 2014. — 37, № 6. — P. 1946–1960.
- Giri D. K., Sinha M. Lorentz Force Based Satellite Attitude Control// J. Inst. Eng. India. Ser. C. 2016. — 97. — P. 279–290.
- Hautus M. L. J. Controllability and observability conditions of linear autonomous systems// Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. — 1969. — 72. — P. 443–448.
- 51. Huang X., Yan Y. Fully actuated spacecraft attitude control via the hybrid magnetocoulombic and magnetic torques// J. Guid. Control Dynam. 2017. 40, № 12. P. 1–8.
- Ivanov D. S., Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Doronin D. M., Ovchinnikov A. V. Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties// Acta Astronaut. — 2017. — 132. — P. 103–110.
- Kalenova V. I., Morozov V. M. Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces// Aerospace. Sci. Technol. — 2020. — 106. — 106105.
- 54. Kalman R. E. Lectures on Controllability and Observability. Bologna, Italy: C.I.M.E., 1969.
- 55. Laub A. J., Arnold W. F. Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models// IEEE Trans. Automat. Control. 1984. 29, № 2. P. 163–165.
- 56. Likins P. W. Stability of a symmetrical satellite in attitudes fixed in an orbiting reference frame// J. Astronaut. Sci. 1965. 12, № 1. P. 18–24.
- 57. Morozov V. M., Kalenova V. I. Linear time-varying systems and their applications to cosmic problems// AIP Conf. Proc. — 2018. — 1959. — 020003.
- 58. Mostaza-Prieto D., Roberts P. C. E. Methodology to analyze attitude stability of satellites subjected to aerodynamic torques// J. Guid. Control Dynam. 2016. 39. P. 437–449.
- Nababi M., Barati M. Mathematical modeling and simulation of the Earth's magnetic field: A comparative study of the models on the spacecraft of attitude control application// Appl. Math. Model. 2017. 46. P. 365–381.
- 60. Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Pichuzhkina A. V. Geomagnetic field models for satellite angular motion studies// Acta Astronaut. 2018. 144. P. 171–180.
- Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S. A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites// Progr. Aerospace Sci. — 2019. — 109. — 100546.
- 62. Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Penkov V. I. Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study// Acta Astronaut. 2015. 110. P. 279–286.
- 63. Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Ivanov D. S., Penkov V. I. Choosing control parameters for three axis magnetic stabilization in orbital frame// Acta Astronaut. 2015. 116. P. 74–68.
- 64. Psiaki M. Magnetic torque attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation// J. Guid. Control Dynam. 2001. 24, № 2. P. 386–394.
- Psiaki M. L. Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torquing// J. Guid. Control Dynam. — 2004. — 27. — P. 347–355.
- 66. Psiaki M. L., Martel F., Pal P. K. Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data// J. Guid. Control Dynam. 1990. 13, № 3. P. 506–514.
- 67. Psiaki M. L., Oshman Y. Spacecraft attitude rate estimation from geomagnetic fiend measurements// J. Guid. Control Dynam. — 2003. — 26, № 2. — P. 244–252.
- 68. Sarychev V. A., Mirer S. A. Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// Celestial Mech. Dynam. Astronom. 2000. 76, № 1. P. 55–68.
- Sarychev V. A., Mirer S. A., Degtyarev A. A., Duarte E. K. Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// Celestial Mech. Dynam. Astronom. — 2007. — 97, № 4. — P. 267–287.
- 70. Searcy J. D., Pernicka H. J. Magnetometer-only attitude determination using novel two-step Kalman filter approach// J. Guid. Control Dynam. 2012. 35, № 6. P. 1693–1701.
- Silani E., Lovera M. Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results// Control Eng. Pract. — 2005. — 13. — P. 357–371.
- 72. Sofyal A., Jafarov E. M., Wisniewski R. Robust and global attitude stabilization of magnetically actuated spacecraft through sliding mode// Aerospace Sci. Technol. 2018. 76. P. 91–104.

- 73. Sukhov E. Numerical approach for bifurcation and orbital stability analysis of periodic motions of a 2-DOF autonomous Hamiltonian system// J. Phys. Conf. Ser. 2021. 1925. 012013.
- 74. Sutherland R., Kolmanovsky I. K., Girard A. R. Attitude control of a 2U cubesat by magnetic and air drag torques// IEEE Trans. Control Syst. Techn. 2018. 27, № 3. P. 1047–1059.
- 75. Tortora P., Oshman Y., Santoni F. Spacecraft angular rate estimation from magnetometer data on using and analytic predictor// J. Guid. Control Dynam. 2004. 27, № 3. P. 365–373.
- 76. Wertz J. Spacecraft Attitude Determination and Control. Dordrecht: D. Reidel, 1978.
- 77. Yang Y. Controllability of spacecraft using only magnetic torques// IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst. 2016. 52, № 2. P. 955–962.
- 78. Zhou K., Huang H., Wang X., Sun L. Magnetic attitude control for Earth-pointing satellites in the presence of gravity gradient// Aerospace Sci. Techn. 2017. 60. P. 115–123.

Морозов Виктор Михайлович Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова E-mail: moroz@imec.msu.ru

Каленова Вера Ильинична Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова E-mail: kalenova44@mail.ru

Рак Михаил Геннадьевич Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова E-mail: mihailrak@mail.ru