ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 83–93
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-83-93

УДК 514.76

О ГЕОМЕТРИИ ГОЛОМОРФНЫХ ТОРСООБРАЗУЮЩИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

© 2023 г. **А. Р. РУСТАНОВ, О. Е. АРСЕНЬЕВА, С. В. ХАРИТОНОВА**

Аннотация. Получен ряд результатов о голоморфных торсообразующих векторных полях на почти контактных метрических многообразиях.

Ключевые слова: торсообразующее векторное поле, голоморфное торсообразующее векторное поле, спецконциркулярное векторное поле, почти контактное метрическое многообразие, ξ-инвариантная структура.

ON THE GEOMETRY OF HOLOMORPHIC TORSE-FORMING VECTOR FIELDS ON ALMOST CONTACT METRIC MANIFOLDS

© 2023 **A. R. RUSTANOV, O. E. ARSEN'EVA, S. V. KHARITONOVA**

Abstract. Several new results on holomorphic torse-forming vector fields on almost contact metric manifolds are obtained.

Keywords and phrases: torse-forming vector field, holomorphic torse-forming vector field, special concircular vector field, almost contact metric manifold, ξ-invariant structure.

AMS Subject Classification: 53C10, 53C25

1. Введение. Нахождение условий инвариантности геометрических объектов относительно действия той или иной группы преобразований является одной из наиболее актуальных задач геометрического исследования. В [5] эта задача решалась для действия локальной однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденной торсообразующим векторным полем на почти эрмитовом многообразии. Были найдены необходимые и достаточные условия инвариантности келеровой структуры относительно такого действия. Развитие идей, изложенных в [5], было продолжено в [9]. Так, в [9] введено понятие абсолютно торсообразующего векторного поля на почти эрмитовом многообразии. Показано, что любое торсообразующее векторное поле на келеровом многообразии является абсолютно торсообразующим. Доказано, что абсолютно торсообразующее векторное поле ξ на приближенно келеровом многообразии сохраняет структурный эндоморфизм приближенно келеровой структуры тогда и только тогда, когда ξ — спецконциркулярное векторное поле [9].

В [11] рассматривается почти контактное метрическое многообразие, характеристический вектор которого является торсообразующим векторным полем. Доказано, что торсообразующий характеристический вектор ζ с определяющими элементами ρ и a сохраняет почти контактную метрическую структуру $S = \{\zeta, \vartheta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тогда и только тогда, когда

(i) $a(\zeta) = -\rho$;
(ii) $\nabla_\zeta(\Phi)X = a(\Phi X)\zeta$;

(iii) $\langle \nabla_X \zeta, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y \zeta\rangle = 0$.

Торсообразующий характеристический вектор ζ с определяющими элементами ρ и a сохраняет нормальную почти контактную метрическую структуру $S = \{\zeta, \vartheta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тогда и только тогда, когда

(i) $a(\zeta) = -\rho$;
(ii) $a \circ \Phi = 0$;
(iii) $\langle \nabla_X \zeta, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y \zeta\rangle = 0$.

Конциркулярные векторные поля возникают при рассмотрении конформных преобразований псевдоримановых многообразий, переводящих геодезические окружности в геодезические окружности. Примером конциркулярного векторного поля может служить детально исследованное П. А. Широковым [12] поле сходящихся направлений, называемое также конкурентным векторным полем. В дальнейшем изучением конциркулярных веторных полей занимался целый ряд авторов: Г. И. Кручкович [8], Й. Микеш [10] и др. В рамках общей теории относительности конциркулярные векторные поля рассматривал Х. Такено [18].

Скалярное поле Φ на (M, g) называется специальным конциркулярным скалярным полем, если $\nabla^2\Phi = \rho\Phi g$, где $\rho = \mathrm{const} \neq 0$. Если тензор кривизны (соответственно тензор Риччи) риманова пространства (M, g), допускающего специальное конциркулярное (спецконциркулярное) скалярное поле, удовлетворяет условию $R_{hijk,[lm]} = 0$ (соответственно $R_{ij,[kl]} = 0$, то M есть пространтсво постоянной кривизны (соответственно пространство Эйнштейна) [17].

Связное n-мерное риманово многообразие класса C^∞ допускает $n+1$ независимых решений уравнения $\nabla^2\rho + c^2\rho g = 0$ тогда и только тогда, когда M изометрично сфере $S^n(1/c)$ в E^{n+1} (см. [13, 19]).

Векторное поле X на n-мерном римановом многообразии (M, g) класса C^∞ называется специальным конциркулярным (спецконциркулярным) векторным полем, если $\nabla_X Y = \phi Y$ для всех векторных полей Y и функций ϕ на M. Если на многообразии M существует более двух линейно независимых спецконциркулярных векторных полей $X_{(i)}$, то $\nabla_Y \phi_{(i)} = -Kg(Y, X_{(i)})$ для всех $Y \in \mathcal{X}(M)$ и $\phi_{(i)} = -K\rho_{(i)} + b_{(i)}$, где $b_{(i)}$ и K — константы (см. [16]).

В [7] исследуются условия, при которых характеристический вектор нормального локально конформно квазисасакиевого (короче $lcQS$-) многообразия является торсообразующим или, более того, конциркулярным векторным полем. Доказано, что следующие утверждения эквивалентны: $lcQS$-структура нормальна и ее характеристический вектор является торсообразующим векторным полем; $lcQS$-структура нормальна и ее характеристический вектор является конциркулярным векторным полем; $lcQS$-структура локально конформно косимплектична и имеет замкнутую контактную форму.

В данной работе рассматриваются голоморфные торсообразующие векторные поля на почти контактных метрических многообразиях. Получен критерий голоморфности торсообразующего векторного поля на почти контактном метрическом многообразии. Получен критерий спецконциркулярности голоморфного торсообразующего векторного поля на почти контактном метрическом многообразии. Получено необходимое и достаточное условие, при котором торсообразующее векторное поле на почти контактном метрическом многообразии является абсолютно торсообразующим. Для основных классов почти контактных метрических многообразий (косимплектических, слабо косимплектических, сасакиевых, приближенно сасакиевых, Кенмоцу и обобщенных Кенмоцу) рассмотрены торсообразующие векторные поля, удовлетворяющие дополнительным условиям. В заключение получены факты, связанные с геометрией дифференциальной формы дуальной голоморфному торсообразующему векторному полю.

2. Голоморфные торсообразующие векторные поля на почти контактных метрических многообразиях. Пусть M — гладкое многообразие, $\mathcal{X}(M)$ — $C^\infty(M)$-модуль гладких векторных полей на M, d — оператор внешнего дифференцирования, ∇ — риманова связность метрики $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$, $\mathcal{L}_X$ — оператор дифференцирования Ли в направлении векторного поля X, $[\cdot,\cdot]$ — коммутатор векторных полей или скобка Ли.

Все многообразия, тензорные поля и подобные объекты предполагаются гладкими класса C^∞. Термины тензорное поле и тензор полагаются равнозначными.

Регулярное векторное поле $\xi \in \mathcal{X}(M)$ порождает локальную однопараметрическую группу диффеоморфизмов F_t на многообразии M. Рассмотрим дифференциально-геометрическую структуру $S = \{T_1, \dots, T_N\}$, определенную конечным числом тензорных полей на M.

Определение 1 (см. [2])**.** Структура $S = \{T_1, \dots, T_N\}$ называется ξ-*инвариантной*, если каждый из тензоров, её составляющих, инвариантен относительно операций увлечения, порожденных элементами локальной группы F_t.

Удобный критерий ξ-инвариантности структуры дается следующей теоремой.

Теорема 1 (см. [2])**.** *Структура $S = \{T_1, \dots, T_N\}$ ξ-инвариантна тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_\xi(T_i) = 0$, $i = 1, \dots, N$.*

Пример 1 (см. [2])**.** Риманова структура $S = \{g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ ξ-инвариантна тогда и только тогда, когда ξ — векторное поле Киллинга, т.е. $\langle \nabla_X \xi, Y \rangle + \langle \nabla_Y \xi, X \rangle = 0$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Действительно, согласно теореме 1, риманова структура будет ξ-инвариантна тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{L}_\xi(g)(X, Y) = \\
&= \mathcal{L}_\xi(g(X, Y)) - g(\mathcal{L}_\xi X, Y) - g(X, \mathcal{L}_\xi Y) = \\
&= \xi(g(X, Y)) - g([\xi, X], Y) - g(X, [\xi, Y]) = \\
&= \xi(g(X, Y)) - g(\nabla_\xi X, Y) - g(X, \nabla_\xi Y) + g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi) = \\
&= \nabla_\xi g(X, Y) + g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi) = \\
&= \langle \nabla_X \xi, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y \xi \rangle.
\end{aligned}$$

Пример 2. Почти эрмитова структура $S = \{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ ξ-инвариантна тогда и только тогда, когда

(i) ξ — векторное поле Киллинга, т.е. $\langle \nabla_X \xi, Y \rangle + \langle \nabla_Y \xi, X \rangle = 0$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$;
(ii) $\nabla_\xi(J)X - \nabla_{JX}\xi + J\nabla_X \xi = 0$, $X \in \mathcal{X}(M)$.

Справедливость первого утверждения доказывается так же как для примера 1. Покажем справедливость второго пункта. Тензор J является ξ-инвариантным тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{L}_\xi(J)X = \\
&= \mathcal{L}_\xi(JX) - J\mathcal{L}_\xi X = \\
&= [\xi, JX] - J([\xi, X]) = \\
&= \nabla_\xi(JX) - \nabla_{JX}\xi - J(\nabla_\xi X) + J(\nabla_X \xi) = \\
&= \nabla_\xi(J)X + J(\nabla_\xi X) - \nabla_{JX}\xi - J(\nabla_\xi X) + J(\nabla_X \xi) = \\
&= \nabla_\xi(J)X - \nabla_{JX}\xi + J(\nabla_X \xi).
\end{aligned}$$

Пример 3. Почти контактная метрическая структура $S = \{\zeta, \vartheta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ ξ-инвариантна тогда и только тогда, когда:

(i) $\nabla_\xi \zeta = \nabla_\zeta \xi$;
(ii) $\nabla_\xi(\vartheta)X + \vartheta(\nabla_X \xi) = 0$;
(iii) $\nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_{\Phi X}\xi + \Phi\nabla_X \xi = 0$, $X \in \mathcal{X}(M)$;
(iv) ξ — векторное поле Киллинга, т.е. $\langle \nabla_X \xi, Y \rangle + \langle \nabla_Y \xi, X \rangle = 0$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

(i) Действительно, вектор ζ является ξ-инвариантным тогда и только тогда, когда

$$0 = \mathcal{L}_\xi \zeta = [\xi, \zeta] = \nabla_\xi \zeta - \nabla_\zeta \xi,$$

т.е. $\nabla_\xi \zeta = \nabla_\zeta \xi$.

(ii) Форма ϑ является ξ-инвариантной тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_\xi(\vartheta)X = \\ &= \mathcal{L}_\xi\vartheta(X) - \vartheta(\mathcal{L}_\xi X) = \\ &= \xi(\vartheta(X)) - \vartheta([\xi, X]) = \\ &= \xi(\vartheta(X)) - \vartheta(\nabla_\xi X) + \vartheta(\nabla_X \xi) = \\ &= \nabla_\xi(\vartheta)X + \vartheta(\nabla_\xi X) - \vartheta(\nabla_\xi X) + \vartheta(\nabla_X \xi) = \\ &= \nabla_\xi(\vartheta)X + \vartheta(\nabla_X \xi), \quad X \in \mathcal{X}(M), \end{aligned}$$

т.е. $\nabla_\xi(\vartheta)X + \vartheta(\nabla_X\xi) = 0$.

(iii) Эндоморфизм Φ является ξ-инвариантным тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_\xi(\Phi)X = \\ &= \mathcal{L}_\xi(\Phi X) - \Phi\mathcal{L}_\xi X = \\ &= [\xi, \Phi X] - \Phi([\xi, X]) = \\ &= \nabla_\xi(\Phi X) - \nabla_{\Phi X}\xi - \Phi(\nabla_\xi X) + \Phi(\nabla_X \xi) = \\ &= \nabla_\xi(\Phi)X + \Phi(\nabla_\xi X) - \nabla_{\Phi X}\xi - \Phi(\nabla_\xi X) + \Phi(\nabla_X \xi) = \\ &= \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_{\Phi X}\xi + \Phi(\nabla_X \xi), \quad X \in \mathcal{X}(M). \end{aligned}$$

(iv) следует из примера 1.

Определение 2 (см. [2, 5, 9])**.** Ненулевое векторное поле $\xi \in \mathcal{X}(M)$ называется *торсообразующим*, если

$$\nabla\xi = \rho \operatorname{id} + a \otimes \xi, \tag{1}$$

и *псевдоторсообразующим*, если

$$\nabla\xi = \rho\Phi + a \otimes \xi$$

для некоторых $\rho \in C^\infty(M)$ и $a \in \mathcal{X}^*(M)$. Дифференциальная 1-форма a и функция ρ называются *характеристическими*. Торсообразующее векторное поле называется *конциркулярным*, если $da = 0$, *спецконциркулярным*, если $a = 0$, и *рекуррентным*, если $\rho = 0$.

Пусть $S = \{\zeta, \vartheta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ — почти контактная метрическая структура на многообразии M^{2n+1}, $n > 1$ (см. [4]), где Φ — эндоморфизм модуля $\mathcal{X}(M)$, называемый структурным эндоморфизмом, ϑ — дифференциальная 1-форма на M, называемая контактной формой, ζ — вектор на M, называемый характеристическим вектором. При этом

$$\vartheta(\zeta) = 1; \quad \vartheta \circ \Phi = 0; \quad \Phi(\zeta) = 0;$$
$$\Phi^2 = -\operatorname{id} + \vartheta \otimes \zeta; \quad \langle \Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \vartheta(X)\vartheta(Y).$$

Замечание 1. Если ξ — ненулевое векторное поле из $\mathcal{X}(M)$, то векторное поле $\eta = \Phi\xi$, очевидно, ортогонально полю ξ. В самом деле, $\langle\eta, \xi\rangle = \langle\Phi\xi, \xi\rangle = -\langle\xi, \Phi\xi\rangle = -\langle\eta, \xi\rangle$, а значит, $\langle\eta, \xi\rangle = 0$. В частности, векторные поля ξ и η линейно независимы.

Определение 3. Векторное поле $\xi \in \mathcal{X}(M)$ назовем *голоморфным*, если эндоморфизм Φ является ξ-инвариантным.

Теорема 2. *Торсообразующее векторное поле ξ на почти контактном метрическом многообразии M голоморфно тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_\xi(\Phi)X = a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi, \quad X \in \mathcal{X}(M). \tag{2}$$

Доказательство. Согласно рассуждениям в примере 3

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi(\Phi)X &= \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_{\Phi X}\xi + \Phi(\nabla_X\xi) = \\ &= \nabla_\xi(\Phi)X - \rho \circ \Phi(X) - a \circ \Phi(X)\xi + \Phi(\rho X) + \Phi(a(X)\xi) = \\ &= \nabla_\xi(\Phi)X - a \circ \Phi(X)\xi + \Phi(a(X)\xi) = \\ &= \nabla_\xi(\Phi)X - a(\Phi X)\xi + a(X)\Phi\xi; \end{aligned}$$

отсюда сразу же следует, что условие ξ-инвариантности $\mathcal{L}_\xi(\Phi)X = 0$ равносильно справедливости тождества (2). □

Теорема 3. *Голоморфное торсообразующее векторное поле ξ на почти контактном метрическом многообразии M спецконциркулярно тогда и только тогда, когда справедливо тождество*

$$\nabla_\xi(\Phi)X = 0, \quad X \in \mathcal{X}(M). \tag{3}$$

Доказательство. Согласно теореме 2 семейство всех голоморфных векторных полей на многообразии M полностью определяется тождеством (2), а значит, его подсемейство — семейство спецконциркулярных векторных полей (у которых по определению $a = 0$) определяется тождеством (3).

Обратно, пусть на многообразии M выполнены тождества (2) и (3). Вычитая почленно одно тождество из другого, получим:

$$a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi = 0, \quad X \in \mathcal{X}(M). \tag{4}$$

Поскольку векторные поля ξ и $\Phi\xi$ линейно независимы, то в (4) коэффициенты при них равны нулю. В частности, $a(X) = 0$ и, в силу произвола $X \in \mathcal{X}(M)$, $a = 0$. Следовательно, поле ξ — спецконциркулярное. □

Определение 4. Торсообразующее векторное поле $\xi \in \mathcal{X}(M)$ назовем *абсолютно торсообразующим*, если векторное поле $\Phi\xi$ является псевдоторсообразующим с теми же определяющими элементами.

Теорема 4. *Пусть M — почти контактное метрическое многообразие, допускающее торсообразующее векторное поле ξ. Тогда векторное поле ξ будет абсолютно торсообразующим тогда и только тогда, когда выполняется тождество*

$$\nabla_X(\Phi)\xi = 0, \quad X \in \mathcal{X}(M). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть ξ — торсообразующее векторное поле на почти контактном метрическом многообразии M. Введем обозначение $\Phi\xi = \eta$. Тогда

$$\begin{aligned}
\nabla_X\eta = \nabla_X(\Phi\xi) &= \\
&= \nabla_X(\Phi)\xi + \Phi\nabla_X\xi = \\
&= \nabla_X(\Phi)\xi + \Phi(a(X)\xi + \rho X) = \\
&= \nabla_X(\Phi)\xi + a(X)(\Phi\xi) + (\rho \circ \Phi)X = \\
&= \nabla_X(\Phi)\xi + a(X)\eta + (\rho \circ \Phi)X.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что векторное поле ξ — абсолютно торсообразующее тогда и только тогда, когда $\nabla_X(\Phi)\xi = 0$. □

3. Торсообразующие векторные поля на основных классах почти контактных метрических многообразий. Приведем рассматриваемые классы почти контаткных метрических структур вместе с определяющими их тождествами [1,3,4,6,14,15]:

(a) косимплектические структуры: $\nabla_X(\Phi)Y = 0$;
(b) слабо косимплектические структуры: $\nabla_X(\Phi)X = 0$;
(c) сасакиевы структуры: $\nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y\rangle\zeta - \vartheta(Y)X$;
(d) приближенно сасакиевы структуры: $\nabla_X(\Phi)X = \langle X, X\rangle\zeta - \vartheta(X)X$;
(e) структуры Кенмоцу: $\nabla_X(\Phi)Y = \langle\Phi X, Y\rangle\zeta - \vartheta(Y)\Phi X$;
(f) обобщенные структуры Кенмоцу: $\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = -\vartheta(Y)\Phi X - \vartheta(X)\Phi Y$;
(g) контактные структуры: $d\eta = 2\Omega$;
(h) K-контактные структуры: $\nabla_X(\eta)Y = \Omega(X, Y)$;
(i) нормальные структуры:

$$\nabla_{\Phi X}(\Phi)Y - \nabla_{\Phi Y}(\Phi)X - \Phi\nabla_X(\Phi)Y + \Phi\nabla_Y(\Phi)X + (\nabla_X(\eta)Y - \nabla_Y(\eta)X)\xi = 0.$$

Теорема 5. *Пусть M — косимплектическое многообразие, $\xi \in \mathcal{X}(M)$ — торсообразующий вектор. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *ξ — абсолютно торсообразующий вектор;*
(ii) *ξ — голоморфный вектор;*
(iii) *ξ — спецконциркулярный вектор.*

Доказательство. Поскольку M — косимплектическое многообразие, $\nabla_X(\Phi)Y = 0$ для всех $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ (см. [4]). Из теоремы 4 следует, что ξ — абсолютно торсообразующий вектор. Соотношение (2) выполняется в этом случае при $a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi = 0$; $X \in \mathcal{X}(M)$. В силу линейной независимости векторов ξ и $\Phi\xi$ $a(X) = 0$, значит, ξ — спецконциркулярное векторное поле. Соотношение (2) в этом случае выполняется тождественно и по теореме 2 ξ — голоморфное векторное поле. □

Теорема 6. *Векторное поле на слабо косимплектическом многообразии спецконциркулярно тогда и только тогда, когда оно абсолютно торсообразующее.*

Доказательство. Пусть ξ — абсолютно торсообразующее векторное поле на слабо косимплектическом многообразии M. Поскольку оно абсолютно торсообразующее, то по теореме 4 $\nabla_X(\Phi)\xi = 0$. Из кососимметричности этого соотношения следует $\nabla_\xi(\Phi)X = 0$. Соотношение (2) выполняется в этом случае при $a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi = 0$; $X \in \mathcal{X}(M)$. В силу линейной независимости векторов ξ и $\Phi\xi$ $a(X) = 0$, значит, ξ — спецконциркулярное векторное поле.

Обратно, пусть ξ — спецконциркулярное векторное поле на слабо косимплектическом многообразии M. Тогда по теореме 3: $\nabla_\xi(\Phi)X = 0$. Из кососимметричности этого соотношения следует, что $\nabla_X(\Phi)\xi = 0$, значит, ξ — абсолютно торсообразующее векторное поле. □

Теорема 7. *Голоморфное торсообразующее векторное поле на слабо косимплектическом многообразии спецконциркулярно.*

Доказательство. Пусть ξ — голоморфное торсообразующее векторное поле на слабо косимплектическом многообразии M. По теореме 2 справедливо

$$\nabla_\xi(\Phi)X = a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi, \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

По определению слабо косимплектического многообразия $\forall X \in \mathcal{X}(M)$ имеем $\nabla_X(\Phi)X = 0$, т.е.

$$\nabla_X(\Phi)\xi = -\nabla_\xi(\Phi)X, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

Поскольку на почти контактном метрическом многообразии имеет место тождество

$$\langle Y, \nabla_X(\Phi)Z\rangle + \langle \nabla_X(\Phi)Y, Z\rangle = 0; \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M),$$

то, положив в данном тождестве $Z = Y$, получим

$$\langle Y, \nabla_X(\Phi)Y\rangle = 0, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Тогда для голоморфного торсообразующего векторного поля ξ имеем

$$\langle \xi, \nabla_X(\Phi)\xi\rangle = 0, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M),$$

а значит,

$$\langle \xi, \nabla_\xi(\Phi)X\rangle = 0, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M),$$

т.е.

$$a(\Phi X)\langle \xi, \xi\rangle - a(X)\langle \Phi\xi, \xi\rangle = 0, \quad X \in \mathcal{X}(M),$$

или

$$a(\Phi X)\langle \xi, \xi\rangle = 0, \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

Отсюда имеем $a = 0$, т.е. голоморфное торсообразующее векторное поле на слабо косимплектическом многообразии является спецконциркулярным. □

Следствие 1. *Голоморфное торсообразующее векторное поле на точнейше косимплектическом многообразии спецконциркулярно.*

Теорема 8. *Голоморфное торсообразующее векторное поле на многообразии Сасаки спецконциркулярно.*

Доказательство. Пусть ξ — голоморфное торсообразующее векторное поле на сасакиевом многообразии M, тогда

$$\nabla_\xi(\Phi)X = \langle \xi, X\rangle \zeta - \vartheta(X)\xi,$$

и по теореме 2 имеем

$$\langle \xi, X\rangle \zeta - \vartheta(X)\xi = a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi.$$

Умножим последнее скалярно на ξ, получим

$$\langle \xi, X\rangle\langle \zeta, \xi\rangle - \vartheta(X)\langle \xi, \xi\rangle = a(\Phi X)\langle \xi, \xi\rangle - a(X)\langle \Phi\xi, \xi\rangle,$$

т.е.

$$\langle \xi, X\rangle\vartheta(\xi) - \vartheta(X)\langle \xi, \xi\rangle = a(\Phi X)\langle \xi, \xi\rangle.$$

Положим $X = \xi$, тогда из последнего равенства получим $a(\Phi\xi) = 0$. В этом случае возможны два варианта: $\Phi\xi = 0$ или $a = 0$.

Если $\Phi\xi = 0$, тогда $\zeta \parallel \xi$, а значит, $\nabla_\xi(\Phi)X = \langle \xi, X\rangle\zeta - \vartheta(X)\xi = 0$, т.е. ξ — спецконциркулярное, согласно теореме 3.

Если $a = 0$, то ξ — спецконциркулярное.

Таким образом, голоморфное торсообразующее векторное поле на многообразии Сасаки спецконциркулярно. $\square$

Теорема 9. *Многообразие Сасаки не допускает абсолютно торсообразующих векторных полей.*

Доказательство. Пусть ξ — абсолютно торсообразующий вектор на многообразии Сасаки M. По теореме 4 $\nabla_X(\Phi)\xi = 0$. С другой стороны, хорошо известно, что на многообразии Сасаки справедливо тождество

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y\rangle\zeta - \vartheta(Y)X.$$

В частности, при $Y = \xi$ имеем:

$$0 = \nabla_X(\Phi)\xi = \langle X, \xi\rangle\zeta - \vartheta(\xi)X.$$

Обозначим через η форму, заданную формулой $\eta(X) = \langle X, \xi\rangle$; тогда предыдущее равенство можно записать как

$$\eta(X)\zeta - \vartheta(\xi)X = 0, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M),$$

т.е.

$$\eta \otimes \zeta - \vartheta(\xi)\,\mathrm{id} = 0 \quad \text{или} \quad \eta \otimes \zeta = \vartheta(\xi)\,\mathrm{id}\,.$$

Но это равенство невозможно, т. к. эндоморфизмы $\eta\otimes\zeta$ и id имеют разные ранги. Следовательно, предположение неверно, вектор ξ не может быть абсолютно торсообразующим. $\square$

Следствие 2. *K-контактное и контактное многообразия не допускают абсолютно торсообразующих векторных полей.*

Следствие 3. *Нормальные многообразия не допускают абсолютно торсообразующих векторных полей.*

Следствие 4. *Приближенно сасакиевы мноргобразия не допускают абсолютно торсообразующих векторных полей.*

Теорема 10. *Голоморфное торсообразующее векторное поле на приближенно сасакиевом многообразии спецконциркулярно.*

Доказательство. Пусть ξ — голоморфное торсообразующее векторное поле на приближенно сасакиевом многообразии M. Характеристическое тождество такого многообразия имеет вид
$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = 2\langle X, Y\rangle\zeta - \vartheta(X)Y - \vartheta(Y)X, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$
В этом тождестве положим $Y = \xi$, тогда
$$\nabla_X(\Phi)\xi + \nabla_\xi(\Phi)X = 2\langle X, \xi\rangle\zeta - \vartheta(X)\xi - \vartheta(\xi)X, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$
Согласно теореме 2 последнее равенство запишем в виде
$$\nabla_X(\Phi)\xi = -\{a(\Phi X) + \vartheta(X)\}\xi + a(X)\Phi\xi + 2\langle X, \xi\rangle\zeta - \vartheta(\xi)X, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$
Полученное равенство умножим скалярно на вектор ξ, тогда
$$\begin{aligned}\langle\nabla_X(\Phi)\xi, \xi\rangle &= -\{a(\Phi X) + \vartheta(X)\}\langle\xi, \xi\rangle + a(X)\langle\Phi\xi, \xi\rangle + 2\langle X, \xi\rangle\langle\zeta, \xi\rangle - \vartheta(\xi)\langle X, \xi\rangle = \\ &= -\{a(\Phi X) + \vartheta(X)\}\|\xi\|^2 + 2\langle X, \xi\rangle\vartheta(\xi) - \vartheta(\xi)\langle X, \xi\rangle = \\ &= -\{a(\Phi X) + \vartheta(X)\}\|\xi\|^2 + \langle X, \xi\rangle\vartheta(\xi), \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).\end{aligned}$$
т.е.
$$-\{a(\Phi X) + \vartheta(X)\}\|\xi\|^2 + \langle X, \xi\rangle\vartheta(\xi) = 0, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$
В последнем тождестве положим $X = 0$, тогда получим $a(\Phi\xi) = 0$, т.е. $a = 0$. Таким образом, $\nabla_\xi(\Phi)X = 0$, $X \in \mathcal{X}(M)$. И согласно теореме 3 ξ является спецконциркулярным, т.е. голоморфное торсообразующее векторное поле на приближенно сасакиевом многообразии является спецконциркулярным. □

Теорема 11. *Голоморфное торсообразующее векторное поле на многообразии Кенмоцу является спецконциркулярным*

Доказательство. Пусть ξ — голоморфное торсообразующее векторное поле на многообразии Кенмоцу M. По теореме 2
$$\nabla_\xi(\Phi)X = a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi, \quad X \in \mathcal{X}(M).$$
С другой стороны, положив в определяющем тождестве многообразия Кенмоцу $X = \xi$, получим:
$$\nabla_\xi(\Phi)X = \langle\Phi\xi, X\rangle\zeta - \vartheta(X)\Phi\xi, \quad X \in \mathcal{X}(M).$$
Почленно вычитая первое тождество из второго, получим
$$a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi = \langle\Phi\xi, X\rangle\zeta - \vartheta(X)\Phi\xi, \quad X \in \mathcal{X}(M),$$
т.е.
$$a(\Phi X)\xi - \{a(X) - \vartheta(X)\}\Phi\xi - \langle\Phi\xi, X\rangle\zeta = 0, \quad X \in \mathcal{X}(M).$$
Полученное равенство умножим скалярно на ξ, тогда, с учетом равенства $\langle\Phi\xi, \xi\rangle = 0$, получим $a(\Phi X)\langle\xi, \xi\rangle = \langle\Phi\xi, X\rangle\langle\zeta, \xi\rangle$, $X \in \mathcal{X}(M)$. Если положить в полученном равенстве $X = \xi$, получим $a(\Phi\xi)\|\xi\|^2 = 0$. Отсюда получаем, что $a = 0$, а значит, векторное поле ξ спецконциркулярно. □

Замечание 2. Характеристический вектор структуры Кенмоцу является торсообразующим вектором с характеристической 1-формой $(-\vartheta)$ и единичной функцией ρ в силу тождества $\nabla_X\zeta = X - \vartheta(X)\zeta$.

Теорема 12. *Многообразие Кенмоцу не допускает абсолютно торсообразующих векторных полей.*

Доказательство. Пусть M — многообразие Кенмоцу, $\xi \in \mathcal{X}(M)$ — абсолютно торсообразующее векторное поле. Тогда на M выполнено тождество
$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle\Phi X, Y\rangle\zeta - \vartheta(Y)\Phi X.$$
Положив в этом тождестве $Y = \xi$, получим тождество
$$0 = \nabla_X(\Phi)\xi = \langle\Phi X, \xi\rangle\zeta - \vartheta(\xi)\Phi X.$$
Перепишем это тождество в форме
$$\eta(\Phi X)\zeta - \vartheta(\xi)\Phi X = 0, \quad X \in \mathcal{X}(M),$$

где $\eta(X) = \langle X, \xi\rangle$. Таким образом,

$$(\eta \circ \Phi) \otimes \zeta - \vartheta(\xi)\Phi = 0.$$

Как и в случае многообразий Сасаки, это равенство невозможно, так как эндоморфизмы $(\eta\circ\Phi)\otimes\xi$ и Φ имеют разные ранги. Следовательно, предположение неверно, т.е. векторное поле ξ не может быть абсолютно торсообразующим. □

Обобщенное многообразие Кенмоцу не допускает абсолютно торсообразующих векторных полей.

Теорема 13. *Голоморфное торсообразующее векторное поле на обобщенном многообразии Кенмоцу является спецконциркулярным*

Доказательство. Пусть ξ — голоморфное торсообразующее векторное поле на обобщенном многообразии Кенмоцу M. По определению обобщенного многообразия Кенмоцу

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = -\vartheta(Y)\Phi X - \vartheta(X)\Phi Y, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

В последнем тождестве положим $Y = \xi$, тогда получим

$$\nabla_X(\Phi)\xi + \nabla_\xi(\Phi)X = -\vartheta(\xi)\Phi X - \vartheta(X)\Phi\xi, \quad X \in \mathcal{X}(M). \tag{6}$$

С учетом теоремы 2 запишем

$$\nabla_X(\Phi)\xi = \{a(X) - \vartheta(X)\}\Phi\xi - a(\Phi X)\xi - \vartheta(\xi)\Phi X, \quad X \in \mathcal{X}(M). \tag{7}$$

Полученное равенство умножим скалярно на вектор ξ, тогда

$$\langle\nabla_X(\Phi)\xi, \xi\rangle = \{a(X) - \vartheta(X)\}\langle\Phi\xi, \xi\rangle - a(\Phi X)\langle\xi, \xi\rangle - \vartheta(\xi)\langle\Phi X, \xi\rangle \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

Поскольку $\langle\nabla_X(\Phi)\xi, \xi\rangle = 0$ (см. доказательство теоремы 7) и $\langle\Phi\xi, \xi\rangle = 0$, то

$$a(\Phi X)\langle\xi, \xi\rangle = -\vartheta(\xi)\langle\Phi X, \xi\rangle \quad X \in \mathcal{X}(M). \tag{8}$$

Теперь положим в тождестве (8) $X = \xi$, тогда получим $a(\Phi\xi)\langle\xi, \xi\rangle = 0$. Поскольку $\langle\xi, \xi\rangle \neq 0$, то $a(\Phi\xi) = 0$. Из последнего равенства следует два случая:

(i) если $a = 0$, то векторное поле ξ является спецконциркулярным;

(ii) если $\Phi\xi = 0$, тогда правая часть равенства (8) запишется в виде

$$-\vartheta(\xi)\langle\Phi X, \xi\rangle = \vartheta(\xi)\langle X, \Phi\xi\rangle = 0, \quad X \in \mathcal{X}(M),$$

т.е. $a(\Phi X)\langle\xi, \xi\rangle = 0$, $X \in \mathcal{X}(M)$. Поскольку $\langle\xi, \xi\rangle \neq 0$, то $a(\Phi X) = 0$, $X \in \mathcal{X}(M)$. А значит, $\nabla_\xi(\Phi)X = 0$, т.е. ξ — спецконциркулярное, согласно теореме 3. □

Пусть $S = \{\zeta, \vartheta, \Phi, g = \langle\cdot, \cdot\rangle\}$ — почти контактная метрическая структура на многообразии M. Обозначим через ω ковекторное поле, дуальное торсообразующему векторному полю ξ. Имеем:

$$\omega(Y) = \langle\xi, Y\rangle; \quad Y \in \mathcal{X}(M). \tag{9}$$

Применим к обеим частям оператор ∇_X, учитывая тот факт, что вектор ξ — торсообразующий, т.е. для него выполняется соотношение (1), получим:

$$\nabla_X(\omega)Y = \langle\nabla_X\xi, Y\rangle = \langle a(X)\xi, Y\rangle + \rho\langle X, Y\rangle.$$

С учетом (9) это выражение примет вид

$$\nabla_X(\omega)Y = a(X)\omega(Y) + \rho\langle X, Y\rangle; \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{10}$$

В частности, после альтернирования имеем:

$$d\omega(X, Y) = \nabla_X(\omega)Y - \nabla_Y(\omega)X = a(X)\omega(Y) - a(Y)\omega(X) = a \wedge \omega(X, Y).$$

Следовательно,

$$d\omega = a \wedge \omega. \tag{11}$$

Дифференциальное продолжение этого тождества имеет вид:

$$da \wedge \omega = 0. \tag{12}$$

Соотношение (11) показывает, что гиперраспределение на M, порожденное дифференциальной формой ω, инволютивно, значит, вполне интегрируемо. Тем самым доказана

Теорема 14. *Гиперраспределение на почти контактном метрическом многообразии, порожденное дифференциальной формой дуальной голоморфному торсообразующему векторному полю на этом многообразии, вполне интегрируемо.*

Замечание 3. Рассмотрим два класса торсообразующих полей, характеризуемых уравнениями $a = 0$ (спецконциркулярные векторные поля) и $da = 0$ (конциркулярные векторные поля) соответственно. Очевидно, первый класс входит во второй.

Особый интерес представляет случай $\omega = a$. Тогда из (11) вытекает, что $da = 0$, значит, ξ — конциркулярное векторное поле. Уравнение (10) в этом случае принимает вид

$$\nabla_X \omega = \omega \otimes \omega(Y) + \rho g. \tag{13}$$

Здесь ρ — гладкая функция на многообразии M, с необходимостью равная

$$\rho = \frac{1}{n}(\delta\omega - \|\omega\|^2),$$

где $\delta\omega = g^{ij}\omega_{i,j}$ — кодифференциал формы ω, $\|\omega\|$ — норма этой формы. Уравнение (13) было введено К. Яно в [20] и называется *уравнением Яно*. Укажем его геометрический смысл. Как показано выше, дифференциальная форма ω, дуальная торсообразующему векторному полю ξ, в случае ее совпадения с характеристической формой a замкнута и, значит, локально точна. Следовательно, существует открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ многообразия M, такое, что $\forall\alpha \in A$ существует $\sigma_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$, $\omega|_{U_\alpha} = d\sigma_\alpha$. Рассмотрим функции σ_α как определяющие функции локально конформного преобразования $g|_{U_\alpha} \to \tilde{g} = e^{2\sigma} \circ g|_{U_\alpha}$ метрики многообразия M. Тогда выполнимость уравнения Яно на многообразии M равносильно конциркулярности построенного нами локально конформного преобразования его метрики (напомним, что конформное преобразование метрики называется конциркулярным преобразованием, если оно любую геодезическую окружность переводит в геодезическую окружность). Заметим также, что эти рассуждения, очевидно, остаются в силе для любых римановых многообразий. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 15. *Торсообразующее векторное поле на римановом многообразии (в частности, AC-многообразии), дуальная 1-форма которого совпадает с характеристической 1-формой, является конциркулярным векторным полем и внутренним образом порождает конциркулярное локально конформное преобразование метрики этого многообразия.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абу-Салеем А., Рустанов А. Р., Харитонова С. В.* Свойства интегрируемости обобщенных многообразий Кенмоцу// Владикавк. мат. ж. — 2018. — *20*, № 3. — С. 4–20.
2. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
3. *Кириченко В. Ф.* О геометрии приближенно сасакиевых многообразий// Докл. АН СССР. — 1983. — *269*, № 1. — С. 24–29.
4. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — Одесса: Печатный Дом, 2013.
5. *Кириченко В. Ф., Кузаконь В. М.* О геометрии голоморфных торсообразующих векторных полей на почти эрмитовых многообразиях// Укр. мат. ж. — 2013. — *65*, № 7. — С. 1005–1008.
6. *Кириченко В. Ф., Кусова Е. В.* О геометрии слабо косимплектических многообразий// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 2. — С. 33–42.
7. *Кириченко В. Ф., Терпстра М. А.* О геометрии характеристического вектора $lcQS$-многообразия// Мат. заметки. — 2012. — *92*, № 6. — С. 864–871.
8. *Кручков Г. И.* Об одном классе римановых пространств// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1961. — № 1. — С. 103–128.
9. *Кузаконь В. М.* О голоморфности торсообразующих векторных полей на почти эрмитовых многообразиях// Укр. мат. ж. — 2015. — *67*, № 3. — С. 420–430.

10. *Микеш Й.* О конциркулярных векторных полях «в целом» на компактных римановых пространствах. — Одесса: Деп. в Укр. НИИНТИ 02.03.88. — № 615-Ук88..
11. *Терпстра М. А.* Инвариантность AC-структуры относительно торсообразующего вектора Риба// Изв. Пензенск. гос. пед. ин-та им. В. Г. Белинского. — 2011. — № 26. — С. 248–254.
12. *Широков П. А.* О сходящихся направлениях в римановых пространствах// Изв. физ.-мат. о-ва. — 1934/35. — № 7. — С. 77–88.
13. *Fijii M.* Some Riemannian manifolds admitting a concircular scalar field// Math. J. Okayama Univ. — 1973. — *16*, № 1. — P. 1–9.
14. *Goldberg S., Yano K.* Integrability of almost cosymplectic structures// Pac. J. Math. — 1969. — *31*, № 2. — P. 373–382.
15. *Kenmotsy K.* A class of almost contact Riemannian manifolds// Tôhoku Math. J. — 1972. — *24*, № 1. — P. 93–103.
16. *Kim In-Bae.* Special concircular vector fields in Riemannian manifolds// Hiroshima Math. J. — 1982. — *12*, № 1. — P. 77–91.
17. *Koyanagi T.* On a certain property of a Riemannian space admitting a special concircular scalar field// J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. — 1972. — *22*, № 3, 4. — P. 154–157.
18. *Takeno H.* Concircular scalar field in spherically symmetric spacetime, I// Tensor, N.S. — 1969. — *20*, № 2. — P. 167–176.
19. *Tandai K.* Riemannian manifold admitting more than $n-1$ linearly independent solutions of $\nabla^2\rho + c^2\rho g = 0$// Hokkaido Math. J. — 1972. — *1*, № 1. — P. 12–15.
20. *Yano K.* Concircular geometry, I–IV// Proc. Imp. Acad. Jpn. — 1940. — *16*, № 6. — P. 195–200, 354–360, 442–448, 505–511.

Рустанов Алигаджи Рабаданович
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
E-mail: `aligadzhi@yandex.ru`

Арсеньева Ольга Евгеньевна
Московский педагогический государственный университет
E-mail: `highgeom@yandex.ru`

Харитонова Светлана Владимировна
Оренбургский государственный университет
E-mail: `hcb@yandex.ru`