ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 94–99
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-94-99

УДК 514.76

ОБ АЛГЕБРЕ ЛИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ ЙОРДАНОВОЙ АЛГЕБРЫ БИЛИНЕЙНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

© 2023 г. А. Я. СУЛТАНОВ, М. В. ГЛЕБОВА

Аннотация. Установлена размерность алгебры Ли дифференцирований йордановой алгебры $\Im(\Phi)$ симметрической билинейной формы Φ над полем P, характеристики, отличной от 2.

Ключевые слова: алгебра Ли, йорданова алгебра, билинейная симметрическая форма, дифференцирование алгебры.

ON THE LIE ALGEBRA OF DERIVATIONS OF THE JORDAN ALGEBRA OF A BILINEAR SYMMETRIC FORM

© 2023 A. Ya. SULTANOV, M. V. GLEBOVA

Abstract. We find the dimension of the Lie algebra of derivations of the Jordan algebra $\Im(\Phi)$ of a symmetric bilinear form Φ over a field P with characteristic different from 2.

Keywords and phrases: Lie algebra, Jordan algebra, bilinear symmetric form, algebra derivation.

AMS Subject Classification: 14B05, 17B60

1. Йордановы алгебры. Пусть A — линейная алгебра над полем P с носителем W, причем характеристика поля P отлична от 2.

Определение 1. Алгебра A называется йордановой, если выполняются условия
$$xy = yx, \quad x^2(yx) = (x^2y)x$$
для всех $x, y \in A$ (см. [2]).

Пример йордановой алгебры можно получить, имея ассоциативную алгебру над полем P.

Пусть B — ассоциативная алгебра над полем P. Определим на носителе этой алгебры новую операцию умножения $*$ по формуле
$$x * y = \frac{1}{2}(xy + yx).$$
Получим линейную алгебру, которую обозначают через $B^{(+)}$. Новая операция $*$ удовлетворяет условиям определения йордановой алгебры.

Коммутативность умножения $x * y = y * x$ выполняется очевидным образом. Покажем, что условие $x^2(yx) = (x^2y)x$ также выполняется. Ассоциативность умножения в алгебре позволяет в выражении $(xy)z$ и $x(yz)$ обозначить символом xyz. Тогда
$$x * x = \frac{1}{2}(xx + xx) = xx, \quad y * x = \frac{1}{2}(yx + xy),$$
$$x^2 * (y * x) = \frac{1}{2}(x^2(y * x) + (y * x)x^2) = \frac{1}{4}(x^2yx + x^3y + yx^3 + xyx^2),$$

$$(x^2 * y) * x = \frac{1}{2}(x^2y + yx^2) * x = \frac{1}{4}(x^2yx + x^3y + yx^3 + xyx^2).$$

Отсюда заключаем, что

$$x^2(yx) = (x^2y)x.$$

Другим примером йордановой алгебры является йорданова алгебра симметрической билинейной формы. Опишем, как она строится.

Пусть V — векторное пространство над полем P, Φ — симметрическая билинейная форма, заданная на V со значениями в P. Поскольку поле P можно считать одномерным векторным пространством над этим же полем, построим стандартным образом прямое произведение $W = P \times V$. Пары (λ, x), где $\lambda \in P$, $x \in V$, можно представить как сумму $(\lambda, 0_\nu) + (0, x)$. Условимся использовать такие обозначения $(\lambda, 0_\nu) = \lambda(1, 0) = \lambda e_0$, $(0, x) = x$. Здесь $e_0 = (1, 0)$. Тогда $(\lambda, x) = \lambda e_0 + x$. Определим на векторном пространстве $P \times V$ операцию умножения формулой

$$(\lambda e_0 + x)(\mu e_0 + y) = ((\lambda\mu)e_0 + \Phi(x, y))e_0 + \lambda y + \mu x. \tag{1}$$

Эта операция является билинейной. Следовательно, векторное пространство $P \times V$ с введенными операциями является линейной алгеброй. Из определения операции умножения (1) следует, что она является коммутативной.

Покажем, что выполняется и второе условие определения йордановой алгебры.

Пусть $a = \lambda e_0 + x$, $b = \mu e_0 + y$. Тогда $a^2 = (\lambda^2 + \Phi(x, x))e_0 + 2\lambda x$. Поскольку $x = (-\lambda)e_0 + a$, то $a^2 = (\lambda^2 - 2\lambda^2)1 + 2\lambda a = (\Phi(x, x)) - \lambda^2) + 2\lambda a$. Далее, умножив обе части этого равенства на ba, получим

$$a^2(ba) = ((\Phi(x, x) - \lambda^2) + 2\lambda a)(ba). \tag{2}$$

Аналогично находим $(a^2b)a$:

$$(a^2b)a = ((\Phi(x, x) - \lambda^2)ba + 2\lambda(ab)a.$$

В силу коммутативности операции умножения, имеем $(ab)a = a(ab) = a(ba)$. Поэтому

$$(a^2b)a = ((\Phi(x, x) - \lambda^2)e_0 + 2\lambda a)(ba). \tag{3}$$

Из равенства (2) и (3) следует, что

$$(a^2b)a = (a^2b)a.$$

Таким образом, алгебра с носителем $W = P \times V$ и умножением, определенной формулой (1), является йордановой. Эта алгебра называется йордановой алгеброй симметрической билинейной формы Φ. Обозначим эту алгебру символом $\Im(\Phi)$.

2. Система линейных уравнений дифференцирований йордановой алгебры симметрической билинейной формы. В предыдущем параграфе было приведено определение йордановой алгебры, симметрической билинейной формы Φ, заданной на векторном пространстве V над произвольным полем P, характеристика которого не равна 2. В данном параграфе исследуем систему линейных уравнений дифференцирований йордановой алгебры симметрической билинейной формы.

Напомним основные понятия.

Определение 2. Линейный оператор D называется дифференцированием алгебры $A = (W, \varphi)$, если выполняется следующее условие

$$D(xy) = D(x)y + xD(y) \tag{4}$$

для любых $x, y \in A$.

Совокупность всех дифференцирований линейной алгебры A обозначается символом $\operatorname{Der} A$. На множестве $\operatorname{Der} A$ естественным образом вводится операция коммутирования по правилу

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

для всех $D_1, D_2 \in \operatorname{Der} A$.

Операция композиции над дифференцированиями, вообще говоря, не проводит к дифференцированию алгебры A, а операция коммутирования $(D_1, D_2) \to [D_1, D_2]$ приводит к дифференцированию алгебры A. Более того, пара $(\mathrm{Der}, [,])$ является алгеброй Ли и эта алгебра называется алгеброй Ли дифференцирований линейной алгебры A.

Выберем какой-нибудь базис алгебры A: $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ и для каждого дифференцирования $D \in \mathrm{Der}\, A$ образы $D(\varepsilon_i)$ базисных элементов разложим по элементам базиса $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$. Тогда получим $D(\varepsilon_i) = x_i^j \varepsilon_j$, $x_i^j \in P$. Учитывая, что $\varepsilon_i \varepsilon_j = C_{ij}^k \varepsilon_k$, где $C_{ij}^k \in P$, и называются структурными постоянными алгебры A, находим, что соотношение (4) в координатном представлении имеет вид

$$(C_{sj}^h \delta_i^k + C_{is}^h \delta_j^k - C_{ij}^k \delta_s^h) x_h^s = 0. \tag{5}$$

Эти соотношения представляют собой систему линейных однородных уравнений относительно переменных x_h^s.

Будем исследовать систему (5) применительно к йордановой алгебре $\Im(\Phi)$, построенной на векторном пространстве $W = P \times V$, предполагая, что симметрическая билинейная форма Φ ненулевая, а векторные пространства V — конечномерное, причем базис в пространстве V выбран таким образом, что относительно этого базиса матрица Φ имеет диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi_{12} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \Phi_{27} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

а диагональные элементы $\Phi_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, z)$. Этот базис обычно называют каноническим базисом симметрической билинейной формы Φ.

Таким образом, относительно канонического базиса $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ векторного пространства V имеем:

$$\Phi_{ii} = \Phi(e_i, e_i) \neq 0 \text{ для } i \in \{1, 2, \dots, z\},$$
$$\Phi_{i'i'} = \Phi(e_{i'}, e_{i'}) \neq 0 \text{ для } i' > z, \text{ (если такие индексы существуют)},$$
$$\Phi_{jk} = \Phi(e_j, e_k) \neq 0 \text{ для таких } j \neq k, \text{ что } i, k \in 1, 2, \dots, n.$$

Число ненулевых диагональных элементов матрицы симметрической формы Φ равно рангу этой формы. Известно, что ранг каждой билинейной формы, заданной над конечномерным векторным пространством, не зависит от выбора базиса.

Таким образом, на носителе $W = P \times V$ йордановой алгебры $\Im(\Phi)$ базисом будет уже набор $(e_0, e_1, \dots, e_n)$.

Отметим также, что размерность векторного пространства W равна $n+1$. Значит, ранг йордановой алгебры $\Im(\Phi)$ равен $n+1$. Тогда каждый вектор q из W можно представить единственным образом в виде $a = x^0 e_0 + x$, где $x \in V$.

Из определения операции умножения в $\Im(\Phi)$ имеем:

$$(x^0 e_0 + x)(y^0 e_0 + y) = (x^0 y^0 + \Phi(x, y)) e_0 + x^0 y + y^0 x.$$

Отсюда следует, в частности, что e_0 является единицей алгебры $\Im(\Phi)$. Действительно, учитывая, что $\Phi(0_V, y) = \Phi(y, 0_V) = 0_U$,

$$e_0(y^0 e_0 + y) = (1e_0 + 0_V)(y^0 e_0 + y) = (y^0 + \Phi(0_V, y)) e_0 + 1y + y^0 0_V = y^0 \varepsilon_0 + y.$$

В силу коммутативности операции умножения в алгебре Йордана $\Im(\Phi)$, $(y^0 e_0 + y) e_0 = y^0 e_0 + y$, для произвольного элемента $y^0 e_0 + y \in P \times V$.

Пусть D — произвольное дифференцирование йордановой алгебры $\Im(\Phi)$. Разложим элементы $D(e_0)$, $D(e_i)$, полученные действием дифференцирования D на базисные элементы, по элементам этого базиса

$$D(e_0) = x_0^0 + x_0^k e_k, \qquad D(e_i) = x_i^0 e_0 + x_i^k e_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Найдем условия, которым удовлетворительны координаты $x^{\alpha}_{\beta} \in P$, где $\alpha, \beta \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Дифференцируя соотношение $e_0 e_0 = e_0$, получим

$$D(e_0)e_0 + e_0 D(e_0) = D(e_0).$$

Поскольку e_0 — единица алгебры $\Im(\Phi)$, то это равенство примет вид:

$$D(e_0) + D(e_0) = D(e_0).$$

Отсюда $D(e_0) = 0$. Так как D — линейное отображение, то для любого скаляра $\lambda \in P$ или $D(\lambda e_0) = \lambda D(e_0) = 0$. Соотношение $D(e_0) = 0$ равносильно системе уравнений $x^0_i = 0$, $x^i_0 = 0$. Дифференцируя произведение $e_i e_j$ находим, что

$$D(e_i e_j) = D(e_i)e_j + e_i D(e_j).$$

Поскольку $e_i e_j = \Phi(e_i, e_j)e_0$, то $D(e_i, e_j) = 0$. Поэтому предыдущее равенство будет иметь вид

$$D(e_i)e_j + e_i D(e_j) = 0.$$

Подставив в эти соотношения разложение элементов $D(e_i)$ и $D(e_j)$, получим

$$(x^0_i e_0 + x^k_i e_k)e_j + e_i(x^0_j e_0 + x^k_j e_k) = 0. \tag{6}$$

Принимая во внимание определение операции умножения в алгебре $\Im(\Phi)$, соотношение (6) можно представить следующим образом

$$x^0_i e_j + x^k_i \Phi_{kj} e_0 + x^0_j e_j + x^k_j \Phi_{ik} e_0 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$x^0_i e_j + x^0_j e_i = 0, \tag{7}$$

$$x^k_i \Phi_{kj} + x^k_j \Phi_{ik} = 0. \tag{8}$$

В соотношениях (8) по индексу k ведется суммирование от 1 до n, и $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Из соотношения (7) при $i = j$ следуют равенства $2x^0_i e_i = 0$. Так как характеристика поля P отлична от 2, а e_i — базисные векторы, то $x^0_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Таким образом, в системе (5) применительно к йордановой алгебре $\Im(\Phi)$ мы выделили следующую подсистему линейных однородных уравнений

$$x^0_0 = 0; \qquad x^h_0 = 0; \qquad x^0_h = 0, \quad h \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Перейдем к исследованию системы (8). В силу выбора базиса специальным образом в алгебре $\Im(\Phi)$, имеем: $\Phi_{is} = 0$ для $i \leqslant r$ и $s > r$. Поэтому при этих условиях система (8) имеет следующую подсистему, равносильную системе: $x^i_s = 0$ $(i = 1, 2, \dots, r;\ s = r+1, \dots, n)$.

Пусть теперь $i \leqslant r$ и $j \geqslant m$. Тогда система (8) примет вид

$$x^i_j \Phi_{jj} + x^i_j \Phi_{ii} = 0. \tag{9}$$

В соотношениях (9) по i и по j нет суммирования. Положив в (9) $i = j$, получим $2x^i_j \Phi_{ii} = 0$. Отсюда, в силу того, что характеристика поля P отлична от 2 и $\Phi_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, следует, что $x^i_i = 0$ (по i нет суммирования) и $i = 1, 2, \dots, r$. Выберем переменные x^i_j $(j > ii,\ j \in \{1, 2, \dots, r\})$ в качестве базисных переменных. Тогда переменные x^i_j $(j > i)$ будут свободными. Поэтому ранг системы линейных однородных уравнений (9) будет равен $(r-1)r/2$.

Таким образом, система (5), определяющая координаты произвольного дифференцирования D йордановой алгебры $\Im(\Phi)$, равносильна следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{gathered} x^0_0 = 0; \qquad x^0_h = 0; \qquad x^i_i = 0; \\ x^i_j \Phi_{jj} + x^i_j \Phi_{ii} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n,\ i, j \in \{1, 2, \dots, r\}), \\ x^i_s = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r,\ s = r+1, \dots, n). \end{gathered} \tag{10}$$

Ранг ρ системы (10) равен

$$1 + 2n + r + \frac{(r-1)r}{2} + r(n-r).$$

Тогда размерность $\dim_P \operatorname{Der} \Im(\Phi)$ йордановой алгебры симметрической билинейной формы Φ равна $(n+1)^2 - \rho = n^2 - rn + (r-1)r/2$. Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Размерность алгебры Ли дифференцирований йордановой алгебры $\Im(\Phi)$ симметрической билинейной формы Φ ранга $r \geqslant 1$ над полем P характеристики, отличной от 2, равна*

$$n^2 - rn + \frac{(r-1)r}{2},$$

где n — размерность векторного пространства V над P, на котором задана билинейная форма Φ.

Следствиями этой теоремы являются следующие утверждения.

Следствие 1. *Если ранг симметрической билинейной формы Φ равен 1, то размерность алгебры Ли дифференцирований йордановой алгебры $\Im(\Phi)$ равна $n^2 - n$.*

Следствие 2. *Если ранг симметрической билинейной формы Φ равен n, то*

$$\dim_P \operatorname{Der} \Im(\Phi) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Найдем матрицу $M(D)$ произвольного дифференцирования D йордановой алгебры относительно базиса $(e_0, e_1, \dots, e_n)$, выбранным специальным образом, описанным в начале этого параграфа.

На основании соотношения (10) имеем, что матрица произвольного дифференцирования D из Der имеет следующий блочный вид

$$M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}1 \\ \}2 \\ \}n-r \end{matrix} \quad , \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_2^1 & \dots & x_r^1 \\ x_1^2 & 0 & \dots & x_2^r \\ x_1^r & x_2^r & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

M_2 — $(n-r) \times r$-матрица, M_3 — квадратная матрица порядка $n-r$ с произвольными элементами.

Рассмотрим случай, когда симметрическая билинейная форма — нулевая, т.е. $\Phi(x,y) = 0$, для всех $x, y \in V$. В этом случае операция умножения в йордановой алгебре $\Im(\Phi_0)$ заданная формулой

$$(x^0 e_0 + x)(y^0 e_0 + y) = (x^0, y^0) e_0 + y^0 x \tag{11}$$

для любых $x^0, y^0 \in P$, $x, y \in V$.

Пусть D — произвольное дифференцирование йордановой алгебры $\Im(\Phi)$, где Φ_0 — нулевая билинейная форма. Поскольку e_0 — единица этой алгебры, то $D(e_0) = 0$, следовательно,

$$0 = D(e_0) = x_0^0 e_0 + x_0^k e_k.$$

Отсюда $x_0^0 = 0$, $x_k = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Разложив $D(e_i)$ по базисным элементам $(e_0, e_1, \dots, e_n)$, получим $D(e_i) = x_k^0 e_0 + x_i^k e_k$. Тогда будут иметь место соотношения (7) и их следствие $x_k^0 = 0$. Условие (8) выполняется тождественно, так как $\Phi_{ij} = 0$. Поэтому компоненты дифференцирования D удовлетворяет следующей системе линейных однородных уравнений:

$$x_0^0 = 0, x^k = 0, \dots, x_k^0 = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Ранг этой системы равен $2n+1$. Поэтому размерность $n = \dim_P \Im(\Phi_0) = (n+1)^2 - (2n+1) = n^2$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Размерность алгебры Ли дифференцирования йордановой алгебры нулевой симметрической формы Φ_0 равна n^2, где $n = \dim_P V$.*

Поскольку ранг нулевой матрицы равен 0 [2], то формула $\dim_P \operatorname{Der} \Im(\Phi) = n^2 - rn + (r-1)r/2$ при $r = 0$ дает размерность алгебры дифференцирований йордановой алгебры с нулевой симметрической формы Φ_0. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Размерность алгебры Ли дифференцирований йордановой алгебры $\Im(\Phi)$ симметрической билинейной формы Φ над полем P, характеристики, отличной от 2, равна*

$$n^2 - rn + \frac{(r-1)r}{2},$$

где $n = \dim_P V$, $r = \operatorname{rank} \Phi$.

Вернемся снова к йордановой алгебре нулевой симметрической билинейной формы. Закон умножения (11) элементов этой алгебры дает, что алгебра $\Im(\Phi_0)$ ассоциативна и базисные элементы e_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют тождеству $e_i e_j = 0$. Таким образом, алгебра $\Im(\Phi_0)$ обладает базисом $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$, где e_0 — единица, а $e_i e_j = 0$. Отсюда следует, что подалгебра $I = \langle e_0, e_1, \ldots, e_n \rangle$ является идеалом алгебры $\Im(\Phi_0)$, причем факторалгебра $\Im(\Phi_0)/I$ изоморфна алгебре P. Следовательно, алгебра $\Im(\Phi_0)$ является алгеброй А. Вейля ширины n и высоты 1 [1].

Алгебре $\Im(\Phi_0)$ можно дать другую интерпретацию: алгебра $\Im(\Phi_0)$ изоморфна сумме Уитна n экземпляров алгебры дуальных чисел $P(\varepsilon) = \{\lambda\varepsilon_0 + \mu\varepsilon \mid \lambda, \mu \in P\}$, причем ε_0 — единица алгебры $P(\varepsilon)$, а $\varepsilon^2 = 0$. Эта алгебра в книге [3] называется алгеброй двойных чисел. В [3] рассматривается более широкий класс таких чисел — в них P является произвольным кольцом с единицей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В.* Пространства над алгебрами. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985.
2. *Жевланов К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.
3. *Картан А., Эйленберг С.* Гомологическая алгебра. — М.: ИЛ, 1960.

Султанов Адгам Яхиевич
Пензенский государственный университет
E-mail: `sultanovaya@rambler.ru`

Глебова Мария Владимировна
Пензенский государственный университет
E-mail: `mvmorgun@mail.ru`