



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 115–133
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-115-133

УДК 519.2:531/534

СПОНТАННАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ В МАРКОВСКИХ ЦЕПЯХ. III. АЛГОРИТМЫ МОНТЕ-КАРЛО

© 2023 г. В. В. УЧАЙКИН, Е. В. КОЖЕМЯКИНА

Аннотация. Третья (заключительная) часть обзора по моделированию спонтанной кластеризации коррелированных точечных множеств на основе статистики узлов марковских цепей. Посвященная вычислительным аспектам этой проблемы, она содержит краткое введение в метод статистического моделирования (метод Монте-Карло) и обстоятельное изложение специфики его применения к рассматриваемой задаче, включая решение интегральных уравнений Орнштейна—Цернике с устойчивым ядром Леви—Фельдгейма.

Приводятся необходимые сведения из теории негауссовых устойчивых распределений, описывается алгоритм моделирования 3-мерных векторов с симметричным устойчивым распределением, дается его обоснование, сопровождаемое графическим и табличным материалом. В заключении представлены результаты тестирования.

Первая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 220. — С. 125–144. Вторая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 221. — С. 128–147.

Ключевые слова: функция распределения, обратные функции, метод отказов, статистический вес, характеристические функции, устойчивые плотности, функционалы, аппроксимации, тестирование.

SPONTANEOUS CLUSTERING IN MARKOV CHAINS. III. MONTE CARLO ALGORITHMS

© 2023 V. V. UCHAIKIN, E. V. KOZHEMIKINA

ABSTRACT. The third (final) part of the review on the modeling of spontaneous clustering of correlated point sets based on the statistics of nodes of Markov chains. Dedicated to the computational aspects of this problem, it contains a brief introduction into the method of statistical modeling (Monte Carlo method) and a detailed presentation of the specifics of its application to the problem under consideration, including solving the Ornstein-Zernike equation with the Levy-Feldheim stable kernel.

The necessary information from the theory of non-Gaussian stable distributions is given, an algorithm for modeling 3-dimensional vectors with a symmetric stable distribution is described, its justification is given, accompanied by graphical and tabular material. In conclusion, the test results are presented.

The first part of this work: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 220. — P. 125–144. The second part of this work: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 221. — P. 128–147.

Keywords and phrases: cumulative distribution function, inverse functions, rejection method, statistical weight, characteristic functions, Levy-stable density, functionals, approximating, testing.

AMS Subject Classification: 65P40

1. Введение. *Однородная марковская цепь* в ее простейшем варианте представляет собой конечную или бесконечную последовательность случайных точек (*узлов цепи*) $X_1, X_2, \dots$ в некотором евклидовом пространстве, положение каждой из которых (в вероятностном смысле) связано с положением предыдущего узла условной вероятностью, называемой *вероятностью перехода* $P(X_n \in dx_n | X_{n-1} = x_{n-1})$ не зависящей от номера узла. Физической демонстрацией этого случайного процесса могут служить траектории нейтральных молекул в разреженном газе, нейтронов в ядерном реакторе, фотонов в рассеивающей среде. Геометрически, они представляют собой ломаные, состоящие из прямолинейных (в отсутствие внешнего поля, что мы и будем далее предполагать) независимых отрезков случайной длины (*свободные пробеги*) и направления. Точки соединения последовательных отрезков и представляют собой узлы марковской цепи, изображающие элементарные рассеяния (в них частицы скачкообразно меняют направления движения). Каждый элемент траектории рассеивающейся частицы — длина свободного пробега, угол рассеяния, энергия после рассеяния и т. п., характеризуется случайной величиной, имеющей известное распределение. Используя существующие алгоритмы получения на ЭВМ случайных чисел с произвольным распределением, можно получать случайные значения элементов траектории и тем самым — случайные реализации самих траекторий в веществе, эквивалентные (в статистическом смысле) траекториям реальных частиц. В силу этой эквивалентности рассматриваемый процесс можно считать моделированием случайного явления. Появление в 1950–1960-х гг. электронно-вычислительной техники сделало такое *статистическое моделирование* чрезвычайно популярным с закрепившимся за ним названием *метод Монте-Карло*. В этом разделе мы кратко очертим основные особенности этого метода, и приведем основные алгоритмы, специально разработанные для численного решения задач, поставленных в предшествующих частях нашего обзора [3, 4].

2. Случайные числа. Простейшими по свойствам являются случайные числа γ , плотность распределения которых $p_\gamma(x)$ на отрезке $[0, 1]$ числовой оси постоянна (и равна 1). Они называются *стандартными случайными числами*. Кодами генерации таких чисел оснащены все современные ЭВМ. Преобразованием стандартных случайных чисел можно получить случайные числа с любым заданным законом распределения. Существует два основных метода преобразования случайных чисел, часто используемых в комбинации друг с другом.

2.1. Метод функции распределения. Рассмотрим произвольную монотонно возрастающую функцию $F(x)$, удовлетворяющую условиям $F(a) = 0$, $F(b) = 1$ (рис. 1(а)). Включив генератор стандартных случайных чисел γ , получим последовательность их независимых реализаций $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ и преобразуем каждую из них по формуле $\gamma_i \mapsto \eta_i = F^{-1}(\gamma_i)$. На графике это соответствует случайному выбору точек γ_i на единичном отрезке оси ординат Oy и определению по кривой $y = F(x)$ соответствующих абсцисс. Чтобы найти распределение новых случайных чисел, выделим на оси Oy малый элемент Δy и построим на оси Ox соответствующий ему элемент $\Delta x = \Delta y / F'(x)$. В сериях из N испытаний в элемент Δy в среднем будет попадать $N\Delta y$ значений случайных чисел γ_i . Столько же значений η_i окажется и в элементе Δx . Стало быть, $P(\eta \in \Delta x) = \Delta y$, а плотность распределения вероятности новой случайной величины η

$$p_\eta(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(\eta \in \Delta x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Проинтегрировав обе части этого равенства по интервалу (a, x) , находим, что для генерирования случайных чисел с заданной плотностью $p_\eta(x)$ в качестве функции F в вышеприведенном алгоритме необходимо использовать *соответствующую функцию распределения*:

$$F(x) = \int_a^x p_\eta(x) dx.$$

Такое преобразование называется *методом функции распределения* (применяется также название *метод обратной функции*). Основной его недостаток в том, что далеко не всегда удается представить обратную функцию в удобном для вычислений виде.

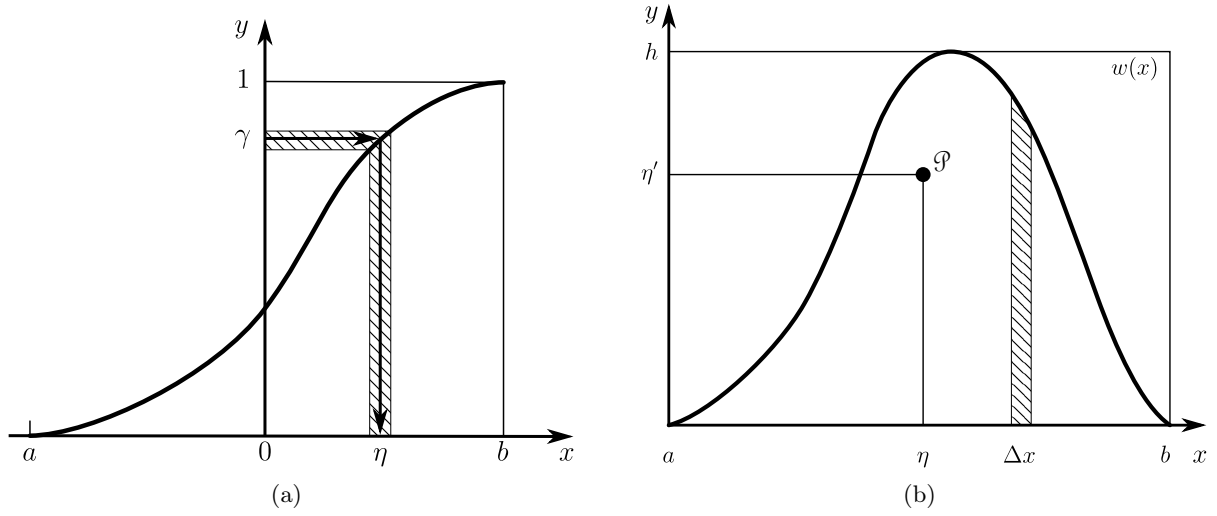


Рис. 1. Преобразование случайных чисел (а) методом функции распределения, (б) методом Неймана.

Приведем в качестве примера популярный алгоритм для получения случайных чисел η с экспоненциальной плотностью $p(x) = \exp(-x)$. В этом случае $F(x) = 1 - \exp(-x)$, и алгоритм их моделирования выражается формулой $\eta = -\ln(1 - \gamma)$ или эквивалентной ей $\eta = -\ln(\gamma)$ (случайные величины γ и $1 - \gamma$ имеют одинаковые распределения в одном и том же интервале $(0, 1)$).

2.2. Метод отказов. Другой популярный метод преобразования равномерно распределенных случайных чисел называют *методом отказов* или *методом Неймана*. Разобьем независимые случайные числа последовательности γ_i на пары (γ, γ') и преобразуем их в пары (η, η') по формулам

$$\eta = a + l\gamma, \quad \eta' = h\gamma',$$

где a , l и h — положительные постоянные. Пары чисел (η, η') можно считать координатами случайной точки $\mathcal{P}$ в прямоугольнике с основанием $l = b - a$ и высотой h (рис. 1(b)). Впишем в прямоугольник положительную функцию $w(x)$ и выделим из последовательности случайных точек $\mathcal{P}$ те, что оказались под кривой $w(x)$. Их абсциссы образуют случайную последовательность чисел η с распределением, вообще говоря, отличным от равномерного. Найдем плотность этого распределения.

Случайные точки $\mathcal{P}$ распределены в прямоугольнике равномерно, поэтому среднее число чисел η , полученных в серии из N испытаний, равно

$$N_\eta = (N/S)S_w, \quad (1)$$

где $S = lh$ — площадь прямоугольника,

$$S_w = \int_a^b w(x)dx$$

— площадь под кривой $w(x)$. Среднее число чисел η , попадающих в элемент Δx , пропорционально площади опирающейся на него элементарной трапеции:

$$N(\eta \in \Delta x) = (N/S)w(x)\Delta x.$$

Поэтому вероятность

$$P(\eta \in \Delta x) = N(\eta \in \Delta x)/N_\eta = [w(x)/S_w]\Delta x,$$

а плотность вероятности

$$p_\eta(x) = w(x) / \int_a^b w(x) dx, \quad a < x < b.$$

Таким образом, для получения случайных чисел с плотностью $p_\eta(x)$ в качестве *весовой* функции $w(x)$ следует использовать саму плотность $p_\eta(x)$ или функцию, отличающуюся от нее на постоянный множитель. Очевидно, часть полученных на первом этапе точек будет отброшена. Из рис. 1(b) видно, что при фиксированной $w(x)$ это число будет минимальным, если высоту прямоугольника h взять равной максимальному ее значению. Отношение среднего числа полученных значений η к среднему числу использованных случайных точек характеризует *эффективность метода*. Из (1) видно, что она равна S_w/S .

2.3. Гибридный метод. Эффективность метода Неймана в ряде случаев можно повысить, комбинируя его с методом функции распределения. Заметим, что число отброшенных точек (*отказов*) уменьшается, если их абсциссы выбирать не из равномерного распределения, а из распределения, близкого по форме к $w(x)$. Тогда случайные точки η будут чаще появляться в той части прямоугольника, где вероятность отказа меньше. Так, если плотность распределения можно представить в виде произведения двух функций $p(x)$ и $w(x)$, одна из которых (скажем, p) нормирована на единицу, то первый сомножитель можно использовать для выборки случайных чисел методом функции распределения, а второй сомножитель — в схеме отказов. Эффективность такого комбинированного метода

$$N_\eta/N = \frac{1}{h} \int_a^b p(x)w(x)dx.$$

Постоянную h следует брать равной максимальному на $[a, b]$ значению функции $w(x)$ (если такое существует):

$$h = \max w(x) = \max[p_\eta(x)/p(x)].$$

Легко видеть, что при $p(x) = p_\eta(x)$ эффективность гибридного метода становится равной единице, а сам он превращается в метод функции распределения. В другом предельном случае, когда $p(x) = 1/(b-a)$ (равномерное распределение), он совпадает с методом Неймана.

2.4. Моделирование марковской цепи. Рассмотрим случайное блуждание, представляемое марковской цепью в некотором фазовом пространстве, точки которого будем обозначать через x . Пусть $p_1(x)$ — плотность распределения первого узла цепи, $q(x)$ — вероятность обрыва цепи в очередном узле, зависящая от его координат x , $p(x \rightarrow x')dx'$ — переходная вероятность, нормированная (в отсутствие указания пределов интегрирования предполагается по всему фазовому пространству) на вероятность p_s выживания (то есть продолжения) цепи после узла в точке x :

$$\int p(x \rightarrow x')dx' = p_s(x) \equiv 1 - q(x).$$

Каждая реализация (траектория) такой цепи задается последовательностью ее узлов

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Будем говорить, что на множестве реализаций задан некоторый функционал, если каждой из них ставится в соответствие определенное число Q ,

$$Q = \Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $\{\Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ — заданная совокупность функций, характеризующая функционал. Математическое ожидание его (усредненное по статистическому ансамблю траекторий значение) записывается в виде

$$\langle \Phi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int dx_1 \dots \int dx_n p_1(x_1) p(x_1 \rightarrow x_2) \dots p(x_{n-1} \rightarrow x_n) q(x_n) \Phi_n(x_1, \dots, x_n). \quad (2)$$

Подынтегральные выражения в этих слагаемых содержат одинаковый сомножитель $p_1(x_1)$, что позволяет представить (2) в виде скалярного произведения

$$\langle \Phi_n \rangle = \overline{Q} \equiv \int dx_1 p_1(x_1) \overline{Q}(x_1) \quad (3)$$

двух функций: плотности распределения первого узла цепи $p_1(x_1)$ и условного математического ожидания функционала Q при фиксированном положении первого узла $\overline{Q}(x_1)$.

2.5. Функционалы рекуррентного типа. В работе [2] рассмотрен класс функционалов рекуррентного типа, определяемых свойствами

$$\Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = w(x_1) \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (4)$$

$$\phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi_1(x_1) + w(x_1, x_2) \phi_{n-1}(x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (5)$$

где $w(x)$, $w(x, x')$, $\phi_1(x)$ неотрицательные функции. Используя эти свойства, легко убедиться в справедливости равенства

$$\phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \phi_1(x_i) \prod_{j=1}^{i-1} w(x_j, x_{j+1}),$$

из которого, в частности, следует, что вклад отдельной реализации марковской цепи есть сумма вкладов $\phi_1(x_i)$ отдельных узлов, умноженных на величину

$$W_i(x_1, \dots, x_i) = w(x_1) \prod_{j=1}^{i-1} w(x_j, x_{j+1}),$$

называемую *статистическим весом*. Эту формулу удобно представить в виде рекуррентного соотношения

$$W_1(x_1) = w(x_1), \\ W_i(x_1, x_2, \dots, x_i) = w(x_{i-1}, x_i) W_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}).$$

Чтобы вывести уравнение для условных моментов, перепишем уравнения (4)–(5) в виде

$$\Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = w(x_1) \{ \phi_1(x_1) + [w(x_1, x_2)/w(x_2)] \Phi_{n-1}(x_2, x_3, \dots, x_n) \},$$

зафиксируем значения x_1 , x_2 и усредним это равенство по остальным переменным:

$$\overline{Q}(x_1, x_2) = w(x_1) \{ \phi(x_1) + [w(x_1, x_2)/w(x_2)] \overline{Q}(x_2) \}.$$

В результате для функции

$$\overline{q}(x) = \overline{Q}(x)/w(x)$$

получаем линейное интегральное уравнение

$$\overline{q}(x) = \phi_1(x) + \int dx' p(x \rightarrow x') w(x, x') \overline{q}(x'). \quad (6)$$

Положив $w(x, x') = 1$, а $\phi_1(x) = 1(x, A)$, мы приходим к уравнению для среднего числа узлов в области A фазового пространства от одной марковской цепи с переходной вероятностью $p(x \rightarrow x')$, первый узел которой находится в точке x . Чтобы найти решение этой задачи методом Монте-Карло, моделируют большое число независимых реализаций марковской цепи с заданным ядром и находят число узлов, принадлежащих A в каждой реализации. При выполнении условий центральной предельной теоремы среднее арифметическое этих значений будет приближаться к математическому ожиданию числа узлов, зависимость которого от положения первого узла цепи и описывается решением уравнения (6). Весовая функция $w(x, x')$ может служить регулятором качества алгоритма (времени счета и погрешности результата).

3. Устойчивые распределения вероятностей.

3.1. *Одномерные распределения.* Во второй части обзора [4] показано, сколь важную роль играют в нашей модели кластеризации устойчивые законы. В этом разделе мы подробнее остановимся на свойствах этого семейства. Наиболее популярным из них является нормальный закон, характеризующийся (в стандартизованных обозначениях семейства, см. [1]) плотностью

$$g^{(2)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

и характеристической функцией

$$\tilde{g}^{(2)}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} g(x; 2) dx = \exp(-k^2).$$

Чтобы найти характеристические функции остальных членов этого семейства, введем *вторую характеристику*

$$\psi^{(\alpha)}(k) = \ln \tilde{g}^{(\alpha)}(k),$$

для которой свойство устойчивости эквивалентно аддитивности

$$\psi^{(\alpha)}(c_1 k) + \psi^{(\alpha)}(c_2 k) = \psi^{(\alpha)}(ck),$$

где

$$c = (c_1^\alpha + c_2^\alpha)^{1/\alpha}.$$

Распространяя это соотношение на сумму произвольного числа n одинаково распределенных слагаемых ($c_1 = c_2 = \dots = c_n = 1$), получим

$$n\psi^{(\alpha)}(k) = \psi^{(\alpha)}(n^{1/\alpha}k).$$

Согласно свойству

$$\psi^{(\alpha)}(-k) = [\psi^{(\alpha)}(k)]^*$$

(здесь $*$ означает комплексное сопряжение) достаточно определить функцию $\psi^{(\alpha)}(k)$ для положительных значений аргумента $k > 0$. Учитывая ее непрерывность в окрестности начала координат и вытекающее из определения характеристической функции условие

$$\psi^{(\alpha)}(0) = 0,$$

приходим к равенству

$$|\psi^{(\alpha)}(k)| = \text{const} \cdot k^\alpha \quad (k > 0, \alpha > 0),$$

из которого следует, что

$$\psi^{(\alpha)}(k) = -k^\alpha [c_0 - ic_1].$$

Характеристическая функция удовлетворяет условию

$$|\tilde{g}(k)| \leq 1,$$

поэтому

$$\text{Re } \psi^{(\alpha)}(k) \leq 0,$$

и вещественная постоянная c_0 должна быть положительной. С другой стороны, из условия

$$\tilde{g}''(0) = -\langle S^2 \rangle$$

(здесь S — случайная величина с характеристической функцией $\tilde{g}(k)$) следует, что

$$[\psi^{(\alpha)}]''(0) = -\langle S^2 \rangle + \langle S \rangle^2 \equiv -DS \leq 0.$$

Вычислив вторую производную,

$$[\psi^{(\alpha)}(k)]'' = -[c_0 - ic_1]\alpha(\alpha - 1)k^{\alpha-2},$$

и устремив $k \rightarrow 0$, можно убедиться, что при $\alpha = 2$ дисперсия конечна (вследствие вещественности последней постоянная c_1 должна быть равна нулю), при $\alpha < 2$ она бесконечна (в этом

случае величина c_1 роли не играет), и при $\alpha > 2$ предельное значение производной равно нулю. Последнее означает, что второй момент функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x) dx = 0.$$

Для не сосредоточенного в нуле распределения это может означать только, что произведение $x^2 g(x)$ является знакопеременным, и, стало быть, $g(x)$ не является плотностью вероятности. Таким образом, область допустимых значений параметра α есть $(0, 2]$.

Постоянные c_0 и c_1 могут быть представлены в нескольких формах. В одной из них

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \beta \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2},$$

где второй вещественный параметр $\beta \in [-1, 1]$ характеризует асимметрию распределения. Таким образом, характеристическая функция одномерной устойчивой плотности на положительной полуоси имеет вид

$$\tilde{g}^{(\alpha, \beta)}(k) = \exp \left\{ -k^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \right] \right\}, \quad k > 0.$$

Аналогичные вычисления для отрицательной полуоси дают

$$\tilde{g}^{(\alpha, \beta)}(k) = \exp \left\{ -(-k)^\alpha \left[1 + i\beta \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \right] \right\}, \quad k < 0.$$

Объединяя эти формулы в одну, получим:

$$\tilde{g}^{(\alpha, \beta)}(k) = \exp \left\{ -|k|^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \operatorname{sign} k \right] \right\}, \quad -\infty < k < \infty.$$

Это стандартное представление устойчивой характеристической функции в форме A .

Часто используется представление в форме C , получаемое введением в показатель экспоненты масштабного множителя, подобранного таким образом, чтобы характеристическая функция приняла вид

$$\tilde{g}(k; \alpha, \theta) = \exp \left\{ -|k|^\alpha \exp \left[-i \frac{\theta\alpha\pi}{2} \operatorname{sign} k \right] \right\}.$$

Здесь $\alpha \in (0, 2]$ — характеристический показатель устойчивого закона, а $\beta \in [-1, 1]$ и $\theta \in [-\theta_\alpha, \theta_\alpha]$, $\theta_\alpha = \min\{1, 2/\alpha - 1\}$ — параметры асимметрии.

Задаваемые этими характеристическими функциями устойчивые случайные величины будем обозначать через $S^{(\alpha, \beta)}$ и $S(\alpha, \theta)$ соответственно.

3.2. Устойчивые распределения как предельные. Открытие Полем Леви класса устойчивых распределений, возможно, было одним из самых крупных событий в теории вероятностей XX века. Они освободили ЦПТ от ограничения, налагаемого требованием конечности дисперсии, и открыли возможность суммирования случайных величин с бесконечными дисперсиями. Оказалось, что если только существует невырожденное (не сосредоточенное в одной точке) предельное распределение нормированной суммы

$$\frac{1}{B_n} \left(\sum_{j=1}^n X_j - A_n \right)$$

при $n \rightarrow \infty$ и подходящим образом выбранных последовательностях A_n и $B_n > 0$, то это распределение *обязательно будет устойчивым*. При этом $B_n = h(n)n^{1/\alpha}$, где $h(n)$ — медленно меняющаяся функция (типа логарифма или какой-нибудь его степени), а α — характеристический показатель. Если для случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ можно подобрать такие A_n и B_n , то говорят, что X *принадлежит области притяжения устойчивого закона*. В противном случае она не принадлежит области притяжения никакого закона: *только устойчивые законы обладают областями притяжения*.

Чтобы проверить, принадлежит ли области притяжения случайная величина X , надо прежде всего вычислить дисперсию или просто второй момент $\langle X^2 \rangle$. Если он конечен, X находится

в области притяжения нормального закона. Если $\langle X^2 \rangle = \infty$, необходимо проверить асимптотику «хвостов» распределения X . Если оказывается, что

$$P(|X| > x) \sim h(x)x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

то ответ положителен, если же асимптотика имеет иной вид, ответ отрицательный. Мы ограничимся далее лишь случаем «нормального» (не путать с гауссовым!) притяжения, когда $h(x) \rightarrow \text{const} > 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Пусть теперь известно, что X принадлежит области притяжения устойчивого закона. Как узнать его параметры α и β (или θ)? Ответ на этот вопрос как раз и дает

Теорема (Обобщенная предельная теорема (ОПТ)). Пусть случайные величины X_j независимы, одинаково распределены и удовлетворяют условиям

$$P(X > x) \sim a_+ x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

$$P(X < -x) \sim a_- x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

$0 < \alpha \leq 2$, $a_+ \geq 0$, $a_- \geq 0$ и $a_+ + a_- > 0$. Тогда найдутся такие последовательности A_n и $B_n > 0$, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{B_n} \left(\sum_{j=1}^n X_j - A_n \right) \stackrel{d}{\sim} S^{(\alpha, \beta)},$$

где $\beta = (a_+ - a_-)/(a_+ + a_-)$.

Разумеется, существует бесконечное множество последовательностей нормирующих коэффициентов A_n , B_n с одним и тем же асимптотическим поведением при $n \rightarrow \infty$. В частности, они могут быть определены следующим образом ($a = \langle X \rangle$ и $c = a_+ + a_-$):

при $\alpha = 2$	$A_n = na$,	$B_n = \sqrt{cn \ln n}$,
при $\alpha \in (1, 2)$	$A_n = na$,	$B_n = (\pi cn / [2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)])^{1/\alpha}$,
при $\alpha = 1$	$A_n = \beta cn \ln n$,	$B_n = \pi cn / 2$,
при $\alpha \in (0, 1)$	$A_n = 0$,	$B_n = (\pi cn / [2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)])^{1/\alpha}$.

3.3. Свойства устойчивых распределений. Приведем важнейшие свойства одномерных устойчивых распределений (в форме С).

1. Все устойчивые плотности одновершинны.
2. Дисперсии всех устойчивых распределений, кроме гауссова, бесконечны.
3. Средние значения устойчивых распределений с показателем $\alpha \leq 1$ не существуют.
4. Устойчивые плотности удовлетворяют соотношению инверсии:

$$g(x; \alpha, \theta) = g(-x; \alpha, -\theta).$$

5. Устойчивые плотности удовлетворяют соотношению двойственности: при $\alpha \geq 1$

$$g(x; \alpha, \theta) = x^{-1-\alpha} g(x^{-\alpha}; \alpha', \theta'),$$

где $\alpha' = 1/\alpha$, $\theta' = \alpha(1 + \theta) - 1$.

6. В начале координат функция распределения

$$G(x; \alpha, \theta) = \int_{-\infty}^x g(x'; \alpha, \theta) dx',$$

плотность и ее производная имеют следующие значения:

$$G(0; \alpha, \theta) = (1 - \theta)/2,$$

$$g(0; \alpha, \theta) = \pi^{-1} \Gamma(1 + 1/\alpha) \cos(\theta\pi/2),$$

$$g'(0; \alpha, \theta) = (2\pi)^{-1} \Gamma(1 + 2/\alpha) \sin(\theta\pi).$$

7. Если плотность распределения $g(x; \alpha, \theta)$ не является *крайней* (то есть $\theta \neq \pm\theta_\alpha$), то оба ее хвоста спадают по закону $|x|^{-\alpha-1}$ («тяжелые хвосты»):

$$g(\pm|x|; \alpha, \theta) \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \sin \frac{\alpha(1 \pm \theta)\pi}{2} |x|^{-1-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty.$$

8. Для крайних плотностей, когда

$$\theta = \begin{cases} \pm 1, & \alpha < 1, \\ \pm(2/\alpha - 1), & \alpha > 1 \end{cases}$$

одна из приведенных выше формул теряет смысл: соответствующий хвост становится «коротким» с экспоненциально спадающей асимптотикой.

9. Как следует из формулы для $G(0; \alpha, \theta)$, положительным значениям коэффициента асимметрии θ соответствует сосредоточение большей доли вероятности на положительной полуоси, отрицательным значениям θ — на отрицательной полуоси. При $\alpha \leq 1$ $G(0; \alpha, 1) = 0$ и $G(0; \alpha, -1) = 1$, то есть крайние распределения становятся *односторонними*, сосредоточенными исключительно на положительной или отрицательной полуосях. При $\alpha \rightarrow 1$

$$G(x; \alpha, 1) \rightarrow G(x; 1, 1) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

и односторонние плотности становятся вырожденными:

$$g(x; 1, \pm 1) = \delta(x \mp 1).$$

10. Следующие устойчивые плотности представляются в элементарных функциях: распределение Гаусса

$$g(x, 2, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right),$$

распределение Коши

$$g(x, 1, 0) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

и распределение Леви—Смирнова

$$g(x, 1/2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x^3}} \exp\left(-\frac{x}{4}\right).$$

11. Трансформанта Меллина от плотности на положительной полуоси

$$g(s; \alpha, \theta) \equiv \int_0^\infty g(x; \alpha, \theta) x^s dx = \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s\alpha)}{\Gamma(\rho s)\Gamma(1-\rho s)}, \quad \rho = \frac{1+\theta}{2}.$$

12. Преобразование Лапласа односторонних распределений

$$g(\lambda; \alpha, 1) \equiv \int_0^\infty g(x; \alpha, 1) e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda^\alpha}, \quad \alpha \leq 1.$$

13. Характеристический показатель α в обеих формах А и С один и тот же, параметры асимметрии β и θ связаны формулой

$$\beta = \operatorname{tg} \frac{\theta\alpha\pi}{2} / \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2},$$

а сами случайные величины — соотношением

$$S(\alpha, \theta) \stackrel{d}{=} \left[\cos \frac{\theta\alpha\pi}{2} \right]^{1/\alpha} S^{(\alpha, \beta)}.$$

14. Удобство формы C , среди прочего, и в том, что при $\theta = 1$ и $\alpha \uparrow 1$, как это видно из свойства 12,

$$g(x; \alpha, 1) \rightarrow \delta(x - 1).$$

В форме A распределение вероятностей при этих условиях уходит на бесконечность.

Мы пришли к устойчивым распределениям, рассмотрев сначала L -процессы, затем — последовательности нормированных сумм независимых случайных величин, однако сами устойчивые (мы ограничиваемся везде лишь строго устойчивыми) распределения и определяемые ими случайные величины могут быть определены и непосредственно. Одно из таких определений имеет следующий вид.

15. Случайная величина S называется устойчивой с показателем $\alpha \in (0, 2]$, если для любого n

$$\sum_{j=1}^n S_j \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} S,$$

где S_j — не зависящие от S и друг от друга случайные величины с одним и тем же α -устойчивым распределением.

3.4. *Многомерные устойчивые распределения.* Понятие устойчивости в смысле Леви легко обобщается на случайные векторы и соответствующие им многомерные распределения.

Случайный вектор $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_d)$ называется устойчивым, если для любого n

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{S}_j \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} \mathbf{S}.$$

Характеристическая функция d -мерного устойчивого вектора имеет вид

$$\tilde{g}_d^{(\alpha, \Gamma)}(\mathbf{k}) = \exp \left\{ - \int_{S_d} |\mathbf{k}s|^\alpha \left[1 - i \operatorname{sign}(\mathbf{k}s) \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \right] \Gamma(ds) \right\},$$

где $\Gamma(ds)$ — конечная мера на сфере S_d единичного радиуса в рассматриваемом d -мерном пространстве, называемая *спектральной мерой*. Плотность

$$g_d^{(\alpha, \Gamma)}(\mathbf{x}) = g_d^{(\alpha, \Gamma)}(x_1, \dots, x_d) q \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dk_d e^{-i(k_1 x_1 + \dots + k_d x_d)} \tilde{g}^{(\alpha, \Gamma)}(k_1, \dots, k_d)$$

называется *многомерной устойчивой плотностью*.

Если спектральная мера равномерно распределена по сфере,

$$\Gamma(ds) = \operatorname{const} \cdot ds,$$

эта плотность изотропна. Определим стандартную характеристическую функцию изотропного распределения формулой

$$\tilde{g}_d^{(\alpha, \Gamma_0)}(\mathbf{k}) \equiv \tilde{g}_d(\mathbf{k}, \alpha) = \exp(-|\mathbf{k}|^\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 2.$$

Соответствующая ей плотность может быть представлена в виде однократного интеграла, содержащего функцию Бесселя:

$$g_d(\mathbf{x}, \alpha) = (2\pi)^{-d/2} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} J_{d/2-1}(s|\mathbf{x}|) s^{1-d/2} s^{d-1} ds.$$

Для первых трех размерностей имеем

$$g_1(x, \alpha) = \pi^{-1} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} \cos(s|x|) ds, \quad g_2(\mathbf{x}, \alpha) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} J_0(s|\mathbf{x}|) s ds,$$

$$g_3(\mathbf{x}, \alpha) = (2\pi^2|x|)^{-1} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} \sin(s|\mathbf{x}|) s ds.$$

Как и в одномерном случае, имеют место разложения в ряды:

$$g_d(\mathbf{x}, \alpha) \equiv g_d(r, \alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(r\sqrt{\pi})^d} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma((\alpha n + d)/2) \Gamma(\alpha n/2 + 1)}{\Gamma(n+1)} \sin \frac{\alpha n \pi}{2} \left(\frac{r}{2}\right)^{-\alpha n},$$

$$g_d(r, \alpha) = \frac{2}{\alpha} \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^d} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma((2/\alpha)n + d/\alpha)}{\Gamma(n + d/2) \Gamma(n+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}.$$

Первый из них является сходящимся при $\alpha \in (0, 1)$ и асимптотическим при $\alpha \in [1, 2)$, второй, напротив, сходится при $\alpha \in [1, 2]$ и является асимптотическим при $\mu \in (0, 1)$.

Если спектральная мера сосредоточена в точках пересечения осей со сферой, компоненты $S_1, \dots, S_d$ устойчивого вектора $\mathbf{S}$ взаимно независимы.

Два важных обстоятельства следует отметить здесь. Во-первых, изотропность распределения влечет за собой независимость компонент только в случае $\alpha = 2$. При $\alpha < 2$ компоненты изотропно распределенного вектора не являются независимыми, а распределение с независимыми компонентами не является изотропным. Во-вторых, ввиду расходимости дисперсии обычная корреляционная техника анализа статистической связи компонент при $\alpha < 2$ неприменима.

4. Изотропные векторы.

4.1. Радиальные функции. Трехмерный вектор $R = R\Omega$ называют изотропным, если модуль его R не зависит от единичного вектора направления Ω , а последний характеризуется изотропным (равномерным по полному телесному углу) распределением.

Между трёхмерным сферически симметричным и одномерным устойчивым законом существует следующее соотношение [1]

$$p_3^{(\alpha)}(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{dp_1^{(\alpha)}(x)}{dx} \Big|_{x=r}, \quad (7)$$

благодаря которому имеем

$$F(r) \equiv P(R < r) = 4\pi \int_0^r r^2 p_3^{(\alpha)}(r) dr, \quad r \geq 1. \quad (8)$$

Подставляя (7) в (8) и интегрируя по частям, имеем

$$F(r) = 2 \left[F_1(r) - r p_1^{(\alpha)}(r) - \frac{1}{2} \right], \quad (9)$$

где

$$F_1(r) = \int_{-\infty}^r p_1^{(\alpha)}(x) dx \quad (10)$$

— соответствующая одномерная функция распределения. Она может быть представлена в виде [14]

$$F_1(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\{-r^{\alpha/(\alpha-1)} V_\alpha(\varphi)\} d\varphi, & \alpha < 1, \\ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\{-r^{\alpha/(\alpha-1)} V_\alpha(\varphi)\} d\varphi, & \alpha > 1 \end{cases} \quad (11)$$

где

$$V_\alpha(\varphi) = \left(\frac{\sin(\alpha\varphi)}{\cos \varphi} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} \frac{\cos[(\alpha-1)\varphi]}{\cos \varphi}, \quad \alpha \neq 1, \quad x \geq 0.$$

Согласно уравнению (10) дифференцирование (11) по r приводит к интегральному представлению одномерной плотности распределения

$$p_1^{(\alpha)}(r) = \frac{\alpha r^{1/(\alpha-1)}}{\pi|1-\alpha|} \int_0^{\pi/2} V_\alpha(\varphi) \exp\{-r^{\alpha/(\alpha-1)} V_\alpha(\varphi)\} d\varphi. \quad (12)$$

Кроме этого, существует два представления в виде бесконечных рядов:

$$\begin{aligned} p_1^{(\alpha)}(r) &= \frac{1}{\pi r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \Gamma(1+k\alpha) r^{-k\alpha} \sin\left(\frac{\pi k\alpha}{2}\right), \\ p_1^{(\alpha)}(r) &= \frac{1}{\pi r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right) r^k \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Последнее может быть переписано в виде

$$p_1^{(\alpha)}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi\alpha} \Gamma\left(\frac{2k+1}{\alpha}\right) \frac{1}{(2k)!} r^{2k}. \quad (14)$$

Ряды (13) и (14) являются сходящимися в областях $\alpha \in (0, 1)$ и $\alpha \in (1, 2)$ соответственно, и асимптотическими для $x \rightarrow \infty$ (формула (13) для $\alpha \in (1, 2)$) и $x \rightarrow 0$ (формула (14) для $\alpha \in (0, 1)$).

Используя формулы (11)–(14), получаем следующие представления для функции распределения (9):

$$F(r) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1-\alpha)} \int_0^{\pi/2} [1-\alpha - \alpha r^{-\alpha/(1-\alpha)} V_\alpha(\varphi)] \exp\{-r^{-\alpha/(1-\alpha)} V_\alpha(\varphi)\} d\varphi, & \alpha < 1, \\ 1 - \frac{2}{\pi(1-\alpha)} \int_0^{\pi/2} [1-\alpha - \alpha r^{-\alpha/(1-\alpha)} V_\alpha(\varphi)] \exp\{-r^{-\alpha/(1-\alpha)} V_\alpha(\varphi)\} d\varphi, & \alpha > 1, \end{cases} \quad (15)$$

$$1 - F(r) = \frac{2}{\pi\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \Gamma(k\alpha + 2) \sin\left(\frac{\pi k\alpha}{2}\right) \frac{r^{-k\alpha}}{k}. \quad (16)$$

$$F(r) = \frac{4}{\pi\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \Gamma\left(\frac{2k+1}{\alpha}\right) \frac{k}{(2k+1)!} r^{2k+1}, \quad (17)$$

Заметим, что при $\alpha = 1$

$$F(r) = \frac{2}{\pi} \left[\arctg r - \frac{r}{1+r^2} \right]. \quad (18)$$

На рис. 2 показаны некоторые результаты численных расчётов для функции распределения, проведённых по формуле (15); рис. 3 демонстрирует вклады первых членов разложений (16)–(17) для малых и больших значений r .

4.2. Аппроксимация обратной радиальной функции. Один из путей моделирования переменной R с заданным распределением $F(r)$ основан на преобразовании стандартизованной (равномерно распределённой $[0, 1]$) случайной величины U по формуле

$$R = r(U),$$

где $r(x) = F^{-1}(x)$ есть обратная функция распределения. Удобно найти некоторое аппроксимирующее выражение для этой функции. Для решения этой проблемы были численно найдены значения обратной функции распределения и затем аналитически проанализировано её асимптотическое поведение при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 1$.

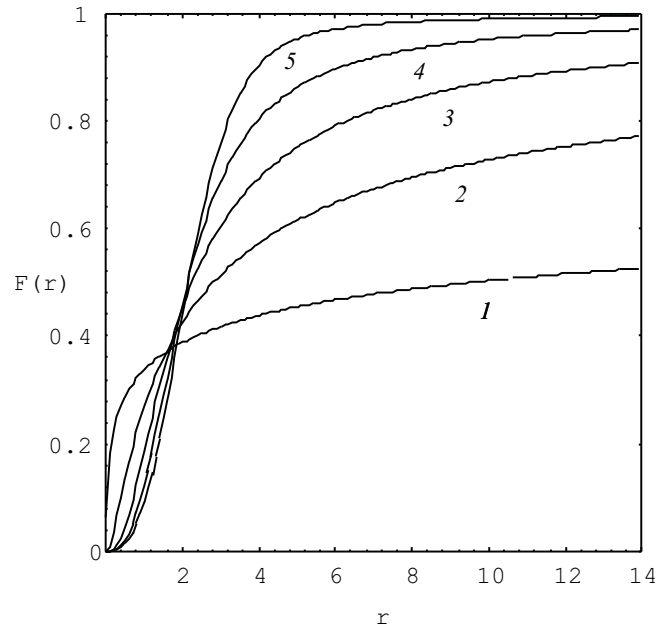


Рис. 2. Функция распределения $F(r)$ для различных значений показателя устойчивого закона $\alpha = 0,4, 0,6, 1,0, 1,4, 1,8$ (кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответственно).

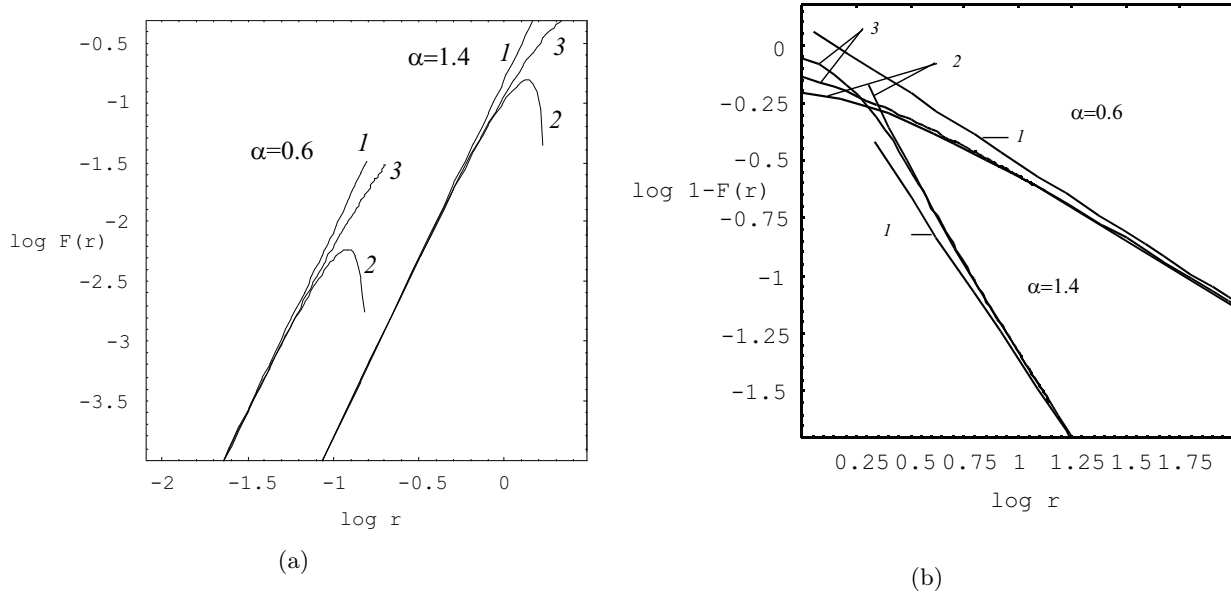


Рис. 3. Функция распределения $F(r)$ для $\alpha = 0,6, 1,4$: (а) на малых; (б) на больших расстояниях (кривые 3). Кривые 1, 2 относятся к одному и двум членам рядов (16) (рис. (а)) и (17) (рис. (б)) соответственно.

Согласно (17) мы можем записать следующее уравнение для обратной функции распределения $r_0(x)$ вблизи точки $x = 0$:

$$ar_0^3 - br_0^5 = x \quad (19)$$

где

$$a = \frac{2}{3\pi\alpha}\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right), \quad b = \frac{8}{5!\pi\alpha}\Gamma\left(\frac{5}{\alpha}\right).$$

Взяв

$$r_0^{(1)}(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{1/3} \quad (20)$$

как первое приближение и подставляя далее

$$r_0^{(2)}(x) = r_0^{(1)}(x) + r'(x)$$

в (19), получаем

$$r'(x) = \frac{x - (ar_0^{(1)3} - br_0^{(1)5})}{3ar_0^{(1)2} - 5br_0^{(1)4}}.$$

Тогда второе приближение имеет вид

$$r_0^{(2)}(x) = (x/a)^{1/3} + \frac{b(x/a)}{3a - 5b(x/a)^{2/3}}.$$

Чтобы избежать расходимости в точке, где знаменатель обращается в ноль, перепишем это выражение в другой приближительной форме:

$$r_0^{(2)}(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\frac{b}{a}\frac{x}{a} + \frac{5}{9}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{x}{a}\right)^{5/3}. \quad (21)$$

Для больших r основной член ряда (16) даёт первое приближение обратной функции распределения возле 1

$$r_1^{(1)}(x) = \left[\frac{B}{1-x}\right]^{1/\alpha},$$

где

$$B = \frac{2}{\pi\alpha}\Gamma(\alpha+2)\sin\frac{\pi\alpha}{2}.$$

Учёт второго члена в (16) приводит к следующему уравнению

$$1-x = \frac{2}{\pi\alpha}\left\{\Gamma(\alpha+2)\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)r^{-\alpha} - \Gamma(2\alpha+2)\sin(\pi\alpha)\frac{r^{-2\alpha}}{2}\right\}$$

или

$$Ar^{-2\alpha} - Br^{-\alpha} + 1 - x = 0$$

с коэффициентом

$$A = \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{2\pi\alpha}\sin(\pi\alpha),$$

который положителен для $\alpha < 1$, но меняет свой знак при переходе в область $\alpha > 1$. Поведение функций $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ проиллюстрировано на Рис. 4.

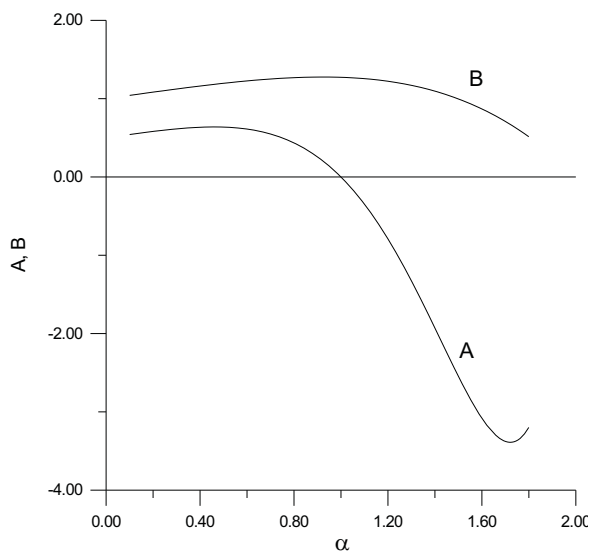
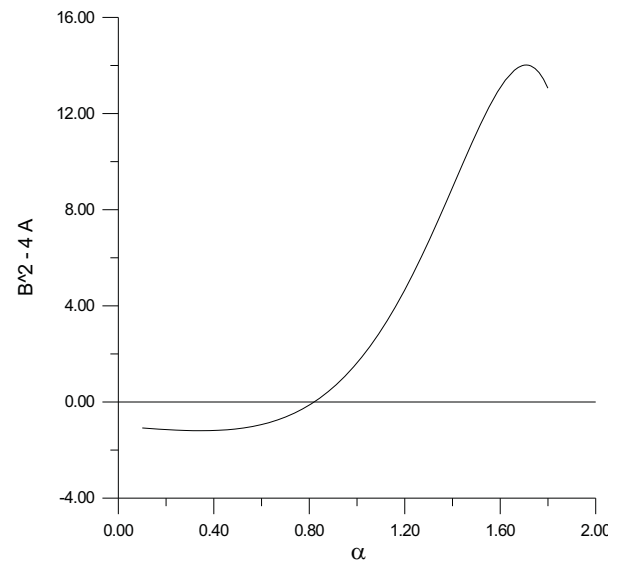
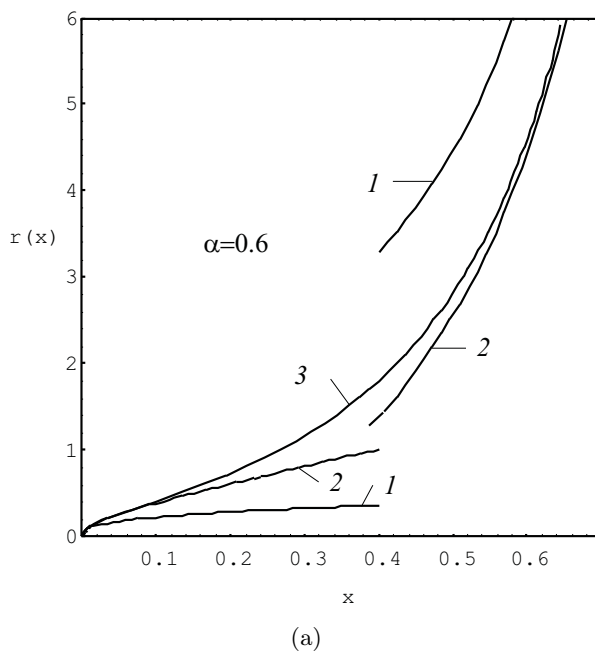
Для того, чтобы получить положительное решение уравнения

$$r^{-\alpha} = B/(2A) \pm \sqrt{(B/2A)^2 - (1-x)/A},$$

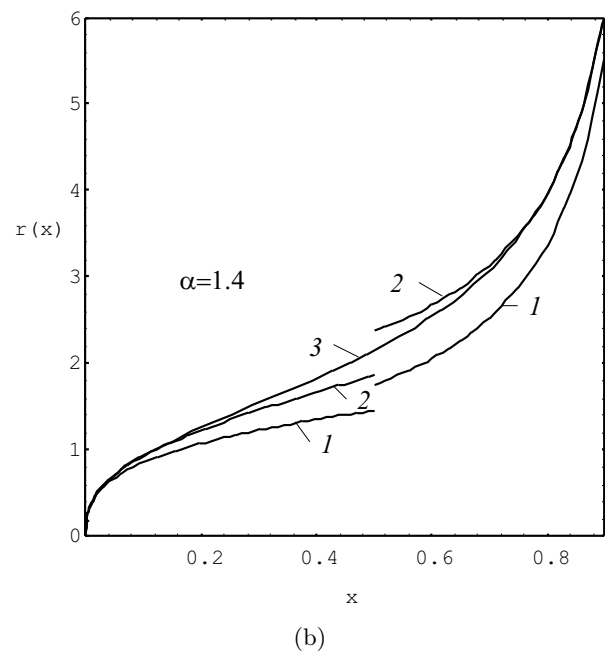
следует выбрать в нём знак $-$ для $\alpha < 1$ и $+$ для $\alpha > 1$. Таким образом, имеем

$$r_1^{(2)}(x) = \begin{cases} [\sqrt{(B/2A)^2 + (1-x)/A} - B/(2A)]^{-1/\alpha}, & \alpha > 1. \\ [B/(2A) - \sqrt{(B/2A)^2 - (1-x)/A}]^{-1/\alpha}, & \alpha < 1, \end{cases} \quad (22)$$

На рис. 6 показан вклад вышеописанных асимптотик в сравнении с точным решением, полученным путём численного обращения уравнения (15). Из графиков видно, что интервал применимости формулы второго приближения $r_1^{(2)}(x)$ значительно больше, чем у $r_1^{(1)}(x)$.

Рис. 4. Функции $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$.Рис. 5. Поведение функции $B^2 - 4A$ (см. подкоренное выражение в формуле (21)) в зависимости от показателя устойчивого закона α .

(a)



(b)

Рис. 6. Обратная функция распределения $r(x)$ (кривая 3) с соответствующими асимптотиками (кривые 1 — первое приближение, кривые 2 — второе приближение): (a) $\alpha=0,6$; (b) $\alpha=1,4$.

4.3. *Моделирование длины устойчивого вектора.* В основу алгоритма положена соответствующая аппроксимация обратной функции распределения $r(x)$. Начиная со случая $\alpha > 1$ мы можем записать желаемое представление для $r(x)$ в виде

$$r(x) = r_0^{(2)}(x) + \psi(x) + r_1^{(2)}(x),$$

где $\psi(x)$ должно быть найдено путём сравнения правой части уравнения с точным численным решением. Однако перед этим необходимо заметить, что слагаемое $\psi(x) + r_1^{(2)}(x)$ не должно менять асимптотического поведения $r(x)$ при $x \rightarrow 0$, которое даётся $r_0^{(2)}(x)$ (смотри формулу (21)), и обратно, слагаемое $r_0^{(2)}(x) + \psi(x)$ не должно влиять на асимптотику $r(x)$ при $x \rightarrow 1$ даваемую $r_1^{(2)}(x)$. Для того, чтобы эти условия удовлетворялись, мы выбираем вспомогательную функцию $\psi(x)$ в виде

$$\psi(x) = -r_1^{(2)}(0) - r_1^{(2)'}(0)x - xP_n^*(x),$$

где $r_1^{(2)'}(0)$ — производная от $r_1^{(2)}(x)$ в точке $x = 0$, и $P_n^*(x)$ — полином некоторой степени n . Принимая во внимание, что второй член суммы может быть включён в первый член полинома (звёздочка в этом случае не пишется), мы получаем окончательное выражение для $r(x)$ в виде

$$r(x) = r_0^{(2)}(x) + [r_1^{(2)}(x) - r_1^{(2)}(0)] - xP_n^{(\alpha)}(x), \quad \alpha > 1.$$

Вычисляя коэффициенты $c_0, \dots, c_n$ в выражении

$$xP_n^{(\alpha)}(x) = c_0x + c_1x^2 + \dots + c_nx^{n+1}$$

методом наименьших квадратов, мы нашли, что вполне приемлемая точность может быть достигнута и при использовании полиномов невысокого порядка.

Следует также отметить, что это представление не может быть непосредственно распространено на область $\alpha < 1$, поскольку $r_1^{(2)}(0)$ принимает комплексные значения для всех $\alpha < \alpha^*$ ($\alpha^* \approx 0,82$) (см. Рис. 5), но оказалось, что более простая аппроксимация

$$r(x) = r_0^{(1)}(x) + xr_1^{(1)}(x)P_n^{(\alpha)}(x), \quad \alpha < 1,$$

позволяет достигнуть в этой области желаемой точности. Однако интервал использования данной простой формулы также не может быть расширен на область $\alpha > 1$ без существенного роста степени полинома.

Тестирование предложенного алгоритма показало, что относительная ошибка представленной аппроксимации (рис. 7)

$$\delta(r) = (\tilde{p}_3(r) - p_3(r))/p_3(r)$$

не превышает 1% в плотности функции распределения R для всех значений α за исключением 0,2, 0,4, 0,5 и 1,8, где она превышает 2% только для малых значений r ($r < r_0$, $r_0 = 0,0014, 0,045, 0,0901$ и $0,574$ соответственно), величина вероятности для которых 0,02.

На рис. 8 представлены результаты статистического моделирования в сравнении с численными расчётами плотностей трёхмерных сферически симметричных устойчивых распределений для $\alpha = 0,5, 1,0, 1,5$. Видимое согласие подтверждает χ^2 -тест: для $\alpha = 0,5, 1,5$ использовался 51 интервал, каждый длиной 0,1 и 20000 и 50000 реализаций соответственно; для $\alpha = 1,0$ использовалось 76 интервалов, каждый длиной 0,1 и 50000 реализаций. Результаты вычислений при уровне значимости 0,01:

$$\begin{aligned} \chi^2_{\text{в}} &= 26,6 < \chi^2_{1-0,01}(51-1) \cdot 2 & (\alpha = 0,5); \\ \chi^2_{\text{в}} &= 44,4 < \chi^2_{1-0,01}(51-1) \cdot 6 & (\alpha = 1,5); \\ \chi^2_{\text{в}} &= 92,8 < \chi^2_{1-0,01}(76-1) = 6.4 & (\alpha = 1,0). \end{aligned}$$

Явные выражения для $P_n^{(\alpha)}(x)$ при $\alpha = 0,2(0,1)1,8$ представлены в Приложении.

5. Заключение. В процессе написания данного обзора пришлось обращаться к разным работам, и многие из них нашли отражение и в тексте, и в библиографическом перечне, однако связующим все три части обзора стержнем оставалась идея построения метода анализа неупорядоченных систем на перекрестке, условно выражаясь, трех проспектов: Орнштейна—Чернике, Леви—Фельдгейма и Монте-Карло. В определенном смысле, этим и объясняется наличие трех составных частей обзора. Начальные положения данного направления были изложены в работах В. В. Учайкина с соавторами 1997–1999 гг., представленных в монографии [14], за которой

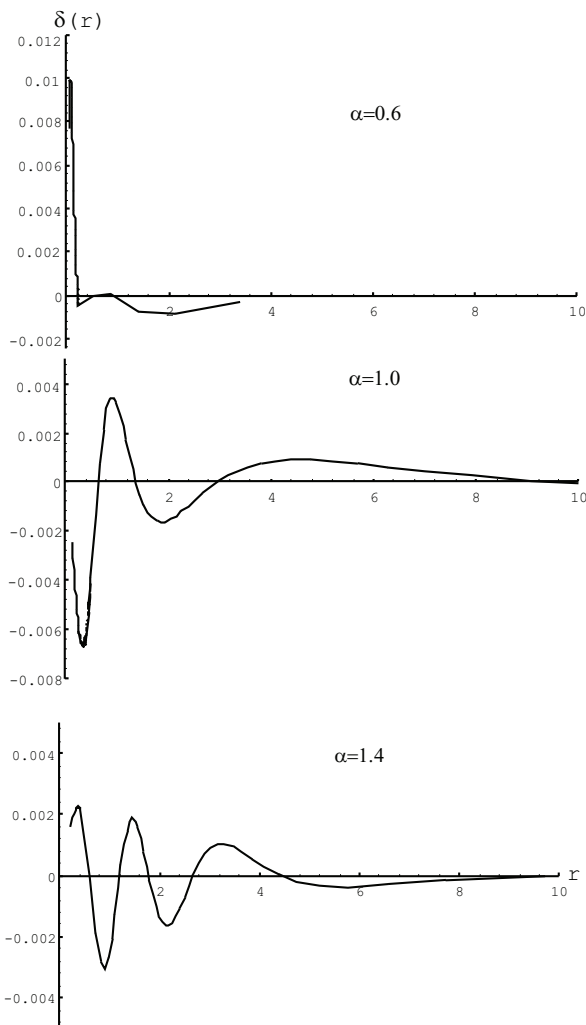


Рис. 7. Относительная ошибка δ в плотности распределения для значений $\alpha = 0,6, 1,0, 1,4$.

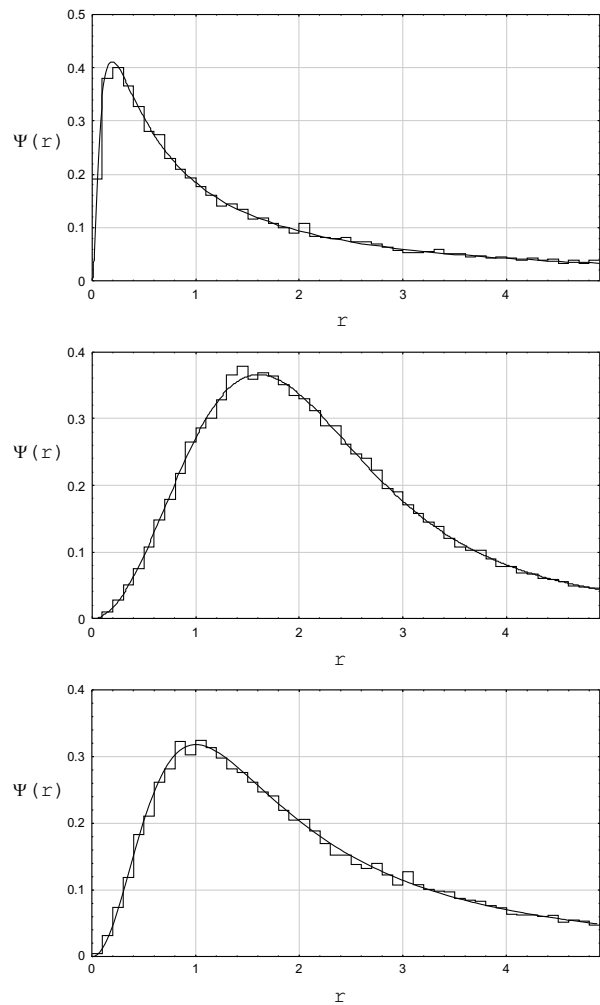


Рис. 8. Результаты статистического моделирования в сравнении с численными расчётами плотностей трёхмерных сферически симметричных устойчивых распределений для $\alpha = 0,5, 1,0, 1,5$.

последовали две работы В. В. Учайкина [7, 8], в одной из которых появился термин «мезофрактал», [5, 11], и др., связанные с космологической тематикой (главным образом, со статистикой крупномасштабного распределения галактик), и вплоть до недавних, совсем свежих работ с новыми соавторами [13] и относящихся уже к статистике межзвездной среды, по-прежнему допускающей мезофрактальную аппроксимацию спектра мощности турбулентных флуктуаций в виде анзаца Учайкина—Золотарева [14].

Представленный в этой, последней части обзора, алгоритм генерирования векторов из трёхмерных сферически симметричных устойчивых распределений основан на аппроксимации обратной функции распределения модуля вектора и позволяет моделировать устойчивые распределения с характеристическим показателем $\alpha = 0,2(0,1)1,8$ и погрешностью в плотности распределения менее одного процента при всех значениях α из указанного диапазона, за исключением граничных значений, где погрешность превышает два процента только в области малых r , на которую приходится вероятность менее 0,02.

Этот алгоритм эффективно использован в наших работах по моделированию кластерных форм крупномасштабных неоднородностей в распределении галактик во Вселенной [13] и в распределении молекулярных облаков в Галактике [12].

В данном обзоре мы ограничились стационарной постановкой задачи. Нестационарная теория развита в наших работах [9, 10].

6. Приложение. Собирая все вышеприведённые выражения для аппроксимирующей функции $r(x)$, получим

$$r(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{A}\right)^{1/3} + x \left[\frac{B}{1-x}\right]^{1/\alpha} P_n^{(\alpha)}(x), & \alpha \leq 1, \\ \left(\frac{x}{A}\right)^{1/3} + \frac{5}{9} \left(\frac{C}{A}\right)^2 \left(\frac{x}{A}\right)^{5/3} + g(x) - x P_n^{(\alpha)}(x), & \alpha > 1, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$A = \frac{2}{3\alpha\pi} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right), \quad B = \frac{2\Gamma(\alpha+2)}{\alpha\pi} \sin \frac{\alpha\pi}{2}, \quad C = \frac{8}{5!\alpha\pi} \Gamma\left(\frac{5}{\alpha}\right), \quad D = \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{\alpha\pi} |\sin(\alpha\pi)|,$$

$$g(x) = \left[\sqrt{\left(\frac{B}{D}\right)^2 + \frac{2(1-x)}{D}} - \frac{B}{D} \right]^{-1/\alpha} - \left[\sqrt{\left(\frac{B}{D}\right)^2 + \frac{2}{D}} - \frac{B}{D} \right]^{-1/\alpha},$$

$$x P_n^{(\alpha)}(x) = c_0 x + c_1 x^2 + \dots + c_n x^{n+1}.$$

$$\begin{aligned} P_3^{(0,2)}(x) &= 0,04310 + 0,47961x + 0,43761x^2 + 0,03968x^3, \\ P_3^{(0,3)}(x) &= 0,36633 + 0,68591x - 0,09155x^2 + 0,03931x^3, \\ P_2^{(0,4)}(x) &= 0,77792 + 0,27989x - 0,05781x^2, \\ P_2^{(0,5)}(x) &= 1,01155 + 0,09253x - 0,10407x^2, \\ P_2^{(0,6)}(x) &= 1,06878 + 0,14079x - 0,20957x^2, \\ P_2^{(0,7)}(x) &= 1,02330 + 0,28358x - 0,30687x^2, \\ P_2^{(0,8)}(x) &= 0,94223 + 0,39823x - 0,34046x^2, \\ P_3^{(0,9)}(x) &= 0,86897 + 0,43915x - 0,36207x^2 + 0,05395x^3, \\ P_3^{(1,0)}(x) &= 0,80193 + 0,44032x - 0,34080x^2 + 0,09855x^3, \\ P_3^{(1,1)}(x) &= 0,39456 + 3,54231x - 3,06908x^2 + 2,55379x^3, \\ P_3^{(1,2)}(x) &= 0,34583 + 2,37756x - 1,18707x^2 + 0,47064x^3, \\ P_3^{(1,3)}(x) &= 0,26378 + 1,95839x - 1,08096x^2 + 0,53840x^3, \\ P_3^{(1,4)}(x) &= 0,16540 + 1,84557x - 1,42423x^2 + 0,89226x^3, \\ P_3^{(1,5)}(x) &= 0,05993 + 1,96872x - 2,24189x^2 + 1,57409x^3, \\ P_5^{(1,6)}(x) &= 0,04606 + 1,59258x - 3,18405x^2 + 7,19358x^3 - 8,69865x^4 + 4,37779x^5, \\ P_6^{(1,7)}(x) &= 0,00210 + 0,84060x + 2,58118x^2 - 16,69826x^3 + 39,86698x^4 - 43,13309x^5 + 17,89178x^6, \\ P_9^{(1,8)}(x) &= -0,34685 + 6,66547x - 41,66960x^2 + 133,46730x^3 - 189,59325x^4 + 22,42745x^5 + \\ &\quad + 241,46185x^6 - 222,98818x^7 + 18,19747x^8 + 33,83475x^9. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарёв В. М. Одномерные устойчивые распределения. — М.: Наука, 1983.
2. Лаппа А. В., Кольчужкин А. М., Учайкин В. В. Интегральные уравнения для вероятностных характеристик функционалов, заданных на траекториях марковской цепи// в кн.: Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике (Марчук Г. И., ред.). — Новосибирск, 1974. — С. 114–121.
3. Учайкин В. В. Спонтанная кластеризация в марковских цепях I. Фрактальная пыль// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2023. — 220. — С. 125–144.
4. Учайкин В. В. Спонтанная кластеризация в марковских цепях II. Мезофрактальная модель// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2023. — 221. — С. 128–147.
5. Учайкин В. В., Коробко Д. А., Гисмятов И. Ф. Модифицированный алгоритм Мандельброта стохастического моделирования распределения галактик фрактального типа// Изв. вузов. Физ. — 1997. — 8. — С. 7–13.
6. Shanks T. Discriminating between models of galaxy clustering by statistical measures// Month. Not. Roy. Astron. Soc. — 1979. — 186. — P. 583–602.
7. Uchaikin V. V. If the universe were a Levy–Mandelbrot fractal// Gravit. Cosmology. — 2004. — 10. — P. 5–24.
8. Uchaikin V. V. The mesofractal Universe driven by Rayleigh–Levy walks// Gen. Rel. Gravit. — 2004. — 36, № 7. — P. 1689–1717.
9. Uchaikin V. V. Statistical mechanics of fragmentation-advection processes and monlinear measurements problem, I// Discont. Nonlin. Complex. — 2012. — 1, № 1. — P. 79–112.
10. Uchaikin V. V. Statistical mechanics of fragmentation-advection processes and monlinear measurements problem, II// Discont. Nonlin. Complex. — 2012. — 1, № 2. — P. 171–196.
11. Uchaikin V. V., Gusarov G. G. Levy flight applied to random media problems// J. Math. Phys. — 1997. — 38. — P. 2453–2464.
12. Uchaikin V. V., Kozhemyakin I. I. A mesofractal model of interstellar cloudiness// Universe. — 2022. — 8, № 5. — P. 249–262.
13. Uchaikin V. V., Litvinov V. A., Kozhemyakina E. V., Kozhemyakin I. I. A random walk model for spatial galaxy distribution// Mathematics. — 2021. — 9, № 1. — P. 1–17.
14. Uchaikin V. V., Zolotarev V. M. Chance and Stability. Stable Distributions and Their Applications. — Utrecht, The Netherlands: VSP, 1999.

Учайкин Владимир Васильевич
Ульяновский государственный университет
E-mail: vuchaikin@gmail.com

Кожемякина Елена Владиславовна
Ульяновский государственный университет
E-mail: elvk@mail.ru