ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 134–140
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-134-140

УДК 514.76

О КАНОНИЧЕСКОЙ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ КАРТАНА

© 2023 г. **Ю. И. ШЕВЧЕНКО, Е. В. СКРЫДЛОВА, А. В. ВЯЛОВА**

Аннотация. Проективная связность Картана преобразована к каноническому виду с помощью тензора деформации, который является расширенным тензором кручения. Тензор кривизны-кручения канонической проективной связности выродился в аналог тензора центропроективной кривизны. Проективная связность станет канонической лишь при аннулировании расширенного тензора кручения.

Ключевые слова: проективная связность Картана, тензор кривизны-кручения, тензор кручения, тензор аффинной кривизны-кручения, каноническая проективная связность.

ON CARTAN'S CANONICAL PROJECTIVE CONNECTION

© 2023 **Yu. I. SHEVCHENKO, E. V. SKRYDLOVA, A. V. VYALOVA**

Abstract. The projective Cartan connection is reduced to the canonical form using the deformation tensor, which is an extended torsion tensor. The curvature-torsion tensor of the canonical projective connection is degenerated into an analog of the centroprojective curvature tensor. The projective connection becomes canonical only when the extended torsion tensor vanishes.

Keywords and phrases: projective Cartan connection, curvature-torsion tensor, torsion tensor, affine curvature-torsion tensor, canonical projective connection.

AMS Subject Classification: 53B10

1. Введение. Проективная связность Картана, не являющаяся связностью в расслоении, до сих пор привлекает внимание. Обзор основных работ в этом направлении дал Ю.‘Г. Лумисте [6]. В настоящей статье продолжено исследование этого объекта.

Рассмотрены структурные уравнения проективной связности Картана, записанные в подробном виде. Из дифференциальных уравнений для компонент тензора кривизны-кручения следует, что этот тензор содержит тензоры кручения и аффинной кривизны-кручения. Рассмотрены особые случаи и сформулировано три утверждения относительно проективной группы, проективного пространства и типового слоя пространства проективной связности.

Структурные уравнения пространства проективной связности преобразованы к каноническому виду с помощью расширенного тензора кручения. Тензор кривизны-кручения канонической проективной связности вырождается в аналог тензора центропроективной (коаффинной) кривизны. Доказано, что проективная связность Картана и каноническая проективная связность совпадают лишь тогда, когда тензор расширенного кручения равен нулю.

2. Тензор кривизны-кручения и его подтензоры. Структурные уравнения пространства проективной связности Картана $P_{n,n}$, полученные в результате обобщения соответствующих уравнений проективной группы $GP(n)$ в неоднородной форме, имеют вид (см., например, [1,2,7,11,12]):

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + T^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \tag{1}$$

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \delta^i_j \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \tag{2}$$

$$d\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + R_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k, \tag{3}$$

причем индексы принимают следующие значения: $i, j, k, \ldots = \overline{1, n}$. Коэффициенты T^i_{jk}, R^i_{jkl}, R_{ijk} антисимметричны по двум последним индексам

$$T^i_{(jk)} = 0, \quad R^i_{j(kl)} = 0, \quad R_{i(jk)} = 0, \tag{4}$$

где круглые скобки обозначают симметрирование.

Утверждение 1. *Пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ есть специальное n-мерное гладкое многообразие B_n со структурными уравнениями* (1), *двукратное продолжение которых имеет вид* (2), (3), *поэтому формы ω^i называются базисными, а формы ω^i_j, ω_i — слоевыми формами.*

Дифференцируем квадратичные уравнения (1), (2), (3) внешним образом:

$$\begin{gathered}
\Big[\Delta T^i_{jk} + (T^i_{mk}T^m_{lj} - T^i_{jm}T^m_{kl} - R^i_{jkl})\omega^l\Big] \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0,\\
\Big[\Delta R^i_{jkl} - \delta^i_j T^m_{kl}\omega_m - T^i_{kl}\omega_j + (\delta^i_j R_{klm} + \delta^i_m R_{jkl} + 2R^i_{jpl}T^p_{mk})\omega^m\Big] \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0,\\
\Big[\Delta R_{ijk} + R^l_{ijk}\omega_l + (R_{imk}T^m_{lj} - R_{ijm}T^m_{kl})\omega^l\Big] \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0,
\end{gathered} \tag{5}$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta T^i_{jk} = dT^i_{jk} + T^l_{jk}\omega^i_l - T^i_{lk}\omega^l_j - T^i_{jl}\omega^l_k.$$

Разрешим кубичные уравнения (5) по лемме Лаптева [3, 4], вынесем базисные формы ω^i, применим лемму Картана, проальтернируем полученное по двум последним индексам и запишем результат:

$$\Delta T^i_{jk} = T^i_{jkl}\omega^l, \tag{6}$$

$$\Delta R^i_{jkl} - \delta^i_j T^m_{kl}\omega_m - T^i_{kl}\omega_j = R^i_{jklm}\omega^m, \tag{7}$$

$$\Delta R_{ijk} + R^l_{ijk}\omega_l = R_{ijkl}\omega^l. \tag{8}$$

Утверждение 2. *Объект $R = \{T^i_{jk}, R^i_{jkl}, R_{ijk}\}$ является тензором, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям* (6), (7), (8). *Тензор R, называемый тензором (проективной) кривизны-кручения пространства проективной связности $P_{n,n}$, содержит два подтензора: T^i_{jk} — тензор кручения и $\{R^i_{jkl}, T^i_{jk}\}$ — тензор аффинной кривизны-кручения* (см. [5, 8–10, 13]).

3. Обобщенные тождества Риччи. Подставим дифференциальные уравнения (6), (7), (8) в кубичные уравнения (5):

$$\begin{gathered}
\Big(T^i_{jkl} + T^i_{mk}T^m_{lj} - T^i_{jm}T^m_{kl} - R^i_{jkl}\Big)\omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0,\\
\Big(R^i_{jklm} + \delta^i_j R_{klm} + \delta^i_m R_{jkl} + 2R^i_{jpl}T^p_{mk}\Big)\omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^m = 0,\\
\Big(R_{ijkl} + R_{imk}T^m_{lj} + R_{imj}T^m_{kl}\Big)\omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0.
\end{gathered}$$

Следовательно, альтернированные по трем индексам коэффициенты при внешних произведениях базисных форм равны нулю

$$\begin{gathered}
T^i_{[jkl]} + T^i_{m[k}T^m_{lj]} + T^i_{m[j}T^m_{kl]} - R^i_{[jkl]} = 0,\\
R^i_{j[klm]} + \delta^i_j R_{[klm]} + R_{j[kl}\delta^i_{m]} + 2R^i_{jp[l}T^p_{mk]} = 0,\\
R_{i[jkl]} + R_{im[k}T^m_{lj]} + R_{im[j}T^m_{kl]} = 0.
\end{gathered}$$

Здесь учтено первое условие антисимметрии (4), а в квадратных скобках производится альтернирование по трем индексам. Поскольку в каждой квадратной скобке имеется антисимметрия по паре индексов, альтернирование можно заменить циклированием

$$T^i_{\{jkl\}} + 2T^i_{m\{j}T^m_{kl\}} - R^i_{\{jkl\}} = 0, \tag{9}$$

$$R^i_{j\{klm\}} + \delta^i_j R_{\{klm\}} + R_{j\{kl}\delta^i_{m\}} + 2R^i_{jp\{k}T^p_{lm\}} = 0, \tag{10}$$

$$R_{i\{jkl\}} + 2R_{im\{j}T^m_{kl\}} = 0, \tag{11}$$

где фигурные скобки обозначают циклирование по трем индексам.

Утверждение 3. *Компоненты тензора кривизны-кручения R проективной связности Картана и их пфаффовы производные T^i_{jkl}, R^i_{jklm}, R_{ijkl} удовлетворяют обобщенным тождествам Риччи* (9), (10), (11).

4. Пространства без кручения и без аффинной кривизны-кручения. Если в особом случае проективная связность не имеет кручения, то отсутствуют дифференциальные уравнения (6); становятся проще структурные уравнения (1), дифференциальные уравнения (7) и тождества Риччи (9), (10), (11); сохраняют вид уравнения (2), (3), (8):

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \tag{12}$$

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \delta^i_j \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + \mathring{R}^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \tag{13}$$

$$d\omega_i = \omega^j_i \wedge \omega_j + \mathring{R}_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k; \tag{14}$$

$$\Delta \mathring{R}^i_{jkl} = \mathring{R}^i_{jklm}\omega^m, \tag{15}$$

$$\Delta \mathring{R}_{ijk} + \mathring{R}^l_{ijk}\omega_l = \mathring{R}_{ijkl}\omega^l; \tag{16}$$

$$\mathring{R}^i_{\{jkl\}} = 0, \tag{17}$$

$$\mathring{R}^i_{j\{klm\}} + \delta^i_j \mathring{R}_{\{klm\}} + \mathring{R}_{j\{kl}\delta^i_{m\}} = 0, \tag{18}$$

$$\mathring{R}_{i\{jkl\}} = 0. \tag{19}$$

В этом случае компоненты объектов отмечены кружком.

Более того, когда отсутствует аффинная кривизна-кручение, уравнения (15), (17) пропадают, (13), (16), (18) становятся проще, (12), (14), (19) не меняют вид:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \tag{20}$$

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \delta^i_j \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i, \tag{21}$$

$$d\omega_i = \omega^j_i \wedge \omega_j + \dot{R}_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k; \tag{22}$$

$$\Delta \dot{R}_{ijk} = \dot{R}_{ijkl}\omega^l; \tag{23}$$

$$\delta^i_j \dot{R}_{\{klm\}} + \dot{R}_{j\{kl}\delta^i_{m\}} = 0, \tag{24}$$

$$\dot{R}_{i\{jkl\}} = 0. \tag{25}$$

В этом особенном случае над компонентами объектов поставлена точка.

Наконец, если весь тензор кривизны-кручения обращается в нуль: $R = 0$, то структурные уравнения (20), (21) сохраняют вид, а уравнения (22) становятся проще; дифференциальные уравнения (23) и тождества (24), (25) исчезают:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \tag{26}$$

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \delta^i_j \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i, \tag{27}$$

$$d\omega_i = \omega^j_i \wedge \omega_j. \tag{28}$$

Получили структурные уравнения Картана для проективной группы $GP(n)$ в неоднородной форме (см., например, [2]).

Утверждение 4. *В пространстве проективной связности без кручения $\mathring{P}_{n,n}$ тензор проективной кривизны-кручения R вырождается в тензор аналога центропроективной* (*коаффинной*) *кривизны* $\mathring{R} = \{\mathring{R}^i_{jkl}, \mathring{R}_{ijk}\}$*, содержащий подтензор аналога линейной кривизны* $\mathring{R}^i_{jkl}$*. В пространстве без аффинной кривизны-кручения* $\dot{P}_{n,n}$ *тензор* $\mathring{R}$ *превращается в тензор* $\dot{R}_{ijk}$*.*

5. Пространство проективной связности Картана как обобщение проективной группы. Сопоставим струкурные уравнения (1), (2), (3) и (26), (27), (28).

Утверждение 5. *Проективная группа* $GP(n)$ *является пространством проективной связности Картана без кривизны-кручения.*

Утверждение 6. *Если тензор кривизны-кручения* R *пространства проективной связности* $P_{n,n}$ *обращается в нуль:* $R = 0$*, то это пространство вырождается в проективную группу* $GP(n)$*.*

Утверждение 7. *Пространство* $P_{n,n}$ *со струкурными уравнениями* (1), (2), (3) *обобщает проективную группу* $GP(n)$ *с неоднородными структурными уравнениями* (26), (27), (28)*, действующую эффективно в проективном пространстве* P_n*.*

В силу структурных уравнений (26) система уравнений $\omega^i = 0$ вполне интегрируема. Она выделяет из проективной группы $GP(n)$ коаффинную (центропроективную) подгруппу $GA^*(n)$ со структурными уравнениями

$$d\overline{\omega}^i_j = \overline{\omega}^k_j \wedge \overline{\omega}^i_k, \quad d\overline{\omega}_i = \overline{\omega}^j_i \wedge \overline{\omega}_j (\overline{\omega} = \omega|_{\omega^i=0}). \tag{29}$$

Утверждение 8. *Проективное пространство* P_n *является факторпространством проективной группы* $GP(n)$ *по коаффинной подгруппе* $GA^*(n) : P_n = GP(n)/GA^*(n)$*.*

Если $\omega^i = 0$, то структурные уравнения (1) будут отсутствовать, а уравнения (2), (3) примут вид (29).

Утверждение 9. *При фиксации точки на базе* B_n *пространства проективной связности Картана* $P_{n,n}$ *это пространство вырождается в центропроективную группу* $GA^*(n)$*.*

6. Преобразование структурных уравнений. Запишем уравнения (1) в виде структурных уравнений специального гладкого многообразия — базы B_n пространства $P_{n,n}$:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \theta^i_j, \tag{30}$$

$$\theta^i_j = \omega^i_j + T^i_{jk}\omega^k. \tag{31}$$

С помощью структурных уравнений (2), (30) будем искать внешние дифференциалы от форм (31):

$$d\theta^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \delta^i_j \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l + (dT^i_{jk} - T^i_{jl}\theta^l_k) \wedge \omega^k. \tag{32}$$

Преобразуем первое слагаемое, используя обозначение (31):

$$\omega^k_j \wedge \omega^i_k = \theta^k_j \wedge \theta^i_k - T^k_{jl}\omega^l \wedge \theta^i_k - \theta^k_j \wedge T^i_{km}\omega^m + T^k_{jl}\omega^l \wedge T^i_{km}\omega^m.$$

Во втором и третьем слагаемых вернемся к исходным формам

$$\omega^k_j \wedge \omega^i_k = \theta^k_j \wedge \theta^i_k - T^k_{jl}\omega^l \wedge \omega^i_k - \omega^k_j \wedge T^i_{km}\omega^m - T^k_{jl}\omega^l \wedge T^i_{km}\omega^m.$$

Подставим это выражение в уравнения (32):

$$d\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \delta^i_j \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + \Delta T^i_{jk} \wedge \omega^k + (R^i_{jkl} + T^i_{jm}T^m_{kl} - T^m_{jk}T^i_{ml})\omega^k \wedge \omega^l. \tag{33}$$

Слоевые формы ω^i_j подверглись преобразованию (31) с помощью линейных комбинаций базисных форм ω^k. Произведем аналогичное преобразование оставшихся слоевых форм ω_i:

$$\theta_i = \omega_i + T_{ij}\omega^j (T_{(ij)} = 0). \tag{34}$$

Используя структурные уравнения (3), (30), запишем внешние дифференциалы форм (34):

$$d\theta_i = \omega^j_i \wedge \omega_j + R_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k + (dT_{ij} - T_{ik}\theta^k_j) \wedge \omega^j. \tag{35}$$

Преобразуем первое слагаемое с помощью равенств (31), (34):

$$\omega^j_i \wedge \omega_j = \theta^j_i \wedge \theta_j - T^j_{ik}\omega^k \wedge \omega_j - \omega^j_i \wedge T_{jl}\omega^l - T^l_{ij}\omega^j \wedge T_{lk}\omega^k.$$

Подставим это выражение в уравнения (35) и используем обозначение (31):

$$d\theta_i = \theta_i^j \wedge \theta_j + (\Delta T_{ij} + T_{ij}^k \omega_k) \wedge \omega^j + (R_{ijk} - T_{ij}^l T_{lk} + T_{il} T_{jk}^l)\omega^j \wedge \omega^k. \tag{36}$$

Наконец, внесем формы (34) в структурные уравнения (33) и воспользуемся дифференциальными уравнениями (6):

$$d\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \delta_j^i \theta_k \wedge \omega^k + \theta_j \wedge \omega^i + (R_{jkl}^i + T_{jm}^i T_{kl}^m + \delta_j^i T_{kl} - \delta_{[k}^i T_{l]j} + T_{j[k}^m T_{l]m}^i - T_{j[kl]}^i)\omega^k \wedge \omega^l. \tag{37}$$

Утверждение 10. *Формы θ_j^i, θ_i, полученные из слоевых форм ω_j^i, ω_i пространства проективной связности Картана $P_{n,n}$ в результате преобразований* (31), (34) *с помощью линейных комбинаций базисных форм ω^k с данными коэффициентами T_{jk}^i и неопределенными коэффициентами T_{ij}, удовлетворяют структурным уравнениям* (36), (37).

7. Деформация проективной связности Картана. Зададим поле дополнительного объекта деформации T_{ij} на базе B_n (ср. [5, 8]):

$$\Delta T_{ij} + T_{ij}^k \omega_k = T_{ijk}\omega^k. \tag{38}$$

Учитывая обозначения (31), (34), дадим

Определение 1. Объект $T = \{T_{jk}^i, T_{ij}\}$, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (6), (38), назовем тензором деформации проективной связности Картана, причем этот тензор содержит подтензор кручения T_{jk}^i, поэтому тензор T можно также называть расширенным тензором кручения.

Замечание 1. При деформировании тривиальной связности проективного пространства тензор T назывался [8] объектом проективной деформации с подтензором аффинной деформации.

Теперь структурные уравнения (37), (36) можно записать в виде уравнений (2), (3):

$$d\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \delta_j^i \theta_k \wedge \omega^k + \theta_j \wedge \omega^i + \mathcal{R}_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \tag{39}$$

$$d\theta_i = \theta_i^j \wedge \theta_j + \mathcal{R}_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k; \tag{40}$$

$$\mathcal{R}_{jkl}^i = R_{jkl}^i + T_{jm}^i T_{kl}^m + \delta_j^i T_{kl} - \delta_{[k}^i T_{l]j} + T_{j[k}^m T_{l]m}^i - T_{j[kl]}^i, \tag{41}$$

$$\mathcal{R}_{ijk} = R_{ijk} - T_{i[j}^l T_{|l|k]} + T_{il} T_{jk}^l - T_{i[jk]}. \tag{42}$$

Найдем дифференциальные сравнения по модулю базисных форм ω^i, которым удовлетворяют компоненты (41), (42) преобразованного тензора кривизны-кручения $\{T_{jk}^i, \mathcal{R}_{jkl}^i, \mathcal{R}_{ijk}\}$. Для этого продолжим дифференциальные уравнения (6), (38). Предварительно раскроем действие дифференциального оператора Δ:

$$dT_{jk}^i + T_{jk}^l \omega_l^i - T_{lk}^i \omega_j^l - T_{jl}^i \omega_k^l = T_{jkl}^i \omega^l,$$
$$dT_{ij} - T_{kj}\omega_i^k - T_{ik}\omega_j^k + T_{ij}^k \omega_k = T_{ijk}\omega^k.$$

Продифференцируем эти уравнения внешним образом, ограничиваясь в силу правильной продолжаемости произведениями лишь с одной базисной формой:

$$\Big(\Delta T_{jkl}^i - \delta_l^i T_{jk}^m \omega_m + T_{jk}^i \omega_l + T_{jl}^i \omega_k + T_{lk}^i \omega_j + \ldots\Big) \wedge \omega^l = 0,$$
$$\Big(\Delta T_{ijk} + 2T_{ij}\omega_k + T_{ik}\omega_j + T_{kj}\omega_i + T_{ijk}^l \omega_l + \ldots\Big) \wedge \omega^k = 0.$$

Воспользуемся леммой Картана и запишем результат в виде дифференциальных сравнений по модулю базисных форм ω^i:

$$\begin{aligned} &\Delta T_{jkl}^i - \delta_l^i T_{jk}^m \omega_m + T_{jk}^i \omega_l + T_{jl}^i \omega_k + T_{lk}^i \omega_j \equiv 0, \\ &\Delta T_{ijk} + 2T_{ij}\omega_k + T_{ik}\omega_j + T_{kj}\omega_i + T_{ijk}^l \omega_l \equiv 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Альтернируем эти сравнения по двум индексам и приводим подобные слагаемые:

$$\Delta T^i_{j[kl]} - T^m_{j[k}\delta^i_{l]}\omega_m + T^i_{lk}\omega_j \equiv 0,$$
$$\Delta T_{i[jk]} + T_{i[j}\omega_{k]} + T_{kj}\omega_i + T^l_{i[jk]}\omega_l \equiv 0.$$

Эти дифференциальные сравнения вместе с уравнениями (6), (7), (8), (38) позволяют получить сравнения для объектов (41), (42):

$$\Delta\mathcal{R}^i_{jkl} \equiv 0, \quad \Delta\mathcal{R}_{ijk} + \mathcal{R}^l_{ijk}\omega_l \equiv 0. \tag{44}$$

Определение 2. Связность со структурными уравнениями (30), (39), (40) назовем канонической проективной связностью.

Утверждение 11. *Каноническая связность имеет нулевой тензор кручения, а совокупность остальных компонент тензора кривизны-кручения $\mathcal{R} = \{0, \mathcal{R}^i_{jkl}, \mathcal{R}_{ijk}\}$ образует тензор с дифференциальными сравнениями для компонент* (44)*, который содержит подтензор $\mathcal{R}^i_{jkl}$.*

Замечание 2. Тензор кривизны канонической связности аналогичен тензору кривизны центропроективной (коаффинной) связности, но структурные уравнения этих связностей различны.

8. Роль расширенного тензора кручения. Если тензор кручения равен нулю:

$$T^i_{jk} = 0 \Rightarrow T^i_{jkl} = 0, \tag{45}$$

то $\theta^i_j = \omega^i_j$ и формулы (41), (42) принимают вид:

$$\mathring{\mathcal{R}}^i_{jkl} = \mathring{R}^i_{jkl} + \delta^i_j\mathring{T}_{kl} + \mathring{T}_{j[l}\delta^i_{k]}, \tag{46}$$
$$\mathring{\mathcal{R}}_{ijk} = \mathring{R}_{ijk} - \mathring{T}_{i[jk]}. \tag{47}$$

В этом случае дифференциальные уравнения (15), (16) аналогичны сравнениям (44), но входящие в них объекты различны. Значит, разности соответствующих объектов являются компонентами тензора, т.е.

$$\Delta(\delta^i_j\mathring{T}_{kl} + \mathring{T}_{j[l}\delta^i_{k]}) \equiv 0, \quad \Delta\mathring{T}_{i[jk]} \equiv 0. \tag{48}$$

Действительно, из дифференциальных уравнений (38) при условии (45) следует $\Delta\mathring{T}_{ij} \equiv 0$, т.е. $\mathring{T}_{ij}$ — тензор, поэтому выполняются первые сравнения (48). Кроме того, вторые дифференциальные сравнения (43) при условии (45) принимают вид:

$$\Delta\mathring{T}_{ijk} + 2\mathring{T}_{ij}\omega_k + \mathring{T}_{ik}\omega_j + \mathring{T}_{kj}\omega_i \equiv 0,$$

поэтому совокупность $\{\mathring{T}_{ij}, \mathring{T}_{ijk}\}$ — тензор, что обеспечивает инвариантность сравнений (48).

Если расширенный тензор кручения равен нулю, т.е. наряду с равенствами (45) выполняются равенства

$$\mathring{T}_{ij} = 0 \Rightarrow \mathring{T}_{ijk} = 0,$$

то $\theta_i = \omega_i$. Формулы (46), (47) принимают тривиальный вид:

$$\mathring{\mathcal{R}}^i_{jkl} = \mathring{R}^i_{jkl}, \quad \mathring{\mathcal{R}}_{ijk} = \mathring{R}_{ijk},$$

поэтому справедливо

Утверждение 12. *Проективная связность Картана без кручения и каноническая проективная связность имеют аналогичные дифференциальные соотношения для компонент тензоров кривизны $\{\mathring{R}^i_{jkl}, \mathring{R}_{ijk}\}$ и $\{\mathcal{R}^i_{jkl}, \mathcal{R}_{ijk}\}$, но эти тензоры отличаюся слагаемыми, которые обращаются в нуль лишь тогда, когда тензор расширенного кручения равен нулю: $T = 0$.*

9. Вывод. Проективная связность Картана и каноническая проективная связность совпадают лишь при аннулировании тензора расширенного кручения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Пробл. геом. — 1979. — *9*. — С. 3–248.
2. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1986.
3. *Лаптев Г. Ф.* Многообразия, погруженные в обобщенные пространства// Тр. 4 Всесоюз. мат. съезда, 1961. Т. 2. — Л.: Наука, 1964. — С. 226–233.
4. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии// Тр. геом. семин. ВИНИТИ. — 1966. — *1*. — С. 139–189.
5. *Лемлейн В. Г.* Локальные центропроективные пространства и связности в дифференцируемом многообразии// Лит. мат. сб. — 1964. — *4*, № 1. — С. 41–132.
6. *Лумисте Ю. Г.* Теория связностей в расслоенных пространствах// в кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1969. — М.: ВИНИТИ, 1971. — С. 123–168.
7. *Лумисте Ю. Г.* Проективная связность// в кн.: Математическая энциклопедия. Т. 4. — М., 1984. — С. 671–673.
8. *Шевченко Ю. И.* Проективная связность Картана в проективном пространстве// Тр. науч. конф. «Лаптевские чтения». — Пенза, 2004. — С. 150–155.
9. *Шевченко Ю. И.* Центропроективная связность в пространстве проективной связности Картана// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2005. — *36*. — С. 154–160.
10. *Шевченко Ю. И.* Классификация пространств проективной связности// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2014. — *45*. — С. 144–157.
11. *Cartan E.* Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective. — Paris: Gauthier-Villars, 1937.
12. *Kobayashi S., Nagano T.* On projective connection// J. Math. Mech. — 1964. — *13*, № 2. — P. 215–235.
13. *Shevchenko Yu. I.* Tensor of affine torsion-curvature of projective Cartans connection// в кн.: Избранные вопросы современной математики. — Калининград, 2005. — С. 49–52.

Шевченко Юрий Иванович
Балтийский федеральный университет им. И. Канта
E-mail: iushevchenko@kantiana.ru

Скрыдлова Елена Викторовна
Балтийский федеральный университет им. И. Канта
E-mail: eskrydlova@kantiana.ru

Вялова Александра Вячеславна
Калининградский государственный технический университет
E-mail: aleksandra.vyalova@klgtu.ru