ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 141–152
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-141-152

УДК 517.58+517.986.68

АЛГЕБРЫ ЛИ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С ИЗОТРОПНЫМ КОНУСОМ

© 2023 г. **И. А. ШИЛИН, Дж. ЧОЙ**

Аннотация. В статье обсуждается связь некоторых максимальных подалгебр алгебры Ли трехмерной собственной группы Лоренца G с некоторыми специальными функциями: функциями Бесселя и Бесселя—Клиффорда, волновыми кулоновскими функциями, гипергеометрической функции Аппеля F_1 и др. Ядра интегральных операторов в пространстве представлений выражаются через введенную авторами функцию, для которой выводятся континуальные теоремы сложения, которые, в свою очередь, приводят к интегральным формулам для специальных функций. Кратко говорится об аналогичных результатах, связанных с группами, близкими к G.

Ключевые слова: алгебра Ли, функция Бесселя—Клиффорда, волновая кулоновская функция, гипергеометрическая функция Аппеля, интегральный оператор.

LIE ALGEBRAS AND SPECIAL FUNCTIONS RELATED TO THE ISOTROPIC CONE

© 2023 **I. A. SHILIN, J. CHOI**

Abstract. In this paper, we discuss the relationship between some maximal subalgebras of the Lie algebra of the proper three-dimensional Lorentz group G and some special functions: Bessel and Bessel–Clifford functions, wave Coulomb functions, the Appel hypergeometric function F_1, etc. The kernels of integral operators in the space of representations are expressed in terms of the function introduced by the authors. For this function, we derive continual addition theorems, which, in turn, lead to integral formulas for special functions. We briefly discuss similar results related to groups similar to G.

Keywords and phrases: Lie algebra, Bessel–Clifford function, Coulomb wave function, Appel hypergeometric function, integral operator.

AMS Subject Classification: 33C80, 22E66

1. Группа G, алгебра $\mathfrak{g}$, некоторые их подгруппы и подалгебры. Изотропным (световым) конусом называют множество точек $(ct)^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ в $\mathbb{R}^4$, где c — скорость света. Это множество является однородным пространством собственной группы Лоренца $\tilde{G}$. Полагая $x_1 = ct$ и $x_4 = 0$, получаем его трехмерный аналог C. Подгруппу в $\tilde{G}$, транзитивно действующую на полуконусе $C_+ = \{x \in C \mid x_1 > 0\}$, обозначим G. Группа G изоморфна связной компоненте $SO_0(2,1)$ единичной матрицы унимодулярной псевдоортогональной группы Ли $SO(2,1)$ и состоит из матриц g размера 3×3, для которых [8] $g_{i1}^2 - g_{i2}^2 - g_{i3}^2 = (-1)^{\delta_{i2}+\delta_{i3}}$ (где δ_{ij} — символ Кронекера), $\det g = 1$, $g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32} > 0$ и $g_{11} > 0$. Еще одним однородным пространством группы G является двуполостный гиперболоид $S_1 = \{x \mid x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1\}$, точка $(1,0,0)$ которого инвариантна относительно преобразования

$$h_1(\tau_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\tau_1 & -\sin\tau_1 \\ 0 & \sin\tau_1 & \cos\tau_1 \end{pmatrix} \in G$$

и входит в полный прообраз произвольной точки

$$y = (\operatorname{ch}\xi, \operatorname{sh}\xi\cos\mu, \operatorname{sh}\xi\sin\mu) \in S_1,$$

поскольку существуют преобразования

$$h(\xi) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\xi & \operatorname{sh}\xi & 0 \\ \operatorname{sh}\xi & \operatorname{ch}\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $h_1(\tau_1)$ из группы G, такие, что $[h_1(\mu)h(\xi)h_1(\tau_1)](1,0,0) = y$. Это означает, что G является функцией переменных $\mu, \tau_1 \in [-\pi;\pi]$ и $\xi \in \mathbb{R}$. Касательные векторы к кривым $h_1(\tau_1)$,

$$h_2(\tau_2) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\tau_2 & 0 & \operatorname{sh}\tau_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}\tau_2 & 0 & \operatorname{ch}\tau_2 \end{pmatrix}$$

и $h(\tau)$ в точке id имеют соответственно вид

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и образуют базис касательного линейного пространства группы G в точке id. Коммутационные соотношения соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеют вид $[a,b] = -c$, $[a,c] = b$ и $[b,c] = c$. Полагая $\mathfrak{k} = \operatorname{Span}(a)$ и $\mathfrak{p} = \operatorname{Span}(b,c)$, получаем разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, в котором $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ и $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, т.е. разложение Картана. $\mathbb{Z}_2$-градуировка этого разложения означает, что $\mathfrak{k}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$ и подгруппа $H_1 = \exp\mathfrak{k} = \{\exp(\tau_1 a)\} = \{h_1(\tau_1)\}$ в G является максимальной компактной подгруппой.

Так как $(\operatorname{ad} x)y = [x,y]$ и $(\operatorname{ad} a)a = 0$, $(\operatorname{ad} a)b = -c$, $(\operatorname{ad} a)c = b$, то матрицы присоединенного линейного оператора $\operatorname{ad} a$ в базисе $E = \{a,b,c\}$ алгебры $\mathfrak{g}$ имеет вид

$$\operatorname{ad} a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -a.$$

Точно так же получаем, что $\operatorname{ad} b = b$ и $\operatorname{ad} c = -c$. Поскольку

$$\operatorname{tr}(aa) = \operatorname{tr}\operatorname{diag}(0,-1,-1) = -2, \quad \operatorname{tr}(bb) = \operatorname{tr}\operatorname{diag}(1,0,1) = 2, \quad \operatorname{tr}(cc) = \operatorname{tr}\operatorname{diag}(1,1,0) = 2$$

$$\operatorname{tr}(-ab) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \operatorname{tr}(ac) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \operatorname{tr}(-bc) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

то матрица билинейной формы Картана—Киллинга $B(x,y) = \operatorname{tr}((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))$ в базисе E имеет вид $(b_{ij}) = \operatorname{diag}(-2,2,2)$, а значит, алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста.

Так как $\dim\mathfrak{p} = 2$, то вещественный ранг $\dim\mathfrak{a}$ алгебры $\mathfrak{g}$ равен 1. Положим, что максимальная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$ определяется формулой $\mathfrak{a} = \operatorname{Span}(c)$. Тогда подгруппа $\exp\mathfrak{a} = \{\exp(\tau c)\}$ в G является максимальной коммутативной подгруппой.

Поскольку характеристический многочлен оператора $\operatorname{ad} c$ имеет вид

$$\mu(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix},$$

то $\mathfrak{g} = \operatorname{Ker} \operatorname{ad} c + V_1 + V_{-1}$, где V_λ — линейное подпространство в $\mathfrak{g}$, состоящее из нулевого вектора и собственных векторов оператора $\operatorname{ad} c$, отвечающих собственному значению λ. Тогда максимальная нильпотентная подалгебра $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{g}$ совпадает с корневым подпространством V_1. Решая матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

получаем, что $\mathfrak{n} = \operatorname{Span}(a+b)$, следовательно, максимальная нильпотентная подгруппа $H_3 = \exp \mathfrak{n} = \{\exp(\tau_3(a+b))\} = \{h_3(\tau_3)\}$ группы G состоит из матриц

$$h_3(\tau_3) = \operatorname{diag}(1,1,1) + \\ + \tau_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\tau_3^2}{2!} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\tau_3^3}{3!} \operatorname{diag}(0,0,0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+\tau_3^2 & \tau_3^2 & 2\tau_3 \\ -\tau_3^2 & 2-\tau_3^2 & -2\tau_3 \\ 2\tau_3 & 2\tau_3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если положить $\mathfrak{a} = \operatorname{Span}(b)$, то, рассуждая аналогично, получаем, что максимально нильпотентная подалгебра совпадает с линейной оболочкой $\operatorname{Span}(a+b)$, откуда получается сопряженная подгруппе H_3 максимально нильпотентная подгруппа H_4, состоящая из матриц

$$h_4(\tau_4) = \operatorname{diag}(1,1,1) + \\ + \tau_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\tau_4^2}{2!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\tau_4^3}{3!} \operatorname{diag}(0,0,0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+\tau_4^2 & 2\tau_4 & -\tau_4^2 \\ 2\tau_4 & 2 & -2\tau_4 \\ \tau_4^2 & 2\tau_4 & 2-\tau_4^2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что на полуконусе C_+ окружность γ_1: $x_1 = 1$ является однородным пространством подгруппы $H_1 = \{h_1(\tau_1) \mid \tau_1 \in \mathbb{R}\}$, гипербола γ_2: $x_2 = \pm 1$ — однородным пространством подгруппы H_2, состоящей из преобразований h_2, а параболы γ_3: $x_1 + x_2 = 1$ и γ_4: $x_1 + x_3 = 1$ — однородными пространствами подгрупп H_3 и H_4 соответственно.

2. Представление, инфинитезимальные операторы и базисы. Для фиксированного $\sigma \in \mathbb{C}$ обозначим $\mathfrak{D}$ линейное пространство, состоящее из функций, которые заданы на полуконусе C_+, бесконечно дифференцируемы на области определения и при любых $x \in C_+$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ удовлетворяют равенству $f(\alpha x) = |\alpha|^\sigma f(x)$. Представление T группы G в пространстве $\mathfrak{D}$ зададим, поставив каждому элементу $g \in G$ в соответствие оператор левого «сдвига» функции произвольной функции $f \in \mathfrak{D}$ на g^{-1}. Рассмотрим инфинитезимальные операторы

$$\mathfrak{d}_i = \mathbf{i} \left. \frac{dT(h_i(\tau_i))f(x)}{d\tau_i} \right|_{\tau_i = 0}.$$

Так как произвольная функция $f \in \mathfrak{D}$ удовлетворяет условию σ-однородности, то

$$T(h_i(\tau_i))f(x) = |x_1|^\sigma f\left(1, \frac{x_2 \cos\tau_1 + x_3 \sin\tau_1}{x_1}, \frac{x_3 \cos\tau_1 - x_2 \sin\tau_1}{x_1}\right). \tag{1}$$

Поскольку первая компонента точки

$$[h_1(\tau_1)]^{-1} x = h_1(-\tau_1)x = \left(1, \frac{x_2 \cos\tau_1 + x_3 \sin\tau_1}{x_1}, \frac{x_3 \cos\tau_1 - x_2 \sin\tau_1}{x_1}\right)$$

равна 1, то существует такое $\alpha_1 \in [-\pi; \pi]$, что

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_2 \cos\tau_1 + x_3 \sin\tau_1}{x_1}, \quad \sin\alpha_1 = \frac{x_3 \cos\tau_1 - x_2 \sin\tau_1}{x_1},$$

т.е. функция f в равенстве (1) зависит от одного переменного α_1:

$$T(h_i(\tau_i))f(x) = |x_1|^\sigma f\left(\operatorname{arctg} \frac{x_3 \cos\tau_1 - x_2 \sin\tau_1}{x_2 \cos\tau_1 + x_3 \sin\tau_1}\right).$$

Тогда для этой функции

$$\mathfrak{d}_1 = \mathbf{i}\frac{df}{d\tau_1}\left(\operatorname{arctg}\frac{x_3\cos\tau_1 - x_2\sin\tau_1}{x_2\cos\tau_1 + x_3\sin\tau_1}\right)'_{\tau_1} \times \left(\frac{x_3\cos\tau_1 - x_2\sin\tau_1}{x_2\cos\tau_1 + x_3\sin\tau_1}\right)'_{\tau_1} =$$
$$= \mathbf{i}\frac{df}{d\tau_1}\frac{x_2^2}{x_2^2+x_3^2}\left(-\frac{x_2^2+x_3^2}{x_2^2}\right) = -\mathbf{i}\frac{df}{d\tau_1}.$$

Поскольку собственные функции f оператора $\mathfrak{d}_1$ удовлетворяют уравнению $\mathfrak{d}_1 f = \lambda f$, то $f = \mu e^{\mathbf{i}\lambda\tau_1}$. Так как должно выполняться равенство $f(-\pi) = f(\pi)$, то $\mu e^{-\mathbf{i}\lambda\pi} = \mu e^{\mathbf{i}\lambda\pi}$, откуда $\lambda \in \mathbb{Z}$ и система функций $\{|x_1|^\sigma e^{-\mathbf{i}p_1\tau_1} \mid p_1 \in \mathbb{Z}\}$ является базисом в линейном пространстве сужений функций из $\mathfrak{D}$ на окружность γ_1. Но

$$|x_1|^\sigma e^{-\mathbf{i}p_1\tau_1} = |x_1|^\sigma(\cos\tau_1 + \mathbf{i}\sin\tau_1)^{p_1} = |x_1|^\sigma\left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{\mathbf{i}x_3}{x_1}\right)^{p_1} = |x_1|^{\sigma-p_1}(x_2 + \mathbf{i}x_3)^{p_1},$$

а значит, имеем базис

$$B_1 = \{f_{p_1}(x) = |x_1|^{\sigma-p_1}(x_2+\mathbf{i}x_3)^{p_1} \mid p_1 \in \mathbb{Z}\}$$

пространства представления $\mathfrak{D}$.

Так как при $x_2 \neq 0$

$$f(x_1,x_2,x_3) = |x_2|^\sigma f\left(\frac{x_1}{|x_2|}, \operatorname{sign} x_2, \frac{x_3}{|x_2|}\right) =$$
$$= x_2^\sigma \delta_{1,\operatorname{sign} 1}\cdot f\left(\frac{x_1}{|x_2|}, 1, \frac{x_3}{|x_2|}\right) + |x_2|^\sigma \delta_{-1,\operatorname{sign} x_2} f\left(\frac{x_1}{|x_2|}, -1, \frac{x_3}{|x_2|}\right),$$

имеем

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_2)_\pm^\sigma f\left(\frac{x_1}{|x_2|}, \pm 1, \frac{x_3}{|x_2|}\right),$$

где $(t)_\pm^\nu$ — обобщенные функции, определенные формулами [16]

$$|t|_\pm^\nu = \begin{cases} |t|^\nu, & \text{при } \pm t \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } \pm t < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$T(h_2^{-1}(\tau_2)) = (x_1)_\pm^\sigma f\left(\frac{x_1\operatorname{ch}\tau_2 - x_3\operatorname{sh}\tau_2}{|x_1|}, \pm 1, \frac{x_3\operatorname{ch}\tau_2 - x_1\operatorname{sh}\tau_2}{|x_1|}\right) =$$
$$= (x_1)_\pm^\sigma f\left(\operatorname{arth}\frac{x_3\operatorname{ch}\tau_2 - x_1\operatorname{sh}\tau_2}{x_1\operatorname{ch}\tau_2 - x_3\operatorname{sh}\tau_2}\right)$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{d}_2 = \mathbf{i}\frac{df}{d\tau_2}\left(\operatorname{arth}\frac{x_3\operatorname{ch}\tau_2 - x_1\operatorname{sh}\tau_2}{x_1\operatorname{ch}\tau_2 - x_3\operatorname{sh}\tau_2}\right)'_{\tau_2} \times \left(\frac{x_3\operatorname{ch}\tau_2 - x_1\operatorname{sh}\tau_2}{x_1\operatorname{ch}\tau_2 - x_3\operatorname{sh}\tau_2}\right)'_{\tau_2}$$
$$= \mathbf{i}\frac{df}{d\tau_2}\frac{x_1^2}{x_1^2 - x_3^2}\frac{x_3^2 - x_1^2}{x_1^2} = -\mathbf{i}\frac{df}{d\tau_2}.$$

Для произвольного собственного значения $\lambda \in \mathbb{R}$ собственные функции оператора $\mathfrak{d}_2$ имеют вид $f = \mu e^{\mathbf{i}\lambda\tau_2}$, а значит, система функций $\{(x_2)^\sigma e^{\mathbf{i}p_2\tau_2} \mid p_2 \in \mathbb{R}\}$ является базисом пространства сужений функций из $\mathfrak{D}$ на гиперболу γ_2. Но

$$(x_2)_\pm^\sigma e^{\mathbf{i}p_2\tau_2} = (x_2)_\pm^\sigma(\operatorname{ch}\tau_2 + \operatorname{sh}\tau_2)^{\mathbf{i}p_2} = (x_2)_\pm^\sigma\left(\frac{x_1}{|x_2|} + \frac{x_3}{|x_2|}\right)^{\mathbf{i}p_2},$$

поэтому система функций

$$B_2 = \{f_{p_2,\pm}(x) = (x_2)_\pm^{\sigma - \mathbf{i}p_2}(x_1+x_3)^{\mathbf{i}p_2} \mid p_2 \in \mathbb{R}\}$$

является базисом в $\mathfrak{D}$.

Поскольку

$$\begin{aligned} T(h_3(\tau_3))f(x) = f\left(\frac{(x_1+x_2)\tau_3^2}{2} - x_3\tau_3 + x_1, x_2 + x_3\tau_3 - \frac{(x_1+x_2)\tau_3^2}{2}, x_3 - (x_1+x_2)\tau_3\right) = \\ = |x_1+x_2|^\sigma f\left(\frac{\tau_3^2}{2} - \frac{x_3\tau_3}{x_1+x_2} + \frac{x_1}{x_1+x_2}, \frac{x_2}{x_1+x_2} + \frac{x_3\tau_3}{x_1+x_2} - \frac{\tau_3^2}{2}, \frac{x_3}{x_1+x_2} - \tau_3\right) \end{aligned} \tag{2}$$

и для $i \in \{1,2\}$

$$\frac{x_i}{x_1+x_2} + (-1)^i\left(\frac{x_3\tau_3}{x_1+x_2} - \frac{\tau_3^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_3}{x_1+x_2} - \tau_3\right)^2 + \frac{(-1)^i}{2},$$

то равенство (2) можно переписать в виде

$$T(h_3(\tau_3))f(x) = |x_1+x_2|^\sigma f\left(\frac{x_3}{x_1+x_2} - \tau_3\right). \tag{3}$$

Тогда для функции f в равенстве (3) имеем

$$\mathfrak{d}_3 = -- \mathbf{i}\frac{df}{d\tau_3},$$

поэтому функции $e^{\mathbf{i}\lambda\tau_3}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, составляют базис пространства сужений функций из $\mathfrak{D}$ на параболу γ_3. Однако

$$e^{\mathbf{i}\lambda\alpha_3} = \exp\frac{\mathbf{i}\lambda x_3}{x_1+x_2},$$

поэтому получаем базис

$$B_3 = \{f_{p_3}(x) = |x_1+x_2|^\sigma \exp(\mathbf{i}p_3x_3/(x_1+x_2)) \mid p_3 \in \mathbb{R}\}$$

пространства $\mathfrak{D}$. Аналогично получается базис

$$B_4 = \{f_{p_4}(x) = |x_1+x_3|^\sigma \exp(\mathbf{i}p_4x_2/(x_1+x_3)) \mid p_4 \in \mathbb{R}\}.$$

3. Функция A, ее частные значения. Пусть γ — контур на полуконусе C_+, по одному разу пересекающий все (быть может, за исключением нескольких) его образующие, а H — подгруппа группы G, для которой γ является однородным пространством. Справедлива следующая теорема [12].

Теорема 1. *При $\hat\sigma = -\sigma - 1$ билинейные интегральные функционалы*

$$\mathsf{F}_\gamma\colon \mathfrak{D} \times \hat{\mathfrak{D}} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (u, \hat v) \longmapsto \int\limits_\gamma u(x)\hat v(x)\,d\gamma,$$

где $d\gamma$ — мера на γ, инвариантная относительно подгруппы H, совпадают (т.е. не зависят от выбора контура γ).

Доказательство этого утверждения основано на том факте, что, интегрируя, например, по параболе γ_3, можно ввиду σ-однородности значение произвольной функции $f \in \mathfrak{D}$ во всякой ($\alpha \in \mathbb{R}$) точке $\frac{1}{2}(1+\alpha^2, 1-\alpha^2, 2\alpha)$ этого контура представить в виде

$$\left(\frac{1+\alpha^2}{2}\right)^\sigma f\left(1, \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}, \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right) = \left(\frac{1+\alpha^2}{2}\right)^\sigma f(1, \cos\beta, \sin\beta),$$

т.е. выразить через значение этой же функции на окружности γ_1. Иэ этого представления вытекает, что $u(\alpha)\hat v(\alpha) = 2(1+\alpha^2)^{-1}u(\beta)\hat v(\beta)$. Остается учесть, что $d\beta = 2^{-1}(1+\alpha^2)\,d\alpha$.

Кроме того, имеет место следующее утверждение [39].

Теорема 2. *При $\hat\sigma = -\sigma - 1$ билинейные интегральные функционалы F_γ инвариантны относительно пары операторов представления $(T(g), \hat T(g))$, т.е. $\mathsf{F}_\gamma(T(g)f, \hat T(g)\hat f) = \mathsf{F}_\gamma(f, \hat f)$.*

В силу теоремы 1 доказательство теоремы 2 достаточно провести для одного из функционалов — скажем, для случая $\gamma = \gamma_1$. Так как уже показано, что $G = H_1 \times H_2 \times H_1$, то достаточно ограничиться проверкой случаев $g \in H_1$ и $g \in H_2$. В первом случае имеем $T(\tau_1)f(\beta) = f(\beta - \tau_1)$, поэтому утверждение теоремы 2 очевидно. Во втором случае, пользуясь теоремой 1, доказательство проведем для гиперболы $\gamma_2 = \{(\operatorname{ch}\iota, \pm 1, \operatorname{sh}\iota) \mid \iota \in \mathbb{R}\}$. Имеем тогда $T(\tau_2)f(\alpha) = f(\iota - \tau_2)$.

Определим функцию $A\colon \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 \times G \longrightarrow \mathbb{C}$, ставящую набору $(\sigma, p, \hat{p}, g)$ в соответствие число $\mathsf{F}_\gamma(T(g)f_p, \hat{f}_{\hat{p}})$. Корректность этого определения следует из теоремы 1.

В случае $g = \mathrm{id}$ частные значения этой функции выражаются через известные специальные функции математической физики, например, через гипергеометрическую функцию Гаусса:

$$A(-\sigma - 1, p_2^+, p_1, \mathrm{id}) = 2^{-\sigma}\mathbf{i}^\sigma(-\mathbf{i})^{p_1 + \mathbf{i}p_2} \times \\ \times B\big(\mathbf{i}p_2 - \sigma, -\mathbf{i}p_2 - \sigma\big)\,{}_2F_1\big(\mathbf{i}p_2 - \sigma, p_1 - \sigma; -2\sigma; 2\big), \quad \mathrm{Re}(\sigma) < 0,$$

функции Уиттекера второго рода [2]:

$$A(-\sigma - 1, p_3, p_1, \mathrm{id}) = \frac{2\pi}{|p_3|^{\sigma+1/2}\Gamma(-\operatorname{sign} p_3 - \sigma)} W_{-\operatorname{sign} p_3, \sigma + \frac{1}{2}}\big(2|p_3|\big), \quad \mathrm{Re}(\sigma) < -\frac{1}{2},\ p_3 \neq 0,$$

волновые кулоновские функции [25, 26, 42]:

$$A(-\sigma - 1, p_2^+, p_3, \mathrm{id}) = 2p_3^{-\sigma-1}e^{p_2\pi/2} \times \\ \times \sqrt{\Gamma(1 + \sigma + \mathbf{i}p_2)\Gamma(1 + \sigma - \mathbf{i}p_2)}\, F_\sigma(p_2; p_3), \quad \mathrm{Re}(\sigma) > -1,\ p_3 \neq 0,$$

$$A(-\sigma - 1, p_2^-, p_3, \mathrm{id}) = \frac{\mathbf{i}\Gamma(2\sigma + 2)C_\sigma(p_2)}{2^{2\sigma}p_3^{\sigma+1}} \times \\ \times \Big(e^{-\mathbf{i}\pi\sigma}H_\sigma^+(p_2; p_3) - e^{\mathbf{i}\pi\sigma}H_\sigma^-(p_2; p_3)\Big) \quad -1 < \mathrm{Re}(\sigma) < 0,\ p_3 \neq 0,$$

функции Бесселя—Клиффорда [14] (другое название — функции Трикоми [39, 43]):

$$A(-\sigma - 1, p_4, p_3, \mathrm{id}) = R_{\operatorname{sign}(p_3p_4)}, \quad [p_3, p_4 \neq 0,\ -1 < \mathrm{Re}(\sigma) < 0,$$

где

$$R_1 = 2^{-\sigma-1}\cos(\sigma\pi)e^{\mathbf{i}(p_3 - p_4)}\left[\left(\frac{2}{p_4}\right)^{2\sigma+1}\mathcal{C}_{-2\sigma-1}(-p_3p_4) - \left(\frac{p_3}{2}\right)^{2\sigma+1}\mathcal{C}_{2\sigma+1}(-p_3p_4)\right],$$
$$R_{-1} = -2^{1-\sigma}p_3^{2\sigma+1}\sin(\sigma\pi)e^{\mathbf{i}(p_3 - p_4)}\mathcal{K}_{2\sigma+1}(p_3p_4).$$

Но через функцию $A(\cdot, \cdot, \cdot, \mathrm{id})$ выражаются ядра интегральных операторов пространства $\mathfrak{D}$, являющиеся аналогами операторов перехода между базисами конечномерного пространства. Например, для ядра фредгольмова оператора

$$f_{p_2,\pm} = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda_\pm(p_2, p_3) f_{p_3}\, dp_3 \tag{4}$$

выполняется равенство [13]

$$\lambda_\pm(p_2, p_3) = (2\pi)^{-1}A(-\sigma - 1, p_2, -p_3, \mathrm{id}).$$

В общем же случае через значения функции A выражаются ядра интегральных операторов представления T. Например, при $-1 < \mathrm{Re}(\sigma) < 0$ значение функции $A(-\sigma - 1, p_2^+, p_2'^+, h(\xi))$, где $0 < \xi < \pi/2$, выражается через гипергеометрическую функцию Аппеля F_1 двух переменных:

$$A(-\sigma - 1, p_2^+, p_2'^+, h(\xi)) = \frac{(1 + \sin\xi)^{\mathbf{i}p_2}\mathrm{B}(\mathbf{i}p_2 - \sigma, 1 + \sigma - \mathbf{i}p_2')}{2^{\sigma + \mathbf{i}p_2}\cos^{\sigma + \mathbf{i}(p_2 - p_2') - 1}(1 + \cos\xi - \sin\xi)^{-\sigma - \mathbf{i}p_2'}} \times \\ \times F_1\left(\begin{matrix}\mathbf{i}p_2 - \sigma; 1 + \sigma + \mathbf{i}p_2, -\sigma - \mathbf{i}p_2' \\ 1 + \mathbf{i}(p_2 - p_2')\end{matrix}\ \middle|\ \frac{1 + \cos\xi - \sin\xi}{2}, \frac{1 - \cos\xi - \sin\xi}{1 + \cos\xi - \sin\xi}\right). \tag{5}$$

Это следует из [3, формула 2.2.8.5], если записать значение функции в интегральной форме

$$A(-\sigma-1,p_2^+,p_2'^+,h(\xi))=\mathsf{F}_{\gamma_1}(T(h(\xi))f_{p_2,+},f_{p_2',+})=$$
$$=\frac{2(1+\sin\xi)^{\mathbf{i}p_2}}{\cos^{\sigma+1+\mathbf{i}p_2}\xi}\int\limits_{\alpha_-}^{1}\frac{(1-\alpha)^{\sigma-\mathbf{i}p_2'}(1+\alpha)^{\sigma+\mathbf{i}p_2'}\,d\alpha}{\left(\frac{\sin\xi+1}{\cos\xi}-\alpha\right)^{\sigma+1+\mathbf{i}p_2}\left(\alpha-\frac{\sin\xi-1}{\cos\xi}\right)^{\sigma+1-\mathbf{i}p_2}},$$

где

$$\alpha_-=\frac{\sin\xi-1}{\cos\xi}.$$

Подробное доказательство формулы (5) дано в [13].

Если $g(\mu,\nu)$ принадлежит прямому произведению двух однопараметрических подгрупп в G, т.е. $g(\mu,\nu)=g_1(\mu)g_2(\nu)$, то в силу того, что T является гомоморфизмом групп и для элемента $g_1(\mu)$ выполняется равенство $(g_1(\mu))^{-1}=g_1(-\mu)$, из теоремы 2 вытекает формула

$$A(\sigma,p,\hat p,g(\mu,\nu))=A(\sigma,p,\hat p,g_1(\mu)g_2(\nu))=$$
$$=\mathsf{F}_\gamma(T(g_1(\mu))T(g_2(\nu))f_p,f_{\hat p})=\mathsf{F}_\gamma(T(g_2(\nu))f_p,T(g_1(-\mu))f_{\hat p}),$$

упрощающая вычисления в тех случаях, когда f_p является собственной функцией оператора $T(g_2(\nu))$ или $f_{\hat p}$ является собственной функцией оператора $T(g_1(-\mu))$.

Отметим, что функция Аппеля F_1 является частным случаем (при $n=2$), как и гипергеометрическая функция Гаусса (при $n=1$), функции Лауричелла F_D, которая при $|z_1|,\dots,|z_n|<1$ определяется рядом

$$F_D(a;b_1,\dots,b_n;c;z_1,\dots,z_n)=\sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_1+\dots+m_n}(b_1)_{m_1}\dots(b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\dots+m_n}}\frac{z_1^{m_1}\dots z_n^{m_n}}{m_1!\dots m_n!},$$

а вне указанной области является его аналитическим продолжением [11, 18, 19]. С теоретико-групповой точки зрения функция F_D изучена У. Миллером в работе [33] (а также в [6]), рассмотревшим неприводимые представления алгебры $\mathfrak{sl}(n+3,\mathbb{C})$, а ее частный случай F_1 — в работе [34]. Работам Миллера предшествовала статья Н. Я. Виленкина [1], в которой другие гипергеометрические функции двух переменных, F_A и F_B, были изучены в виде матричных элементов максимально вырожденных представлений группы $SL(n,\mathbb{R})$ (см. также [44]). В работе [28] с помощью теории алгебр Ли для каждой из 34 гипергеометрических функций двух переменных (включая F_1) найдена каноническая система, в которой соответствующая функция возникает в результате разделения переменных.

4. Теоремы сложения для функции A и интегральные формулы для специальных функций. Из соотношений между ядрами указанных выше интегральных операторов получаются континуальные теоремы сложения для функции A, которые в то же время являются интегральными формулами для специальных функций. Взяв, к примеру, два континуальных базиса, состоящих из функций f_p и $f_{\hat p}$ соответственно, и элемент g так, чтобы $f_{\hat p}$ были собственными функциями оператора $T(g)$, из равенств

$$T(g)f_p=\int\limits_{\mathbb{R}}\theta_{p,p'}f_{p'}\,dp'=\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\omega_{p',\hat p}\theta_{p,p'}\,dp'\right)f_{\hat p}\,d\hat p,$$
$$T(g)f_p=\int\limits_{\mathbb{R}}\omega_{p,\hat p}T(g)f_{\hat p}\,d\hat p=\int\limits_{\mathbb{R}}\lambda_{\hat p}\omega_{p,\hat p}f_{\hat p}\,d\hat p$$

получаем формулу

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\omega_{p',\hat p}\theta_{p,p'}\,dp'=\lambda_{\hat p}\omega_{p,\hat p}.$$

Например, теорема сложения [41]

$$A(-\sigma-1,p_3,-p_4,g)=(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}}A(-\sigma-1,p_3,-\hat{p}_3,g)A(-\sigma-1,\hat{p}_3,-p_4,\mathrm{id})\,d\hat{p}_3.$$

означает при $p_1>0$ и $p_2<0$ и $-1<\mathrm{Re}(\sigma)<0$ интегральную формулу

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+}\Big(\big[J_{-2\sigma-1}(2\sqrt{p_1t})-J_{2\sigma+1}(2\sqrt{p_1t})\big]K_{2\sigma+1}(2\sqrt{-p_2t})\\
+\big[J_{-2\sigma-1}(2\sqrt{-p_2t})-J_{2\sigma+1}(2\sqrt{-p_2t})\big]K_{2\sigma+1}(2\sqrt{p_1t})\Big)\,dt=\\
=2^{\sigma+5/2}\sec(\pi\sigma)e^{\mathbf{i}(p_1-p_2)}K_{2\sigma+1}(2\sqrt{-p_1p_2}).$$

для функций Бесселя—Клифворда ввиду связи последних с функциями Бесселя и Макдональда:

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\mathcal{C}_n\left(-\frac{z^2}{4}\right),\quad K_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\mathcal{K}_\nu\left(\frac{z^2}{4}\right).$$

5. Оператор Пуассона и интегральные соотношения для специальных функций. Напомним, что если T_1 и T_2 являются соответственно представлениями некоторой группы в линейных пространствах L_1 и L_2 и линейный оператор $\varphi\colon L_1\longrightarrow L_2$ при всех g из этой группы удовлетворяет равенству $\varphi T_1(g)=T_2(g)\varphi$, то оператор φ называют [7] сплетающим. Оператор Пуассона $\mathsf{P}(f)=\mathsf{F}_\gamma(f,|x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3|^{-\sigma-1})$, где $y\in S_1$, сплетает представление T и представление группы G теми же операторами левого «сдвига» в пространстве бесконечно дифференцируемых, однородных и $\Box$-гармонических функций на гиперболоиде S_1, где

$$\Box=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

В частности, для точки $y=(\operatorname{ch}\xi,\operatorname{sh}\xi\cos\mu,\operatorname{sh}\xi\sin\mu)$ имеем

$$\mathsf{P}(f^\bullet_{p_1})=\frac{2\pi e^{\mathbf{i}p_1\mu}\Gamma(\sigma+1)}{(-1)^{p_1+1}\Gamma(1+\sigma-p_1)}P_\sigma^{-p_1}(\operatorname{ch}\xi),$$

$$\mathsf{P}(f^\bullet_{p_2,\pm})=\frac{(\operatorname{sh}\xi\cos\mu+\mathbf{i})^{\mathbf{i}p_2}(\operatorname{sh}\xi\cos\mu-\mathbf{i})^\sigma}{4^\sigma\sqrt{\pi}e^{\pi p_2}(\cos\xi-\operatorname{sh}\xi\cos\mu)^\sigma}\times\\
\times\frac{(\mathbf{i}\operatorname{sh}\xi\sin\mu+1)^{\frac{\mathbf{i}p_2}{2}-\sigma}\Gamma(\frac12-\sigma)\mathrm{B}(\mathbf{i}p_2-\sigma,-\mathbf{i}p_2-\sigma))}{(\mathbf{i}\operatorname{sh}\xi\sin\mu-1)^{\frac{\mathbf{i}p_2}{2}}\Gamma(-\sigma-\mathbf{i}p_2)}\times Q^{\mathbf{i}p_2}_{-\sigma-1}(\mathbf{i}\operatorname{sh}\xi\sin\mu),\quad \mathrm{Re}(\sigma)<0,$$

$$\mathsf{P}(f^\bullet_{p_4})=|p_4|^{\sigma+1/2}\sqrt{\frac{2\pi}{\operatorname{ch}\xi+\operatorname{sh}\xi\cos\mu}}\times\\
\times\exp\frac{\mathbf{i}p_4\operatorname{sh}\xi\cos\mu}{\operatorname{ch}\xi+\operatorname{sh}\xi\cos\mu}\Gamma^{-1}(-\sigma)K_{\sigma+\frac12}\left(\frac{|p_4|}{\operatorname{ch}\xi+\operatorname{sh}\xi\cos\mu}\right),\quad \mathrm{Re}(\sigma)<0.$$

После применения оператора Пуассона из формул вида (4) получаются формулы

$$\mathsf{P}(f_{p_2,\pm})=\int\limits_{\mathbb{R}}\lambda_\pm(p_2,p_3)\mathsf{P}(f_{p_3})\,dp_3. \tag{6}$$

Если ядро $\lambda_\pm$ найдено в явном виде, то формула (6) является еще одним интегральным соотношением между специальными функциями.

6. Специальные функции, связанные с близкими к G группами. При переходе от G к близким к ней группам $SO_0(2,2)$ и $SO_0(3,1)$ базисы функции становятся сложнее — их можно найти как общие собственные функции дифференциальных операторов Казимира, соответствующих вложенным цепочкам подгрупп и коммутирующих со всеми элементами соответствующих подалгебр шестимерных алгебр дифференциальных операторов $\mathfrak{so}(2,2)$ и $\mathfrak{so}(3,1)$. Для группы $SO_0(2,2)$ базисные функции все еще остаются комплекснозначными элементарными функциями, но для группы $SO_0(3,1)$ в ходе решения задач о вычислении собственных функций операторов Казимира, коммутирующих с операторами из неодномерных подалгебр, возникают линейные дифференциальные уравнения второго порядка, поэтому базисные функции выражаются (за исключением случая с подгруппой $SO_0(2) \times SO_0(1,1)$) через специальные функции — многочлены Гегенбауэра, функции Бесселя и Лежандра, а их сужения на однородные подпространства подгрупп являются произведениями этих специальных функций и экспоненциальных функций. Базисные функции в этих случаях нумеруются двумя индексами, связь между которыми обусловлена размерностями неприводимых представлений подгрупп и вытекает из алгоритма построения операторов Казимира: для редукции $SO_0(3,1) \supset SO_0(3) \supset SO_0(2)$ это алгоритм рассмотрен в [17].

Рассматривая функцию, подобную функции A, на паре аналогичных построенным выше пространств представлений $\mathfrak{D}$ и $\hat{\mathfrak{D}}$ группы $SO_0(3,1)$ [10,14] или $SO_0(2,2)$ [15], таких, что $\sigma + \hat{\sigma} = -2$, можно получить, в частности, интегральные формулы для бесселевых функций и гиперфункций Бесселя (т.е. функций с векторным индексом)

$$I_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(z) = \frac{\left(\frac{z}{n+1}\right)^{\nu_1+\ldots+\nu_n}}{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma(\nu_i+1)}\ {}_0F_n\left[-;\nu_1+1,\ldots,\nu_n+1;\left(\frac{z}{n+1}\right)^{n+1}\right],$$

введенных Делерю [24] и переоткрытых Ключанцевым [4], а также интересные результаты для суммы первого [27] и второго [35] интегральных преобразований Ганкеля—Клиффорда. Гиперфункции Бесселя (в основном $J_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(x)$) в последнее время интенсивно изучаются [36,37], в том числе ввиду их связи со специальными функциями дробного исчисления [29,30].

Через гиперфункции Беселля—Клиффорда [14] Шилин и Чой [40] определили гипераналог интегральных преобразований Ганкеля—Клиффорда:

$$\mathrm{H}^{(1)}_{\nu_1,\ldots,\nu_n}[f](t) := t^{\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_i}\int\limits_0^{+\infty} f(\hat{t})\mathcal{C}_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(t\hat{t})\,d\hat{t},$$

$$\mathrm{H}^{(2)}_{\nu_1,\ldots,\nu_n}[f](t) := \int\limits_0^{+\infty} \hat{t}^{\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_i} f(\hat{t})\mathcal{C}_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(t\hat{t})\,d\hat{t}.$$

В работе [40] методом, изложенным выше, учитывая связь между матричными элементами сужения представления группы $SO_0(3,1)$ на диагональную матрицу $\mathrm{diag}(1,-1,1,-1)$, записанными в «сферическом» и «гиперболическом» базисах, авторы получили следующую формулу для разности гиперпреобразований $\mathrm{H}^{(1)}_{0,1+\sigma,1+\sigma}$ и $\mathrm{H}^{(2)}_{0,1+\sigma,1+\sigma}$ функции Макдональда $K_{\sigma-1}$:

$$\mathrm{H}^{(1)}_{0,1+\sigma,1+\sigma}[K_{\sigma-1}](p) - \mathrm{H}^{(2)}_{0,1+\sigma,1+\sigma}[K_{\sigma-1}](p) = \pi^{-2}p^{-2\sigma-3}\sin(\pi\sigma)K_{\sigma-1}(p).$$

Отметим, что в работе [20] рассматриваются новые гиперфункции, частными случаями которых являются функции Макдональда и Вебера $D_\mu(x)$ и которые связаны с одной однопараметрической подгруппой группы $ISO(n,1)$ движений псевдоевклидова пространства сигнатуры $(+,\ldots,+,-)$, а именно с группой сдвигов вдоль оси Ox_{n+1} (при этом $SO_0(n,1)$ — другая подгруппа в $ISO(n,1)$). В статьях [22,23] обобщенные бесселевы функции

$$\mathcal{D}^m_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^{n+mr}y^r}{(n+mr)!r!}$$

рассматриваются как матричные элементы квазирегулярного представления группы

$$G_{p,q} = \{g = (\xi, \nu, \mu) \mid \xi, \mu \in \mathbb{C}, \mu \in [0; 2\pi]\}$$

с групповой операцией

$$g\hat{g} = (\xi + \hat{\xi}e^{\mathbf{i}p\mu}, \nu + \hat{\nu}e^{-\mathbf{i}q\hat{\mu}}, \mu + \hat{\mu})$$

и как элементы базисов пространства представления. Эти функции интересны тем, что в частных случаях они совпадают с хорошо известными бесселевыми функциями:

$$\mathcal{D}_n^1\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) = J_n(x), \quad \mathcal{D}_n^1\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) = I_n(x), \quad \mathcal{D}_n^1(1, y) = \mathcal{C}_n(y), \quad \mathcal{D}_n^m(1, y) = \mathcal{W}_n^m(y),$$

где $\mathcal{W}_n^m(y)$ — функция Райта [31], играющая важную роль в теории специальных функций дробного исчисления [32]. Показано, в частности, что из теоретико-групповых соображений получаются теоремы сложения

$$\mathcal{D}_n^m(x \pm u, y \pm z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_{n-l}^m(x, y)\mathcal{D}_l^m(\pm u, \pm z),$$

$$\mathcal{D}_n^m\left(x + tu, y + \frac{v}{t^m}\right) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} t^l \mathcal{D}_{n-l}^m(x, y)\mathcal{D}_l^m(u, v).$$

Как отмечено выше, функции, образующие один из базисов пространства представления группы $SO_0(3,1)$, выражаются через функции Лежандра. Они имеют вид

$$f_{p,q,\pm}(x) = (x_4)_\pm^\sigma (x_2^2 + x_3^2)^{-|q|/2} P_{-1/2+\mathbf{i}p}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)(x_3 + \mathbf{i}x_2 \operatorname{sign} q)^{|q|},$$

где $p > 0$ и $q \in \mathbb{Z}$, и являются общими собственными функциями операторов Казимира

$$\mathfrak{c}_1 = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial\beta} \quad \text{и} \quad \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{d}_3^2 + \mathfrak{d}_4^2 - \mathfrak{c}_1^2,$$

где в гиперболических координатах $x_1 = \operatorname{ch}\alpha$, $x_2 = \pm 1$, $x_3 = \operatorname{sh}\alpha \sin\beta$ и $x_4 = \operatorname{sh}\alpha\cos\beta$ на полуконусе C_+

$$\mathfrak{d}_3 = \mathbf{i}\left(\sin\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} + \operatorname{cth}\alpha\cos\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right), \quad \mathfrak{d}_4 = \mathbf{i}\left(\cos\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} - \operatorname{cth}\alpha\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right).$$

Функции Лежандра появляются здесь как решения дифференциального уравнения [5]

$$\operatorname{csch}\alpha\frac{d}{d\alpha}\left(\operatorname{sh}\alpha\frac{d\mathrm{A}}{d\alpha}\right) + \left[\left(\frac{1}{4} + p_2^2\right) - q_2^2\operatorname{csch}\alpha^2\right]\mathrm{A} = 0$$

методом разделения переменных. Тогда частные значения функции, подобной функции A, связаны с общим индексным интегральным преобразованием Меллера—Фока [45]

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)P_{-1/2+\mathbf{i}t}^k(s)\,dt,$$

что приводит к интересным результатам для этого преобразования и в целом для функции Лежандра первого рода. Например, в работе [38] с помощью формулы обращения этого преобразования переоткрыта ранее известная формула [9, формула 2.17.27.9]

$$\int_0^{+\infty} x\operatorname{sh}(\pi x)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu + \mathbf{i}x, \frac{1}{2} - \mu - \mathbf{i}x, \nu + \frac{\mathbf{i}x}{2}, \nu - \frac{\mathbf{i}x}{2}\right)P_{\mathbf{i}x-1/2}^\mu(c)\,dx =$$

$$= 2^{3/2-2\nu}\pi^{3/2}c^{\mu-2\nu-1/2}(c^2-1)^{-\mu/2}\Gamma\left(2\nu - \mu + \frac{1}{2}\right)$$

(где $\operatorname{Re}(\mu) \leqslant 1/2$ и $\operatorname{Re}(\nu) \geqslant 0$), которая получила теоретико-групповую трактовку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виленкин Н. Я.* Гипергеометрические функции от нескольких переменных и вырожденные представления группы $SL(n, \mathbb{R})$// Изв. вузов. Мат. — 1970. — № 4. — С. 50–55.
2. *Виленкин Н. Я., Шлейникова М. А.* Интегральные соотношения для функций Уиттекера и представления трехмерной группы Лоренца// Мат. сб. — 1970. — *81.* — С. 185–191.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, рядов и произведений. — М.: Наука, 1963.
4. *Ключанцев М. И.* Сингулярные дифференциальные операторы с $r-1$ параметрами и функции Бесселя векторного индекса// Сиб. мат. ж. — 1983. — *24*, № 3. — С. 47–62.
5. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции. — ИЛ, 1963.
6. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир, 1981.
7. *Наймарк М. А.* Теория представлений групп. — М.: Наука, 1976.
8. *Николов А. В.* Структура и параметризация групп $O(p, q)$ и $U(p, q)$// Bulg. J. Phys. II. — 1976. — № 6. — С. 537–545.
9. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. — М.: Наука, 1986.
10. *Чой Дж., Нижников А. И., Шилин И. А.* Об одной сумме интегральных преобразований Ганкеля-Клиффорда функций Уиттекера// Чебышев. сб. — 2019. — *20*, № 3. — С. 349–360.
11. *Хасанов А., Эргашев Т. Г.* Формулы аналитического продолжения для гипергеометрических функций Лауричелла от трех переменных// Bull. Inst. Math. — 2019. — № 5. — С. 50–58.
12. *Шилин И. А.* Двойные $SO(2, 1)$-инвариантные интегралы и формулы для функций Уиттекера// Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 5. — С. 56–66.
13. *Шилин И. А., Чой Дж.* Метод континуальных теорем сложения и интегральные соотношения между функциями Кулона и функцией Аппеля F_1// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2022. — *62*, № 9. — С. 1522–1531.
14. *Шилин И. А., Чой Дж.* Некоторые формулы для обычных функций и гиперфункций Бесселя—Клиффорда, связанные с собственной группой Лоренца// Фундам. прикл. мат. — 2019. — *22*, № 5. — С. 195–208.
15. *Шилин И. А., Чой Дж.* О переходах между базисами пространства представления группы $SO(2, 2)$// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2020. — *61*, № 8. — С. 1235–1244.
16. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Наука, 1965.
17. *Эллиот Дж., Добер П.* Симметрия в физике. Т. 1. — М.: Мир, 1983.
18. *Bezrodnykh S. I.* Analytic continuation of the Lauricella function $F_D^{(N)}$ with arbitrary number of variables// Int. Transforms Spec. Funct. — 2018. — *29*, № 1. — P. 21—42.
19. *Bezrodnykh S. I.* Analytic continuation of the Lauricella's functions $F_A^{(N)}$, $F_B^{(N)}$ and $F_D^{(N)}$// Int. Transforms Spec. Funct. — 2020. — *31*, № 11. — P. 921–940.
20. *Choi J., Shilin I. A.* A generalization of certain associated Bessel functions in connection with a group of shifts// Commun. Math. — 2022. — *30*, № 1. — P. 103–118.
21. *Clifford W. K.* On Bessel functions// in: Mathematical Papers. — London: Oxford Univ. Press, 1882. — P. 346–349.
22. *Datolli G., Maino G., Chiccoli C., Lorenzutta S., Torre A.* A inified point of view on the theory of the generalized Bessel functions// Comput. Math. Appl. — 1995. — *30*, № 7. — P. 111–125.
23. *Datolli G., Torre A., Lorenzutta S., Maino G., Chiccoli C.* Generalized Bessel functions within the group representation formalism// Nuovo Cim. B. — 1996. — *111.* — P. 143–164.
24. *Deleruer P.* Sur le calcul symbolique a n variables et les fonctions hyperbesseliennes// Ann. Soc. Sci. Bruxelles. — 1953. — *67*, № 3. — P. 229–274.
25. *Dzieciol A., Yngve S., Froman P.O.* Coulomb wave functions with complex values of the variable and the parameters// J. Math. Phys. — 1999. — *40.* — P. 6145–6166.
26. *Gaspard D.* Connection formulas between Coulomb wave functions// J. Math. Phys. — 2018. — *59.* — 112104.
27. *Hayek N.* Sobre la transformación de Hankel// Act. VIII Reunión An. Mat. Epanol. — 1967. — P. 47–60.
28. *Kalnins E. G., Manocha H. L., Miller W.* The Lie theory of two-variable hypergeometric functions// Stud. Appl. Math. — 1980. — *62*, № 2. — P. 143–173.
29. *Kiryakova V.* From the hyper-Bessel operators of Dimovski to the generalized fractional calculus// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2014. — *17.* — P. 977–1000.

30. *Kiryakova V.* Transmutation method for solving hyper-Bessel differential equations based on the Poisson–Dimovski transformation// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2008. — *11.* — P. 299–316.
31. *Lipnevich V., Luchko Yu.* The Write function: its properties, applications, and numerical evaluation// AIP Conf. Proc. — 2010. — *1301.* — P. 614–622.
32. *Mainardi F.* Fractional Calculus and Special Functions. — Bologna: Univ. of Bologna, 2010.
33. *Miller W.* Lie theory and the Lauricella functions F_D// J. Math. Phys. — 1972. — *13.* — P. 1393–1399.
34. *Miller W.* Lie theory and the Appell functions F_1// SIAM J. Math. Anal. — 1973. — *4*, № 4. — P. 638–655.
35. *Mendez Perez J. M. R., Socas Robayna M. M.* A pair of generalized Hankel–Clifford transformations and their applications// J. Math. Anal. Appl. — 1991. — *154*, № 2. — P. 543–557.
36. *Mushtaq S., Raza M., Din M. U. Certain geometric properties of Lommel and hyper-Bessel functions* Mathematics. — 2019. — *7.* — 240.
37. *Paneva-Konovska J.* A family of hyper-Bessel functions and convergent series in them// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2014. — *17*, № 4. — P. 1001–1015.
38. *Shilin I. A., Choi J.* Certain connections between the spherical and hyperbolic bases on the cone and formulas for related special functions// Int. Transforms Spec. Funct. — 2014. — *25*, № 5. — P. 374–383.
39. *Shilin I. A., Choi J.* Certain relations between Bessel and Whittaker functions related to some diagonal and block-diagonal 3×3-matrices// J. Nonlin. Sci. Appl. — 2017. — *10.* — P. 560–574.
40. *Shilin I. A., Choi J.* Certain relations between hyper Bessel–Clifford, Macdonald and Meijer functions and hyper Bessel–Clifford integral transforms// submitted.
41. *Shilin I. A., Choi J.* Maximal subalgebras in $\mathfrak{so}(2,1)$, additions theorems and Bessel–Clifford functions// J. Anal. — 2022.
42. *Shilin I. A., Choi J., Lee J. W.* Some integrals involving Coulomb functions associated with the three-dimensional proper Lorentz group// AIMS Math. — 2020. — *5*, № 6. — P. 5664–5682.
43. *Tricomi F. G.* Funzioni Ipergeometriche Confluenti. — Rome: Cremonese, 1954.
44. *Vilenkin N. Ya., Klimyk A. U.* Representations of Lie Groups and Special Functions. Vol. 3. Classical and Quantum Groups and Special Functions. — Dordrecht: Kluwer, 1992.
45. *Yakubovich S. B.* Index Transforms. — Singapore: World Scientific, 1996.

Шилин Илья Анатольевич
Национальный исследовательский университет МЭИ;
Московский педагогический государственный университет
E-mail: ilyashilin@li.ru

Choi Junesang
Университет Донггук, Республика Корея
E-mail: junesang@mail.dongguk.ac.kr