ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 42–62
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-42-62

УДК 517.956; 517.958

О ЗАДАЧЕ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА В ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

© 2022 г. М. Т. ДЖЕНАЛИЕВ, М. Г. ЕРГАЛИЕВ, А. А. АСЕТОВ, А. М. АЯЗБАЕВА

Аннотация. При помощи априорных оценок, метода Фаэдо—Галеркина и других методов функционального анализа доказана корректность граничной задачи для уравнения Бюргерса с нелинейными граничными условиями типа Неймана в вырождающихся угловых областях в пространствах Соболева.

Ключевые слова: уравнение Бюргерса, граничное условие типа Неймана, вырождающаяся угловая область, априорная оценка, разрешимость, единственность.

ON A NEUMANN-TYPE PROBLEM FOR THE BURGERS EQUATION IN A DEGENERATE CORNER DOMAIN

© 2022 M. T. JENALIYEV, M. G. YERGALIYEV, A. A. ASSETOV, A. M. AYAZBAYEVA

Abstract. Using a priori estimates, the Faedo—Galerkin method, and other methods of functional analysis, we prove the well-posedness of the boundary-value problem for the Burgers equation with nonlinear Neumann-type boundary conditions in degenerate corner domains in Sobolev spaces.

Keywords and phrases: Burgers equation, Neumann-type boundary condition, degenerate corner domain, a priori estimate, solvability, uniqueness.

AMS Subject Classification: 35K05, 35K55, 35R37

1. Введение. Изучение уравнения Бюргерса имеет длинную историю, часть из которой дана в работах [11] и [12], а также в монографиях [13] и [3].

В работах [11] и [12] в пространствах Соболева была установлена корректность однородной задачи Дирихле для уравнения Бюргерса. При этом область независимых переменных вырождалась по нелинейному закону.

В угловых областях задачи линейной теплопроводности с производными по времени в граничных условиях изучались в работе [7]. Была доказана корректность рассматриваемой задачи в весовых классах Гельдера. В дальнейшем эти результаты были развиты в [15–17].

Проникновение фронта смачивания в пористую среду является классической задачей со свободной границей. Исторически первым и наиболее известным примером является модель Грина—Ампта (Green–Ampt) для потока воды в почвах [14]. Существует огромное разнообразие ситуаций (химически реагирующие среды, деформируемые среды, эффекты капиллярности, массообмен, потоки смесей, среды со сложной структурой, загрязнение, рекультивация, заморозка грунта, производство композитных материалов, пивоварение и др.).

Работа выполнена при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № AP08855372, 2020-2022).

Как известно, подходящими моделями движения жидкости в пористых средах являются также нелинейные уравнения Бюргерса и их модификации [19, 20, 22–25].

Спектр применения краевых задач для уравнений параболического типа в области с границей, изменяющейся во времени, достаточно широк. Подобного рода задачи возникают: при изучении тепловых процессов в электрических контактах [5], процессов экологии и медицины [6], при решении некоторых задач гидромеханики [2], термомеханики при тепловом ударе [4] и так далее.

Обширная литература посвящена исследованию разрешимости линейных и нелинейных параболических уравнений в цилиндрических областях. Однако, что касается нелинейных граничных задач в вырождающихся нецилиндрических областях, то они изучены сравнительно мало.

Для угловых областей в лебеговых классах изучались линейные граничные задачи теплопроводности с однородными граничными условиями Дирихле и установлены теоремы об их разрешимости, сведением к сингулярным интегральным уравнениям Вольтерра второго рода [1, 9].

В [10] были изучены различные случаи неоднородности типа Дирихле по границе. В этих случаях показано, что имеет место как единственная разрешимость, так и неединственная разрешимость для соответствующих граничных задач.

В данной работе в соболевских классах изучаются вопросы разрешимости граничной задачи для уравнения Бюргерса в угловой области с нелинейными граничными условиями типа Неймана. Рассматривается случай, когда одна часть границы является неподвижной, а вторая часть — подвижна.

В п. 2 дается постановка изучаемой граничной задачи, и сформулирован основной результат работы. Мы изучаем вопросы однозначной разрешимости двух вспомогательных граничных задач для уравнения Бюргерса в прямоугольной и непрямоугольной областях, которые используются при доказательстве основного результата работы. Первой вспомогательной задаче посвящены разделы 3—7, в которых методами априорных оценок и Фаэдо—Галеркина устанавливается ее корректность в классах Соболева. Корректность второй вспомогательной граничной задачи показана в разделе 8. В разделах 9—11 доказана теорема 1 — основной результат работы. Работу завершает краткое заключение.

2. Постановка задачи и основной результат. Пусть

$$Q_{xt} = \left\{x, t \,\middle|\, 0 < x < kt,\ 0 < t < T < \infty,\ k > 0\right\}$$

— область, которая вырождается при $t = 0$, и $\Omega_t = (0, kt)$ является сечением области Q_{xt} для фиксированного значения переменной $t \in (0, T)$. В области Q_{xt} мы рассматриваем следующую граничную задачу для уравнения Бюргерса:

$$\partial_t u + u\partial_x u - \nu\partial_x^2 u = f, \tag{1}$$

$$\left[\frac{1}{3}(u)^2 - \nu\partial_x u\right]\bigg|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{1}{3}(u)^2 - \nu\partial_x u\right]\bigg|_{x=kt} = 0, \tag{2}$$

$$f \in L_2(Q_{xt}), \quad \nu = \text{const} > 0. \tag{3}$$

Замечание 1. Считаем, что присутствие нелинейного слагаемого $u^2/3$ в граничных условиях (2) продиктовано только наличием конвективного составляющего в уравнении Бюргерса, которое обеспечивает нелинейный «массовый» перенос и обмен на границе. Мы исходили из того факта. что в уравнении (1) конвективный и диффузионный слагаемые можно записать в форме $\partial_x(u^2/2 - \nu\partial_x u)$. Исходя из этих соображений, условия (2) названы условиями типа Неймана.

Задача 1. При условиях (3) установить разрешимость граничной задачи (1)—(2).

Имеет место следующий основной результат.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_2(Q_{xt})$ (3). Тогда граничная задача (1)—(2) имеет единственное решение*

$$u \in H^{2,1}(Q_{xt}) \equiv L_2(0, T; H^2(\Omega_t)) \cap H^1(0, T; L_2(\Omega_t)).$$

Обозначения пространств в работе приняты как в [18]. Дальнейшее содержание работы посвящено доказательству теоремы 1.

3. Первая вспомогательная начально-граничная задача. В области

$$Q_{yt} = \{y, t \mid y \in (0,1),\ t \in (0,T)\}$$

рассмотрим вспомогательную начально-граничную задачу:

$$\partial_t w + \alpha(t) w \partial_y w - \beta(t)\partial_y^2 w + \gamma(y,t)\partial_y w = g, \tag{4}$$

$$\left[\frac{\alpha(t)}{3} w^2 - \beta(t)\partial_y w\right]\bigg|_{y=0} = 0, \quad \left[\frac{\alpha(t)}{3} w^2 - \beta(t)\partial_y w\right]\bigg|_{y=1} = 0, \quad 0 < t < T, \tag{5}$$

$$w(y,0) = 0, \quad 0 < y < 1. \tag{6}$$

где заданные непрерывные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(y,t)$ для всех $t \in [0,T]$ удовлетворяют условиям

$$\alpha'(t) \leqslant 0,\ \beta'(t) \leqslant 0,\ \alpha_1 \leqslant \alpha(t) \leqslant \alpha_2,\ \beta_1 \leqslant \beta(t) \leqslant \beta_2,\ |\gamma(y,t)| \leqslant \gamma_1,\ |\partial_y \gamma(y,t)| \leqslant \gamma_1 \tag{7}$$

с заданными положительными постоянными α_i, β_i, $i = 1,2$, γ_1,

$$\alpha(t), \quad \beta(t) \in C^1([0,T]), \quad \partial_y \gamma(y,t) \in C(\bar{Q}_{yt}). \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть $g \in L_2(Q_{yt})$ и выполнены условия (7)—(8). Тогда начально-граничная задача (4)—(6) имеет единственное решение*

$$w \in H^{2,1}(Q_{yt}) \equiv L_2(0,T; H^2(0,1)) \cap H^1(0,T; L_2(0,1)).$$

4. Спектральная задача. Для применения метода Фаэдо—Галеркина необходимо решить спектральную задачу

$$-Y''(y) = \lambda^2 Y(y), \quad y \in (0,1), \tag{9}$$

$$Y'(0) + \lambda^2 Y(0) = 0, \tag{10}$$

$$Y'(1) - \lambda^2 Y(1) = 0, \tag{11}$$

получаемую применением метода разделения переменных ($u(y,t) = F(t)Y(y)$) из следующей задачи:

$$\partial_t u - \partial_y^2 u = 0, \quad y \in (0,1), \quad t \in (0,T),$$
$$\partial_t u - \partial_x u\big|_{y=0} = 0, \quad \partial_t u + \partial_x u\big|_{y=1} = 0,$$
$$u(y,0) = u_0(y).$$

Общее решение уравнения (9) ищем в виде

$$Y(y) = C_1 \exp\{i\lambda y\} + C_2 \exp\{-i\lambda y\}, \quad i = \sqrt{-1}. \tag{12}$$

Удовлетворяя (12) граничным условиям (10)—(11), получаем

$$Y_{01}(y) = 1, \quad \lambda_{01} = 0, \quad \operatorname{tg}\frac{\lambda_{01}}{2} = -\lambda_{01}, \tag{13}$$

$$Y_{2n-1}(y) = \cos\frac{\lambda_{2n-1}(1-2y)}{2}, \quad \lambda_{2n-1} = (2n-1)\pi + \varepsilon_{2n-1}, \quad \operatorname{tg}\frac{\lambda_{2n-1}}{2} = -\lambda_{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

$$Y_{02}(y) = \sin\frac{\lambda_{02}(1-2y)}{2}, \lambda_{02} \approx \frac{2\pi}{5}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\lambda_{02}}{2} = \lambda_{02}, \tag{15}$$

$$Y_{2n}(y) = \sin\frac{\lambda_{2n}(1-2y)}{2}, \quad \lambda_{2n} = 2n\pi + \varepsilon_{2n}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\lambda_{2n}}{2} = \lambda_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Нетрудно заметить, что решения уравнений

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda_{2n-1}}{2} = -\lambda_{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\lambda_{2n}}{2} = \lambda_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

соответственно близки к точкам $(2n-1)\pi$ и $2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, и с ростом n приближаются сколь угодно близко справа к соответствующим указанным точкам $(2n-1)\pi$ и $2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, т.е. $\varepsilon_n \to 0+$ при $n \to \infty$. Если обозначим через $2x = (1-2y)\pi$, то получим: $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

По теореме Пэли—Винера (см. [21, гл. V, 86, пример]) система функций (14) и (16) полна в $L_2(0,1)$, так как для нее мало отличающейся будет система функций:

$$\frac{\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sqrt{2}\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sqrt{2}\cos 3x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sqrt{2}\sin 4x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots, \tag{19}$$

которая является полной в $L_2(-\pi/2,\pi/2)$. Для последней системы достаточно сделать замену $x_1 = x + \pi/2$. Получим систему синусов:

$$\frac{\sqrt{2}\sin x_1}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sqrt{2}\sin 2x_1}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sqrt{2}\sin 3x_1}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sqrt{2}\sin 4x_1}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,$$

которая полна в $L_2(0,\pi)$. Отметим, что система функций (14), (16) не является ортогональной в $L_2(0,1)$.

Замечание 2. Применимость теоремы Пэли—Винера следует из соотношений (M и θ — обозначения из работы [21]):

$$\lambda_1 \approx 3{,}673,\quad \lambda_1 - \pi \approx 0{,}533,\quad M\pi = |\lambda_1 - \pi| < 0{,}54 < \ln 2 \approx 0{,}693,\quad \theta = \exp\{M\pi\} - 1 < 1.$$

5. Постановка и решение приближенной задачи. Умножим уравнение (4) скалярно в $L_2(0,1)$ на функцию $v \in H^1(0,1)$. В результате с учетом начального (6) и граничных условий (5) будем иметь слабую постановку задачи (4)—(6):

$$\int_0^1 \partial_t w v\,dy + \alpha(t)\int_0^1 w\partial_y w v\,dy + \beta(t)\int_0^1 \partial_y w \partial_y v\,dy - \int_0^1 \gamma(y,t)\partial_y w v\,dy +$$

$$- \frac{\alpha(t)}{3} w^2(1,t)v(1,t) + \frac{\alpha(t)}{3} w^2(0,t)v(0,t) = \int_0^1 g v\,dy, \quad \forall v \in H^1(0,1), \tag{20}$$

$$w(y,0) = 0, \quad y \in (0,1). \tag{21}$$

Введем приближенное решение

$$w_n(y,t) = \sum_{j=1}^n c_j(t)Y_j(y), \quad w_n(y,0) = \sum_{j=1}^n c_j(0)Y_j(y), \tag{22}$$

которое удовлетворим приближенному варианту задачи (20)—(21):

$$\int_0^1 \partial_t w_n Y_j\,dy + \alpha(t)\int_0^1 w_n\partial_y w_n Y_j\,dy + \beta(t)\int_0^1 \partial_y w_n \partial_y Y_j\,dy + \int_0^1 \gamma(y,t)\partial_y w_n Y_j\,dy -$$

$$- \frac{\alpha(t)}{3} w_n^2(1,t)Y_j(1) + \frac{\alpha(t)}{3} w_n^2(0,t)Y_j(0) = \int_0^1 g Y_j\,dy, \tag{23}$$

$$w_n(y,0) = 0, \quad y \in (0,1), \tag{24}$$

для всех $j = 0, 1, \ldots, n$, и $t \in [0,T]$.

Лемма 1. *Задача* (23)—(24) *имеет единственное решение* $w_n(y,t)$.

Доказательство. В силу того, что система функций $Y_1(y), Y_2(y), Y_3(y), \ldots$ является базисом в $L_2(0,1)$, имеем

$$\det\{W_n\} = \|(Y_k(y), Y_j(y))\|_{k,j=1}^n \neq 0 \text{ для любого конечного } n;$$

W_n — матрица Грама, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(0,1)$, $A_n = (\partial_y Y_k(y), \partial_y Y_j(y))_{k,j=1}^n$,

$$w_n^2(1,t)Y_j(1,t) - w_n^2(0,t)Y_j(0,t) = \left[\sum_{k=1}^n c_k(t)Y_k(1)\right]^2 Y_j(1) - \left[\sum_{k=1}^n c_k(t)Y_k(0)\right]^2 Y_j(0).$$

Введем обозначения

$$G_n(t) = \{g_0(t), \dots, g_n(t)\}, \quad P_n(t) = \{p_0(t), \dots, p_n(t)\},$$
$$H_n(t) = \{h_0(t), \dots, h_n(t)\}, \quad C_n(t) = \{c_1(t), \dots, c_n(t)\},$$

где

$$g_j(t) = \int\limits_0^1 gY_j(y)dy, \quad p_j(t) = -\alpha(t)\int\limits_0^1 w_n\partial_y w_n Y_j(y)dy - \int\limits_0^1 \gamma(y,t)\partial_y w_n(y,t)Y_j(y)dy,$$

$$h_j(t) = \frac{\alpha(t)}{3}\left[\sum_{k=1}^n c_k(t)Y_k(1)\right]^2 Y_j(1) - \left[\sum_{k=1}^n c_k(t)Y_k(0)\right]^2 Y_j(0),$$

для всех $j = 0, 1, \dots, n$. Задача (23)—(24) эквивалентна следующей задаче Коши для конечной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$C_n'(t) = W_n^{-1}[-\beta(t)A_nC_n(t) + P_n(t) + H_n(t) + G_n(t)], \quad C_n(0) = 0. \tag{25}$$

Заметим, что функции $p_j(t)$, $h_j(t)$ хорошо определены, а функция $g_j(t)$ интегрируема в квадрате (в силу $g \in L_2(Q_{yt})$). Поэтому задача Коши (25) однозначно разрешима на некотором интервале $[0, T']$, где $T' \leqslant T$. Однако, согласно устанавливаемым далее априорным оценкам, получаем, что это решение $C_n(t)$ продолжается до конечного времени T.

Таким образом, находим функции $C_n(t) = \{c_j(t),\ j = 0, 1, \dots, n\}$ как решение задачи Коши (25) для каждого фиксированного конечного n, а вместе с ними и единственное приближенное решение $w_n(y,t)$ задачи (23)—(24). Лемма 1 доказана. □

6. Априорные оценки.

Лемма 2. *Существует такая положительная не зависящая от n постоянная K_1, что для всех $t \in [0, T]$ имеет место оценка*

$$\|w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} + \beta_1\int\limits_0^t \|\partial_y w_n(y,\tau)\|^2_{L_2(0,1)}d\tau \leqslant K_1. \tag{26}$$

Доказательство. Умножая (23) на $c_j(t)$, суммируя по j от 1 до n и используя равенство

$$\int\limits_0^1 w_n(y,t)\partial_y w_n(y,t)w_n(y,t)dy = \frac{1}{3}w_n^3(1,t) - \frac{1}{3}w_n^3(0,t),$$

получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 |w_n(y,t)|^2dy + \beta(t)\int\limits_0^1 |\partial_y w_n(y,t)|^2dy =$$
$$= -\int\limits_0^1 \gamma(y,t)\partial_y w_n(y,t)w_n(y,t)dy + \int\limits_0^1 g(y,t)w_n(y,t)dy. \tag{27}$$

Интегрируя (27) по t от 0 до t и используя ε-неравенство Коши[1], получим

$$-\int\limits_0^1 \gamma(y,t)\partial_y w_n(y,t)w_n(y,t)dy \leqslant \frac{\beta_1}{2}\|\partial_y w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} + \frac{\gamma_1^2}{2\beta_1}\|w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)},$$

[1]Т.е. неравенство

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2.$$

$$\int\limits_0^1 g(y,t)w_n(y,t)dy \leqslant \frac{1}{2}\|g(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} + \frac{1}{2}\|w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)};$$

таким образом,

$$\|w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} + \beta_1 \int\limits_0^t \|\partial_y w_n(y,\tau)\|^2_{L_1(0,1)} d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{\gamma_1^2}{\beta_1} + 1\right) \int\limits_0^t \|w_n(y,\tau)\|^2_{L_2(0,1)} d\tau + \int\limits_0^T \|g(y,\tau)\|^2_{L_2(0,1)} d\tau. \quad (28)$$

Из (28) следует

$$\|w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant \left(\frac{\gamma_1^2}{\beta_1} + 1\right) \int\limits_0^t \|w_n(y,\tau)\|^2_{L_2(0,1)} d\tau + \int\limits_0^T \|g(y,\tau)\|^2_{L_2(0,1)} d\tau.$$

Применяя неравенство Гронуолла, получим оценку для $\|w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)}$. Используя эту оценку в (28), устанавливаем требуемую оценку леммы 2. □

Пользуясь вложением $H^1(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$, из леммы 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Существует такая положительная, не зависящая от n постоянная K_1', что для всех $t \in [0,T]$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^t |w_n(0,\tau)|^2 d\tau + \int\limits_0^t |w_n(1,\tau)|^2 d\tau \leqslant 2B \int\limits_0^t \|w_n(y,t)\|^2_{H^1(0,1)} \leqslant K_1', \quad (29)$$

где B — постоянная вложения $H^1(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$.

Лемма 3. *Существует такая положительная, не зависящая от n постоянная K_2, что для всех $t \in (0,T]$ имеет место неравенство*

$$\|\partial_y w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} + \beta_1 \int\limits_0^t \|\partial_y^2 w_n(y,\tau)\|^2_{L_2(0,1)} d\tau \leqslant K_2. \quad (30)$$

Доказательство. Учитывая равенство

$$\sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^2 Y_j(y) = -\sum_{j=1}^n c_j \partial_y^2 Y_j(y) = -\partial_y^2 w_n(y,t),$$

которое следует из (9) и (22), умножая равенство (23) на $c_j\lambda_j^2$ и суммируя по j от 1 до n, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_y w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} + \beta(t)\|\partial_y^2 w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} =$$
$$= \alpha(t)(w_n(y,t)\partial_y w_n(y,t), \partial_y^2 w_n(y,t)) + (\gamma(y,t)\partial_y w_n(y,t), \partial_y^2 w_n(y,t)) -$$
$$- (g(y,t), \partial_y^2 w_n(y,t)) + \partial_t w_n(y,t)\partial_y w_n(y,t)|_{y=0}^{y=1} =$$
$$= \alpha(t)(w_n(y,t)\partial_y w_n(y,t), \partial_y^2 w_n(y,t)) + (\gamma(y,t)\partial_y w_n(y,t), \partial_y^2 w_n(y,t)) -$$
$$- (g(y,t), \partial_y^2 w_n(y,t)) + \frac{\alpha(t)}{9\beta(t)}\partial_t [w_n(y,t)]^3|_{y=0}^{y=1}. \quad (31)$$

Воспользуемся соотношениями

$$\int_0^t \frac{\alpha(t)}{9\beta(t)}\partial_t[w_n(1,t)]^3dt = \frac{\alpha(t)}{9\beta(t)}[w_n(1,t)]^3 - \int_0^t \frac{\alpha'(t)\beta(t)-\alpha(t)\beta'(t)}{9[\beta(t)]^2}[w_n(1,t)]^3dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\alpha_2}{9\beta_1}|w_n(1,t)|^3 + C_1\int_0^t |w_n(1,t)|^3dt, \quad \text{где} \quad 9C_1\beta_1^2 = \max_{0\leqslant t\leqslant T}|\alpha'(t)\beta(t)-\alpha(t)\beta'(t)|.$$

(аналогичные соотношения верны и для слагаемого с $w_n(0,t)$), установим следующую оценку:

$$\frac{\alpha_2}{9\beta_1}|w_n(1,t)|^3 \leqslant \frac{\alpha_2}{9\beta_1}\|w_n(y,t)\|^3_{L_\infty(0,1)} \leqslant \frac{\alpha_2}{9\beta_1}\|w_n(y,t)\|^{3/2}_{H^1(0,1)}\|w_n(y,t)\|^{3/2}_{L_2(0,1)} =$$
$$= \frac{\alpha_2}{9\beta_1}\|w_n(y,t)\|^{3/2}_{H^1(0,1)}\|w_n(y,t)\|^{1/2}_{L_2(0,1)}\|w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}.$$

В предыдущем соотношении мы использовали интерполяционное неравенство[1]. Теперь, применяя неравенство Юнга, имеем

$$|AB| = \left|(a^{1/p}A)\left(a^{1/q}\frac{B}{a}\right)\right| \leqslant \frac{a}{p}|A|^p + \frac{a}{qa^q}|B|^q; \tag{32}$$

здесь $p^{-1}+q^{-1}=1$ и

$$A = \|w_n(y,t)\|^{3/2}_{H^1(0,1)}, \quad B = \frac{\alpha_2}{9\beta_1}\|w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}\|w_n(y,t)\|^{1/2}_{L_2(0,1)}, \quad a=\frac{1}{6}, \quad p=\frac{4}{3}, \quad q=4.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\alpha_2}{9\beta_1}|w_n(1,t)|^3 \leqslant \frac{1}{8}\|\partial_y w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} + \left[\frac{1}{8} + \frac{2\alpha_2^4}{3^5\beta_1^4}\|w_n(y,t)\|^4_{L_2(0,1)}\right]\|w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{8}\|\partial_y w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} + D_1, \tag{33}$$

где постоянная D_1 определяется согласно оценкам леммы 2 и следствия 1. Аналогично предыдущему получаем

$$\frac{\alpha_2}{9\beta_1}|w_n(0,t)|^3 \leqslant \frac{1}{8}\|\partial_y w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} + \left[\frac{1}{8} + \frac{2\alpha_2^4}{3^5\beta_1^4}\|w_n(y,t)\|^4_{L_2(0,1)}\right]\|w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{8}\|\partial_y w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} + D_0, \tag{34}$$

где постоянная D_0 определяется согласно оценкам леммы 2 и следствия 1.

Рассмотрим оценки нелинейных слагаемых из (31). Прежде всего, имеем

$$|(w_n(y,t)\partial_y w_n(y,t), \partial_y^2 w_n(y,t))| \leqslant \|w_n(y,t)\|_{L_4(0,1)}\|\partial_y^2 w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}\|\partial_y w_n(y,t)\|_{L_4(0,1)} \leqslant$$
$$\leqslant \|w_n(y,t)\|_{L_4(0,1)}\|\partial_y w_n(y,t)\|_{H^1(0,1)}\|\partial_y w_n(y,t)\|_{L_4(0,1)}. \tag{35}$$

Далее, учитывая интерполяционное неравенство

$$\alpha_2\|\partial_y w_n(y,t)\|_{L_4(0,1)} \leqslant C\|\partial_y w_n(y,t)\|^{1/2}_{H^1(0,1)}\|\partial_y w_n(y,t)\|^{1/2}_{L_2(0,1)} \quad \forall \partial_y w_n(y,t)\in H^1(0,1)$$

(см. [8, Theorems 5.8—5.9, p. 140—141]), из (35) получим

$$\alpha_2|(w_n(y,t)\partial_y w_n(y,t), \partial_y^2 w_n(y,t))| \leqslant$$
$$\leqslant C\|w_n(y,t)\|_{L_4(0,1)}\|\partial_y w_n(y,t)\|^{3/2}_{H^1(0,1)}\|\partial_y w_n(y,t)\|^{1/2}_{L_2(0,1)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\beta_1}{8}\|\partial_y^2 w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} + \left[\frac{\beta_1}{8} + C_2\|w_n(y,t)\|^4_{L_4(0,1)}\right]\|\partial_y w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)}. \tag{36}$$

[1] См. [8, Theorems 5.8—5.9, p. 140—141]

Здесь мы воспользовались неравенством Юнга (32), где

$$A = \|\partial_y \tilde{w}_n(y,t)\|^{3/2}_{H^1(0,1)}, \quad B = C\|\tilde{w}_n(y,t)\|_{L_4(0,1)}\|\partial_y \tilde{w}_n(y,t)\|^{1/2}_{L_2(0,1)}, \quad a = \frac{\beta_1}{6}, \quad p = \frac{4}{3}, \quad q = 4.$$

Далее, для двух последних слагаемых из (31) будем иметь

$$\gamma_1|(\partial_y w_n(y,t), \partial_y^2 w_n(y,t))| \leqslant \frac{\beta_1}{8}\|\partial_y^2 w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} + C_3\|\partial_y w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)}, \tag{37}$$

$$|(g(y,t), \partial_y^2 w_n(y,t))| \leqslant \frac{\beta_1}{4}\|\partial_y^2 w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} + C_4\|g(y,t)\|^2_{L_2(0,1)}. \tag{38}$$

С учетом неравенств (33)—(38), интегрируя (31) от 0 до t, получаем

$$\|\partial_y w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} + \beta_1\int\limits_0^t \|\partial_y^2 w_n(y,\tau)\|^2_{L_2(0,1)}d\tau \leqslant A_4\|g(y,t)\|^2_{L_2(Q)} +$$

$$+\int\limits_0^t A_5(\tau)\|\partial_y w_n(y,\tau)\|^2_{L_2(0,1)}d\tau + 2C_0\int\limits_0^t |w_n(0,t)|^3 dt + 2C_1\int\limits_0^t |w_n(1,t)|^3 dt + 2(D_0+D_1), \tag{39}$$

где

$$A_4 = 2C_4, \quad A_5(t) = \frac{1}{2} + \frac{\beta_1}{4} + 2C_2\|w_n(y,t)\|^4_{L_4(0,1)} + 2C_3.$$

Оценим два последних интегральных слагаемых из (39). Используя (33)—(34), имеем

$$2C_0\int\limits_0^t |w_n(0,t)|^3 dt \leqslant \frac{C_0}{4}\int\limits_0^t \|\partial_y w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)}dt + 2D_0 T,$$

$$2C_1\int\limits_0^t |w_n(0,t)|^3 dt \leqslant \frac{C_1}{4}\int\limits_0^t \|\partial_y w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)}dt + 2D_1 T,$$

Таким образом, (39) принимает вид

$$\|\partial_y w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} + \beta_1\int\limits_0^t \|\partial_y^2 w_n(y,\tau)\|^2_{L_2(0,1)}d\tau \leqslant A_4\|g(y,t)\|^2_{L_2(Q)} +$$

$$+\int\limits_0^t \left[A_5(\tau) + \frac{C_0+C_1}{4}\right]\|\partial_y w_n(y,\tau)\|^2_{L_2(0,1)}d\tau + 2(D_0+D_1)(1+T), \tag{40}$$

Из неравенства (40) аналогично доказательству леммы 2, получаем искомую оценку (30). Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Существует такая положительная, не зависящая от n постоянная K_3, что для всех $t \in (0,T]$ имеет место неравенство*

$$\|\partial_t w_n(y,t)\|^2_{L_2(Q_{yt})} \leqslant K_3. \tag{41}$$

Доказательство. Запишем уравнение (4) для приближенного решения $w_n(y,t)$:

$$\partial_t w_n + \alpha(t) w_n \partial_y w - \beta(t)\partial_y^2 w_n + \gamma(y,t)\partial_y w_n = g. \tag{42}$$

Из уравнения (42) получаем

$$\|\partial_t w_n\|_{L_2(Q_{yt})} \leqslant \alpha_2\|w_n\partial_y w_n\|_{L_2(Q_{yt})} + \beta_2\|\partial_y^2 w_n\|_{L_2(Q_{yt})} + \gamma_1\|\partial_y w_n\|_{L_2(Q_{yt})} + \|g\|_{L_2(Q_{yt})}. \tag{43}$$

Согласно вложению $H^1(0,1) \hookrightarrow L_\infty(0,1)$ имеет место неравенство

$$\|w_n\|_{L_\infty(0,1)} \leqslant B\|w_n\|_{H^1(0,1)}.$$

Учитывая леммы 2 и 3, получаем

$$\|w_n\partial_y w_n\|^2_{L_2(Q_{yt})} \leqslant \int\limits_0^T \|w_n(y,t)\|^2_{L_\infty(0,1)}\|\partial_y w_n(y,t)\|^2_{L_2(0,1)}dt \leqslant$$
$$\leqslant B\|\partial_y w_n(y,t)\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(0,1))}\int\limits_0^T \|w_n(y,t)\|^2_{H^1(0,1)}dt \leqslant BK_2K_1(1+T), \quad (44)$$

где B — постоянная вложения $H^1(0,1) \hookrightarrow L_\infty(0,1)$, K_1 и K_2 — постоянные из лемм 2 и 3 соответственно. Теперь оценка (41) следует из (43), (44) и лемм 2 и 3. Лемма 4 доказана. □

7. Однозначная разрешимость первой вспомогательной задачи (4)—(6)**.** Леммы 2—4 показывают, что последовательность галеркинских приближений $\{w_n(y,t),\ n=1,2,3,\ldots\}$ ограничена в пространстве $L_\infty(0,T;H^1(0,1)) \cap L_2(0,T;H^2(0,1))$, а последовательность $\{\partial_t w_n(y,t),\ n=1,2,3,\ldots\}$ — в $L_2(0,T;L_2(0,1))$.

Таким образом, можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность (для которой сохраним прежнее обозначение индексов n):

$$w_n(y,t) \to w(y,t) \text{ слабо в } L_2(0,T;H^2(0,1)) \cap H^1(0,T;L_2(0,1)), \quad (45)$$
$$w_n(y,t) \to w(y,t) \text{ сильно в } L_2(0,T;H^1(0,1)) \text{ и п.в. в } Q_{yt}, \quad (46)$$

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* (7)—(8) *и* $g \in L_2(Q_{yt})$. *Тогда начально-граничная задача* (4)—(6) *имеет слабое решение в пространстве* $H^{2,1}(Q_{yt})$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t) \in \mathcal{D}((0,T))$ (здесь $\mathcal{D}((0,T))$ — класс бесконечно дифференцируемых финитных функций). Введем обозначение $v_j(y,t) = \varphi(t)Y_j(y)$, где $Y_j(y) \in H^1(0,1)$. Умножая интегральное тождество (23) на функцию $\varphi(t) \in \mathcal{D}((0,T))$ и интегрируя полученный результат по t от 0 до T, получим

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1[\partial_t w_n + \alpha(t)w_n\partial_y w_n - \beta(t)\partial_y^2 w_n + \gamma(y,t)\partial_y w_n]v_j dydt +$$
$$+\int\limits_0^T\left[\beta(t)\partial_y w_n(1,t) - \frac{\alpha(t)}{3}w_n^2(1,t)\right]v_j(1,t)dt + \int\limits_0^T\left[-\beta(t)\partial_y w_n(0,t) + \frac{\alpha(t)}{3}w_n^2(0,t)\right]v_j(0,t)dt =$$
$$= \int\limits_0^T\int\limits_0^1 gv_j dydt, \quad \forall\varphi(t) \in \mathcal{D}((0,T)), \quad \forall j = 1,\ldots,n. \quad (47)$$

Так как $\mathcal{D}((0,T);H^1(0,1))$ плотно в $L_2(0,T;H^1(0,1))$, интегральное тождество (47) можно переписать в виде

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1[\partial_t w_n + \alpha(t)w_n\partial_y w_n - \beta(t)\partial_y^2 w_n + \gamma(y,t)\partial_y w_n]vdydt +$$
$$+\int\limits_0^T\left[\beta(t)\partial_y w_n(1,t) - \frac{\alpha(t)}{3}w_n^2(1,t)\right]v(1,t)dt + \int\limits_0^T\left[-\beta(t)\partial_y w_n(0,t) + \frac{\alpha(t)}{3}w_n^2(0,t)\right]v(0,t)dt =$$
$$= \int\limits_0^T\int\limits_0^1 gvdydt, \quad \forall v(y,t) \in L_2(0,T;H^1(0,1)). \quad (48)$$

В интегральном тождестве (48) перейдем к пределу при $n \to \infty$. В выражениях, соответствующих линейным слагаемым уравнения (4) и граничных условий (5), переход к пределам осуществляется согласно соотношениям (45). Для нелинейных слагаемых имеем

$$\int_0^T \int_0^1 \alpha(t) w_n(y,t) \partial_y w_n(y,t) v(y,t) dydt = \int_0^T \alpha(t) \int_0^1 [w_n(y,t) - w(y,t)] \partial_y w_n(y,t) v(y,t) dxdt + \\ + \int_0^T \alpha(t) \int_0^1 w(y,t) \partial_y w_n(y,t) v(y,t) dxdt \to \int_0^T \alpha(t) \int_0^1 w(y,t) \partial_y w(y,t) v(y,t) dxdt, \quad (49)$$

так как согласно (46) и (45) имеет место предельное соотношение

$$\int_0^T \alpha(t) \int_0^1 [w_n(y,t) - w(y,t)] \partial_y w_n(y,t) v(y,t) dxdt \to 0.$$

Далее, согласно (48) и (46) аналогично предыдущему будем иметь

$$\int_0^T w_n(1,t) w_n(1,t) v(1,t) dt = \int_0^T [w_n(1,t) - w(1,t)] w_n(1,t) v(1,t) dt + \\ + \int_0^T w(1,t) w_n(1,t) v(1,t) dt \to \int_0^T w^2(1,t) v(1,t) dt, \quad (50)$$

$$\int_0^T w_n(0,t) w_n(0,t) v(0,t) dt = \int_0^T [w_n(0,t) - w(0,t)] w_n(0,t) v(0,t) dt + \\ + \int_0^T w(0,t) w_n(0,t) v(0,t) dt \to \int_0^T w^2(0,t) v(0,t) dt. \quad (51)$$

Итак, переходя к пределу при $n \to \infty$ в интегральном тождестве (48) с учетом предельных соотношений (49)—(51), а также в начальном условии (22), получим

$$\int_0^T \int_0^1 [\partial_t w + \alpha(t) w \partial_y w - \beta(t) \partial_y^2 w + \gamma(y,t) \partial_y w] v dydt + \\ + \int_0^T \left[\beta(t) \partial_y w(1,t) - \frac{\alpha(t)}{3} w^2(1,t)\right] v(1,t) dt + \int_0^T \left[-\beta(t) \partial_y w(0,t) + \frac{\alpha(t)}{3} w^2(0,t)\right] v(0,t) dt = \\ = \int_0^T \int_0^1 g v dydt, \quad \forall v(y,t) \in L_2(0,T; H^1(0,1)). \quad (52)$$

$$\int_0^1 w(y,0) \psi(y) dy = 0, \quad \forall \psi \in L_2(0,1). \quad (53)$$

Заметим, что интегральное тождество (52) справедливо и для любых тестовых функций $v(y,t) \in L_2(0,T;H_0^1(0,1)) \subset L_2(0,T;H^1(0,1))$, т.е. имеем

$$\int_0^T \int_0^1 [\partial_t w + \alpha(t) w \partial_y w - \beta(t)\partial_y^2 w + \gamma(y,t)\partial_y w - g] v dy dt = 0, \quad \forall v(y,t) \in L_2(0,T;H_0^1(0,1)). \tag{54}$$

Далее, возвращаясь к (52) и учитывая, что следы $v(1,t)$ и $v(0,t)$ из $L_2(0,T)$ тестовых функций $v \in L_2(0,T;H^1(0,1))$ независимы друг от друга и произвольны, в этом случае из (52) следуют тождества

$$\int_0^T \left[\beta(t)\partial_y w(1,t) - \frac{\alpha(t)}{3} w^2(1,t)\right] \psi_1(t) dt = 0, \quad \forall \psi_1(t) \in L_2(0,T), \tag{55}$$

$$\int_0^T \left[-\beta(t)\partial_y w(0,t) + \frac{\alpha(t)}{3} w^2(0,t)\right] \psi_0(t) dt = 0, \quad \forall \psi_0(t) \in L_2(0,T), \tag{56}$$

т.е. подынтегральные выражения в квадратных скобках из (54)—(56) определяют нулевые функционалы над пространствами $L_2(0,T;H_0^1(0,1))$ и $L_2(0,T)$, и принадлежат пространствам $0 \in L_2(0,T;H^{-1}(0,1)) \subset \mathcal{D}'(Q_{yt})$ и $0 \in L_2(0,T) \subset \mathcal{D}'((0,T))$. Таким образом, из (54)—(56) получаем, что слабая предельная функция $w(y,t)$ удовлетворяет уравнению (4) и граничным условиям (5), а из (53) следует, что она удовлетворяет начальному условию (6). Этим завершается доказательство леммы 5. □

Лемма 6. *При условиях леммы 5 решение $w \in H^{2,1}(Q_{yt})$ начально-граничной задачи (4)—(6) единственно.*

Доказательство. Пусть начально-граничная задача (4)—(6) имеет два различных решения $w^{(1)}(y,t)$ и $w^{(2)}(y,t)$. Тогда их разность $w(y,t) = w^{(1)}(y,t) - w^{(2)}(y,t)$ будет удовлетворять следующей однородной задаче:

$$\partial_t w + \alpha(t) w \partial_y w^{(1)} + \alpha(t) w^{(2)} \partial_y w - \beta(t)\partial_y^2 w = 0, \tag{57}$$

$$\left[\frac{\alpha(t)}{3} w(w^{(1)} + w^{(2)}) - \beta(t)\partial_y w\right]\Big|_{y=0} = 0, \tag{58}$$

$$\left[\frac{\alpha(t)}{3} w(w^{(1)} + w^{(2)}) - \beta(t)\partial_y w\right]\Big|_{y=1} = 0. \tag{59}$$

Согласно леммам 2 и 3 имеем

$$w^{(i)}(y,t) \in L_\infty(0,T;H^1(0,1)) \cap L_2(0,T;H^2(0,1)), \quad i = 1,2. \tag{60}$$

Умножая уравнение (57) на функцию $w(y,t)$ скалярно в $L_2(0,1)$ и учитывая (58)—(60), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} + \beta_1\|\partial_y w(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant \frac{\alpha(t)}{3}|w(1,t)|^2|[w^{(1)}(1,t) + w^{(2)}(1,t)]| +$$
$$+ \frac{\alpha(t)}{3}|w(0,t)|^2|[w^{(1)}(0,t) + w^{(2)}(0,t)]| + \alpha(t)\left|\int_0^1 [w^2\partial_y w^{(1)} + w^{(2)} w \partial_y w] dy\right|. \tag{61}$$

Оценим правую часть (61). Согласно (60) лемме 2 имеем

$$\frac{\alpha(t)}{3}[w^{(1)}(1,t) + w^{(2)}(1,t)]|w(1,t)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\alpha_2}{3}\left[\|w^{(1)}(1,t)\|_{L_\infty(0,T)} + \|w^{(2)}(1,t)\|_{L_\infty(0,T)}\right]|w(1,t)|^2 \leqslant C_1|w(1,t)|^2, \tag{62}$$

$$\frac{\alpha(t)}{3}[w^{(1)}(0,t)+w^{(2)}(0,t)]|w(0,t)|^2 \leqslant \\ \leqslant \frac{\alpha_2}{3}\big[\|w^{(1)}(0,t)\|_{L_\infty(0,T)}+\|w^{(2)}(0,t)\|_{L_\infty(0,T)}\big]|w(0,t)|^2 \leqslant C_2|w(0,t)|^2, \quad (63)$$

Далее,

$$\alpha(t)\int_0^1[w^2\partial_y w^{(1)}+w^{(2)}w\partial_y w]dy = \alpha(t)[|w(1,t)|^2w^{(1)}(1,t)-|w(0,t)|^2w^{(1)}(0,t)]+ \\ +\alpha(t)\int_0^1[-2w^{(1)}w\partial_y w+w^{(2)}w\partial_y w]dy \leqslant C_3|w(1,t)|^2+C_4|w(0,t)|^2+ \\ +\frac{\alpha_2^2}{\beta_1}\big[2\|w^{(1)}\|_{L_\infty(Q)}+\|w^{(2)}\|_{L_\infty(Q)}\big]^2\|w\|^2_{L_2(0,1)}+\frac{\beta_1}{4}\|\partial_y w\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant \\ \leqslant C_3|w(1,t)|^2+C_4|w(0,t)|^2+C_5\|w(y,t)\|^2_{L_2(0,1)}+\frac{\beta_1}{4}\|\partial_y w\|^2_{L_2(0,1)}. \quad (64)$$

Справедливы оценки

$$(C_1+C_3)|w(1,t)|^2 \leqslant (C_1+C_3)\|w(y,t)\|^2_{L_\infty(0,1)} \leqslant \\ \leqslant (C_1+C_3)B\|w(y,t)\|_{H^1(0,1)}\|w(y,t)\|_{L_2(0,1)} \leqslant \\ \leqslant \frac{\beta_1}{8}\|\partial_y w(y,t)\|^2_{L_2(0,1)}+\left[\frac{\beta_1}{8}+\frac{2(C_1+C_3)^2B^2}{\beta_1}\right]\|w(y,t)\|^2_{L_2(0,1)}, \quad (65)$$

$$(C_2+C_4)|w(0,t)|^2 \leqslant (C_2+C_4)\|w(y,t)\|^2_{L_\infty(0,1)} \leqslant \\ \leqslant (C_2+C_4)B\|w(y,t)\|_{H^1(0,1)}\|w(y,t)\|_{L_2(0,1)} \leqslant \\ \leqslant \frac{\beta_1}{8}\|\partial_y w(y,t)\|^2_{L_2(0,1)}+\left[\frac{\beta_1}{8}+\frac{2(C_2+C_4)^2B^2}{\beta_1}\right]\|w(y,t)\|^2_{L_2(0,1)}, \quad (66)$$

где B — норма оператора вложения $H^1(0,1)\hookrightarrow L_\infty(0,1)$.

На основе соотношений (61)—(66) устанавливаем

$$\frac{d}{dt}\|w(y,t)\|^2_{L_2(0,1)}+\beta_1\|\partial_y w(y,t)\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant \\ \leqslant \left[\frac{\beta_1}{2}+\frac{4B^2}{\beta_1}((C_1+C_3)^2+(C_2+C_4)^2)+2C_5\right]\|w(y,t)\|^2_{L_2(0,1)}, \quad \forall t\in(0,T].$$

Отсюда, применяя неравенство Гронуолла, получаем

$$\|w(y,t)\|^2_{L_2(0,1)}\equiv 0, \quad \forall t\in(0,T].$$

Это означает, что $w^{(1)}(y,t)\equiv w^{(2)}(y,t)$ в $L_2(Q_{yt})$, т.е. решение начально-граничной задачи (4)—(6) единственно. Лемма 6 доказана. □

Таким образом, из лемм 5 и 6 вытекает справедливость теоремы 2. Теорема 2 будет также использована в последующих разделах для решения задачи 1, т.е. при доказательстве теоремы 1.

8. Вторая вспомогательная начально-граничная задача.

В области

$$Q_{xt}=\big\{x,t \;\big|\; 0<x<t_0+kt,\ 0<t<T,\ t_0>0\big\}$$

рассмотрим начально-граничную задачу

$$\partial_t u+u\partial_x u-\nu\partial_x^2 u=f, \quad (67)$$

$$\left[\frac{1}{3}(u)^2-\nu\partial_x u\right]\Bigg|_{x=0}=0, \quad \left[\frac{1}{3}(u)^2-\nu\partial_x u\right]\Bigg|_{x=t_0+kt}=0 \quad (68)$$

с начальным условием

$$u(x,0) = 0, \quad x \in (0, t_0), \tag{69}$$

где ν, k — заданные положительные постоянные, функция $f(x,t)$ удовлетворяет условию

$$f \in L_2(Q_{xt}). \tag{70}$$

Задача 2. Доказать однозначную разрешимость начально-граничной задачи (67)—(69) при условии (70).

С помощью обратимого преобразования независимых переменных

$$y = y(x,t) = \frac{x}{t_0 + kt}, \quad t = t; x = x(y,t) = y(t_0 + kt), \quad t = t$$

перейдем от $\{x, t\}$ к $\{y, t\}$. При этом область Q_{xt} преобразуется в прямоугольную область

$$Q_{yt} = \big\{y, t: \ 0 < y < 1, \ 0 < t < T\big\}.$$

Задача 2 принимает следующий вид:

$$\partial_t w + \frac{1}{t_0 + kt} w \partial_y w - \frac{\nu}{(t_0 + kt)^2} \partial_y^2 w - \frac{ky}{t_0 + kt} \partial_y w = g(y,t), \tag{71}$$

$$\left[\frac{1}{3}(w)^2 - \frac{\nu}{t_0 + kt}\partial_y w\right]\Bigg|_{y=0} = 0, \quad \left[\frac{1}{3}(w)^2 - \frac{\nu}{t_0 + kt}\partial_y w\right]\Bigg|_{y=1} = 0, \tag{72}$$

с начальным условием

$$w(y,0) = 0, \quad y \in (0,1), \tag{73}$$

где $w(y,t) = u(x(y,t),t)$, $g(y,t) = f(x(y,t),t)$,

Начально-граничная задача (71)—(73) является частным случаем первой вспомогательной задачи (4)—(6), где функции

$$\alpha(t) = \frac{1}{t_0 + kt}, \quad \beta(t) = \frac{\nu}{(t_0 + kt)^2}, \quad \gamma(y,t) = \frac{ky}{t_0 + kt},$$

удовлетворяют условиям (7)—(8). Поэтому, как следствие теоремы 2, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (70) *и* $g \in L_2(Q_{yt})$. *Тогда начально-граничная задача* (71)—(73) *однозначно разрешима в пространстве* $w(y,t) \in H^{2,1}(Q_{yt})$.

Далее, учитывая соответствие пространств в областях Q_{xt} и Q_{yt}, т.е.

$$g \in L_2(Q_{yt}) \iff f \in L_2(Q_{xt}),$$

$$w \in H^{2,1}(Q_{yt}) = L_2(0,T; H^2(0,1)) \cap H^1(0,T; L_2(0,1)) \iff u \in H^{2,1}(Q_{xt}) =$$

$$= L_2(0,T; H^2(0, t_0 + kt)) \cap H^1(0,T; L_2(0, t_0 + kt)),$$

устанавливаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (70) *и* $f \in L_2(Q_{xt})$. *Тогда начально-граничная задача* (67)—(69) *однозначно разрешима в пространстве* $u(x,t) \in H^{2,1}(Q_{xt})$.

9. К решению задачи 1.

Области

$$Q_{xt} = \big\{x, t \ \big| \ 0 < x < kt, \ 0 < t < T\big\}$$

из раздела 2 поставим в соответствие семейство областей

$$Q_{xt}^n = \big\{x, t \ \big| \ 0 < x < kt, \ 1/n < t < T\big\}, \quad n \in \mathbb{N}^* \equiv \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_1, \ 1/n_1 < T\},$$

представляющих собой трапеции, и $\Omega_t = (0, kt)$ является сечением Q_{xt}^n для заданного значения переменной $t \in (1/n, T)$. Заметим, что в точке $t = 1/n$ область Q_{xt}^n не вырождается, при этом, между исходной областью Q_{xt} и областями Q_{xt}^n имеют место строгие вложения

$$Q_{xt}^n \subset Q_{xt}^{n+1} \subset \ldots \subset Q_{xt};$$

очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} Q^n_{xt} = Q_{xt}.$$

На трапеции Q^n_{xt} мы рассмотрим следующую начально-граничную задачу для уравнения Бюргерса относительно функции $u_n(x,t)$:

$$\partial_t u_n + u_n \partial_x u_n - \nu \partial_x^2 u_n = f_n, \tag{74}$$

$$\left.\left[\frac{1}{3}(u_n)^2 - \nu\partial_x u_n\right]\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\left[\frac{1}{3}(u_n)^2 - \nu\partial_x u_n\right]\right|_{x=kt} = 0 \tag{75}$$

с начальным условием

$$u_n(x,1/n) = 0, \quad x \in \Omega_{1/n} = (0,k/n). \tag{76}$$

Для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}^*$ начально-граничная задача (74)—(76) является задачей вида (67)—(69) при условиях (70), для которой справедлива теорема 4. Из теоремы 4 получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $f_n \in L_2(Q^n_{xt})$. Тогда для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}^*$ начально-граничная задача* (74)—(76) *однозначно разрешима в пространстве $u_n(x,t) \in H^{2,1}(Q^n_{xt})$.*

Для продолжения доказательства теоремы 1 понадобится следующее утверждение

Теорема 6. *При условиях теорем* 1 *и* 5 *справедлива оценка*

$$\|u_n(x,t)\|^2_{H^{2,1}(Q^n_{xt})} \leqslant C\|f_n(x,t)\|^2_{L_2(Q^n_{xt})}. \tag{77}$$

Для доказательства теоремы 6 установим следующие три леммы.

Лемма 7. *Существует такая положительная, не зависящая от n постоянная K_1, что для всех $t \in [1/n, T]$ имеет место оценка*

$$\|u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \nu\int_{1/n}^{t} \|\partial_x u_n(x,\tau)\|^2_{L_2(\Omega_t)}d\tau \leqslant K_1\|f_n(x,t)\|^2_{L_2(Q^n_{xt})}. \tag{78}$$

Доказательство. Умножая (74) на $u_n(x,t)$ скалярно в $L_2(\Omega_t)$ и используя равенства

$$\int_0^{kt} u_n(x,t)\partial_x u_n(x,t)u_n(x,t)dx = \frac{1}{3}u_n^3(kt,t) - \frac{1}{3}u_n^3(0,t),$$

$$\frac{d}{dt}\|u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} = 2\int_0^{kt} \partial_t u_n(x,t)u_n(x,t)dx + k|u_n(kt,t)|^2,$$

получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{kt}|u_n(x,t)|^2dx + \nu\int_0^{kt}|\partial_x u_n(x,t)|^2dx = \int_0^{kt} f_n(x,t)u_n(x,t)dx + \frac{k}{2}|u_n(kt,t)|^2. \tag{79}$$

Установим оценки для двух последних слагаемых из (79). Имеем

$$\int_0^{kt} f_n(x,t)u_n(x,t)dx \leqslant \frac{1}{2}\|f_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \frac{1}{2}\|u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)}, \tag{80}$$

$$\begin{aligned}\frac{k}{2}|u_n(kt,t)|^2 \leqslant \frac{k}{2}\|u_n(x,t)\|^2_{L_\infty(\Omega_t)} \leqslant \frac{kK^2}{2}\|u_n(x,t)\|_{H^1(\Omega_t)}\|u_n(x,t)\|_{L_2(\Omega_t)} \leqslant \\ \leqslant \frac{\nu}{2}\|\partial_x u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \left[\frac{\nu}{2} + \frac{k^2K^4}{8\nu}\right]\|u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)},\end{aligned} \tag{81}$$

где K — величина из интерполяционного неравенства. Из (79)—(81) следует

$$\frac{d}{dt}\|u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \nu\|\partial_x u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} \leqslant \|f_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + K_0\|u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)},$$

где

$$K_0 = \nu + \frac{k^2B^2}{4\nu} + 1.$$

Отсюда получаем два неравенства

$$\frac{d}{dt}\|u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} \leqslant \|f_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + K_0\|u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)}, \quad \|u_n(x,1/n)\|^2_{L_2(\Omega_{1/n})} = 0, \tag{82}$$

$$2\nu\|\partial_x u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} \leqslant \|f_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + K_0\|u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)}. \tag{83}$$

Наконец, применяя неравенство Гронуолла, из (82)—(83) получаем оценку (78). Лемма 7 доказана. □

Лемма 8. *Существует такая положительная, не зависящая от n постоянная K_2, что для всех $t \in [1/n, T]$ имеет место оценка*

$$\|\partial_x u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \int\limits_{1/n}^{t} \|\partial_x^2 u_n(x,\tau)\|^2_{L_2(\Omega_t)}d\tau + k\|\partial_x u(kt,t)\|^2_{L_2(1/n,t)} \leqslant K_2\|f_n(x,t)\|^2_{L_2(Q^n_{xt})}. \tag{84}$$

Доказательство. Умножая уравнение (74) на $-\partial_x^2 u_n(x,t)$ скалярно в $L_2(\Omega_t)$ и используя равенство

$$\frac{d}{dt}\|\partial_x u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} = 2\int\limits_{\Omega_t} \partial_t\partial_x u_n(x,t)\partial_x u_n(x,t)dx + k|\partial_x u_n(kt,t)|^2,$$

получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \nu\|\partial_x^2 u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} = \big(u_n(x,t)\partial_x u_n(x,t), \partial_x^2 u_n(x,t)\big) -\\ - \big(f_n(x,t), \partial_x^2 u_n(x,t)\big) + \partial_t u_n(x,t)\partial_x u_n(x,t)\big|_{x=0}^{x=kt} + \frac{k}{2}|\partial_x u_n(kt,t)|^2 =\\ = \big(u_n(x,t)\partial_x u_n(x,t), \partial_x^2 u_n(x,t)\big) -\\ - \big(f_n(x,t), \partial_x^2 u_n(x,t)\big) + \frac{1}{9\nu}\partial_t[u_n(x,t)]^3\big|_{x=0}^{x=kt} + \frac{k}{2}|\partial_x u_n(kt,t)|^2.\end{aligned} \tag{85}$$

Далее, отметим справедливость следующего равенства:

$$\int\limits_{1/n}^{t} \partial_t u_n(x,t)\partial_x u_n(x,t)\big|_{x=0}^{x=kt}dt = \frac{1}{9\nu}[u_n(kt,t)]^3 - \frac{1}{9\nu}[u(0,t)]^3 - k\|\partial_x u(kt,t)\|^2_{L_2(1/n,t)}, \tag{86}$$

где использованы граничные условия (75) и равенство

$$\frac{d}{dt}u_n(kt,t) = \partial_t u_n(x,t)_{|x=kt} + k\partial_x u_n(x,t)_{|x=kt}.$$

Для первых двух слагаемых справа для (86) установим следующие оценки:

$$\begin{aligned}\frac{1}{9\nu}|u_n(kt,t)|^3 \leqslant \|u_n(x,t)\|^3_{L_\infty(\Omega_t)} \leqslant \frac{1}{9\nu}\|u_n(x,t)\|^{3/2}_{H^1(\Omega_t)}\|u_n(x,t)\|^{3/2}_{L_2(\Omega_t)} =\\ = \frac{1}{9\nu}\|u_n(x,t)\|^{3/2}_{H^1(\Omega_t)}\|u_n(x,t)\|^{1/2}_{L_2(\Omega_t)}\|u_n(x,t)\|_{L_2(\Omega_t)}.\end{aligned}$$

В предыдущем соотношении мы использовали интерполяционное неравенство. Теперь, применяя неравенство Юнга (32), где в (32) приняты обозначения

$$A = \|u_n(x,t)\|^{3/2}_{H^1(\Omega_t)}, \quad B = \frac{1}{9\nu}\|u_n(x,t)\|_{L_2(\Omega_t)}\|u_n(x,t)\|^{1/2}_{L_2(\Omega_t)}, \quad a = \frac{1}{6}, \quad p = \frac{4}{3}, \quad q = 4,$$

получаем

$$\frac{1}{9\nu}|u_n(kt,t)|^3 \leqslant \frac{1}{8}\|\partial_x u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \left[\frac{1}{8} + \frac{2}{3^5\nu^4}\|u_n(x,t)\|^4_{L_2(\Omega_t)}\right]\|u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{8}\|\partial_x u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + D_1, \quad (87)$$

где постоянная D_1 определяется согласно оценкам леммы 2 и следствия 1. Аналогично предыдущему получаем

$$\frac{1}{9\nu}|u_n(0,t)|^3 \leqslant \frac{1}{8}\|\partial_x u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \left[\frac{1}{8} + \frac{2}{3^5\nu^4}\|u_n(x,t)\|^4_{L_2(\Omega_t)}\right]\|u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{8}\|\partial_x u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + D_0, \quad (88)$$

где постоянная D_0 определяется согласно оценкам леммы 2 и следствия 1.

Рассмотрим оценки нелинейных слагаемых из (85). Прежде всего, имеем

$$|(u_n(x,t)\partial_x u_n(x,t), \partial_x^2 u_n(x,t))| \leqslant \\ \leqslant \|u_n(x,t)\|_{L_4(\Omega_t)}\|\partial_x^2 u_n(x,t)\|_{L_2(\Omega_t)}\|\partial_x u_n(x,t)\|_{L_4(\Omega_t)} \leqslant \\ \leqslant \|u_n(x,t)\|_{L_4(\Omega_t)}\|\partial_x u_n(x,t)\|_{H^1(\Omega_t)}\|\partial_x u_n(x,t)\|_{L_4(\Omega_t)}. \quad (89)$$

Далее, учитывая интерполяционное неравенство

$$\|\partial_x u_n(x,t)\|_{L_4(\Omega_t)} \leqslant C\|\partial_x u_n(x,t)\|^{1/2}_{H^1(\Omega_t)}\|\partial_x u_n(x,t)\|^{1/2}_{L_2(\Omega_t)}, \quad \forall \partial_x u_n(x,t) \in H^1(\Omega_t)$$

(см. [8, Theorems 5.8—5.9, p. 140—141]), из (88) получим

$$|(u_n(x,t)\partial_x u_n(x,t), \partial_x^2 u_n(x,t))| \leqslant \\ \leqslant C\|u_n(x,t)\|_{L_4(\Omega_t)}\|\partial_x u_n(x,t)\|^{3/2}_{H^1(\Omega_t)}\|\partial_x u_n(x,t)\|^{1/2}_{L_2(\Omega_t)} \leqslant \\ \leqslant \frac{\nu}{8}\|\partial_x^2 u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \left[\frac{\nu}{8} + C_2\|u_n(x,t)\|^4_{L_4(\Omega_t)}\right]\|\partial_x u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)}. \quad (90)$$

Здесь мы воспользовались неравенством Юнга (32), где $a = \nu/6$, $p = 4/3$, $q = 4$,

$$A = \|\partial_x u_n(x,t)\|^{3/2}_{H^1(\Omega_t)}, \quad B = C\|u_n(x,t)\|_{L_4(\Omega_t)}\|\partial_x u_n(x,t)\|^{1/2}_{L_2(\Omega_t)}.$$

В (85) оценим последнее слагаемое справа. Учитывая интерполяционное неравенство, имеем

$$\frac{k}{2}|\partial_x u_n(kt,t)|^2 \leqslant \frac{k}{2}\|\partial_x u_n(x,t)\|^2_{L_\infty(\Omega_t)} \leqslant \frac{kK^2}{2}\|\partial_x u_n\|_{H^1(\Omega_t)}\|\partial_x u_n\|_{L_2(\Omega_t)} \leqslant \\ \leqslant \frac{\nu}{8}\|\partial_x^2 u_n\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \left[\frac{\nu}{8} + \frac{k^2K^4}{2\nu}\right]\|\partial_x u_n\|^2_{L_2(\Omega_t)}, \quad (91)$$

где K — постоянная из [8, Theorem 5.9, p. 140—141].

Наконец, для неоцененного слагаемого из (85) имеем

$$|(f_n(x,t), \partial_x^2 u_n(x,t))| \leqslant \frac{\nu}{4}\|\partial_x^2 u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + C_4\|f_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)}. \quad (92)$$

Из (85), (87)—(92), интегрируя (85) по t от $1/n$ до t, получаем

$$\|\partial_x u_n(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \nu\int\limits_{1/n}^{t}\|\partial_x^2 u_n(x,\tau)\|^2_{L_2(\Omega_\tau)}d\tau + k\|\partial_x u(kt,t)\|^2_{L_2(1/n,t)} \leqslant \\ \leqslant 2C_4\int\limits_{1/n}^{t}\|f_n(x,\tau)\|^2_{L_2(\Omega_\tau)}d\tau + \int\limits_{1/n}^{t}C_5(\tau)\|\partial_x u_n(x,\tau)\|^2_{L_2(\Omega_\tau)}d\tau + D_0 + D_1, \quad (93)$$

где

$$C_5(t) = \frac{\nu}{2} + \frac{k^2K^4}{\nu} + 2C_2\|u_n(x,t)\|^4_{L_4(\Omega_t)}.$$

Из неравенства (93) аналогично доказательству леммы 7 получаем искомую оценку (84). Лемма 8 доказана. □

Лемма 9. *Существует такая положительная, не зависящая от n постоянная K_3, что для всех $t \in (1/n, T]$ имеют место неравенство*

$$\|\partial_t u_n(x,t)\|^2_{L_2(Q^n_{xt})} \leqslant K_3\|f_n\|^2_{L_2(Q^n_{xt})}. \tag{94}$$

Доказательство. Оценка (94) следует из уравнения (74). Действительно, имеем

$$\|\partial_t u_n\|_{L_2(Q^n_{xt})} \leqslant \|u_n\partial_x u_n\|_{L_2(Q^n_{xt})} + \nu\|\partial^2_x u_n\|_{L_2(Q^n_{xt})} + \|f_n\|_{L_2(Q^n_{xt})} \leqslant K_3\|f_n\|_{L_2(Q^n_{xt})},$$

где требуется получить оценку только для слагаемого $u_n\partial_x u_n$. Согласно оценкам (78) и (84) из лемм 7–8 находим

$$\|u_n\partial_x u_n\|^2_{L_2(Q^n_{xt})} \leqslant \int\limits_{1/n}^{T} \|u_n\|^2_{L_\infty(\Omega_t)}\|\partial_x u_n\|^2_{L_2(\Omega_t)}dt \leqslant$$

$$\leqslant \|\partial_x u_n\|^2_{L_\infty(1/n,T;L_2(\Omega_t))}\int\limits_{1/n}^{T} \|u_n\|_{H^1(\Omega_t)}\|u_n\|_{L_2(\Omega_t)}dt.$$

Далее, получаем

$$\int\limits_{1/n}^{T} \|u_n\|_{H^1(\Omega_t)}\|u_n\|_{L_2(\Omega_t)}dt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{1/n}^{T}\left[\|u_n\|^2_{H^1(\Omega_t)} + \|u_n\|^2_{L_2(\Omega_t)}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\|\partial_x u_n\|^2_{L_2(Q^n_{xt})} + \|u_n\|^2_{L_2(Q^n_{xt})} \leqslant \left[\frac{K_1}{2\nu} + K_1T\right]\|f_n\|^2_{L_2(Q^n_{xt})} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{K_1}{2\nu} + K_1T\right]\|f\|^2_{L_2(Q_{xt})} < \text{const},$$

$$\|\partial_x u_n\|^2_{L_\infty(1/n,T;L_2(\Omega_t))} \leqslant K_2\|f_n\|^2_{L_2(Q^n_{xt})},$$

где постоянные K_1, K_2 взяты из лемм 7—8. Лемма 9 доказана. □

Учитывая очевидное неравенство

$$\|f_n\|_{L_2(Q^n_{xt})} \leqslant \|f\|_{L_2(Q_{xt})} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

из лемм 7—9 получаем справедливость оценки (77) теоремы 6. Таким образом, теорема 6 доказана.

10. Доказательство теоремы 1. Существование. Доказательство теоремы 1 основано на теореме 6. В граничных задачах (74)—(76) каждый элемент из последовательности $\{u_n(x,t), f_n(x,t), \{x,t\} \in Q^n_{xt}, n \in \mathbb{N}^*\}$ продолжаем нулями соответственно на всю область Q_{xt}. В результате получим последовательность функций, которую обозначим через

$$\{\widetilde{u_n(x,t)}, \widetilde{f_n(x,t)}, n \in \mathbb{N}^*\}. \tag{95}$$

Очевидно, что каждая пара функций из последовательности (95) удовлетворяет граничной задаче (1)—(2) в области Q_{xt} согласно теоремам 5—6. Кроме того, заметим, что оценка (77) теоремы 6 будет усилена, если заменить в ее правой части $\|\widetilde{f_n(x,t)}\|_{L_2(Q_{xt})}$ на выражение $\|f(x,t)\|_{L_2(Q_{xt})}$, так как

$$\|\widetilde{f_n(x,t)}\|_{L_2(Q_{xt})} \leqslant \|f(x,t)\|_{L_2(Q_{xt})} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Таким образом, получаем ограниченную последовательность функций (95), из которой можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность (для этой подпоследовательности сохраним обозначение n для индекса), т.е.

$$\widetilde{u_n(x,t)} \to u(x,t) \text{ слабо в } H^{2,1}(Q_{xt}), \tag{96}$$

$$\widetilde{u_n(x,t)} \to u(x,t) \text{ сильно в } L_2(0,T;H^1(\Omega_t)), \tag{97}$$

$$\widetilde{u_n(kt,t)} \to u(kt,t) \text{ сильно в } L_2(0,T), \tag{98}$$

$$\widetilde{u_n(0,t)} \to u(0,t) \text{ сильно в } L_2(0,T). \tag{99}$$

Согласно (96)—(99) можем перейти к пределу при $n \to \infty$ в интегральных тождествах

$$\int\limits_{Q_{xt}} [\partial_t \widetilde{u_n(x,t)} + \widetilde{u_n(x,t)}\partial_x \widetilde{u_n(x,t)} - \nu\partial_x^2 \widetilde{u_n(x,t)} - \widetilde{f_n(x,t)}]\psi(x,t)dxdt \to$$

$$\to \int\limits_{Q_{xt}} [\partial_t u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) - \nu\partial_x^2 u(x,t) - f(x,t)]\psi(x,t)dxdt = 0 \tag{100}$$

для всех $\psi \in L_2(Q_{xt})$,

$$\int\limits_0^T \left[\frac{1}{3}(\widetilde{u_n(x,t)})^2 - \nu\partial_x \widetilde{u_n(x,t)}\right]\Bigg|_{x=0} \psi_0(t)dt \to \int\limits_0^T \left[\frac{1}{3}(u(x,t))^2 - \nu\partial_x u(x,t)\right]\Bigg|_{x=0} \psi_0(t)dt = 0 \tag{101}$$

для всех $\psi_0 \in L_2(0,T)$ и

$$\int\limits_0^T \left[-\frac{1}{3}(\widetilde{u_n(x,t)})^2 + \nu\widetilde{u_n(x,t)}\right]\Bigg|_{x=kt} \psi_1(t)dt \to \int\limits_0^T \left[-\frac{1}{3}(u(x,t))^2 + \nu u(x,t)\right]\Bigg|_{x=kt} \psi_1(t)dt = 0 \tag{102}$$

для всех $\psi_1 \in L_2(0,T)$. Итак, мы установили, что граничная задача (1)—(2) имеет решение $u(x,t) \in H^{2,1}(Q_{xt})$ в смысле интегральных тождеств (100)—(102). Теорема 1 доказана в части существования решения.

11. Доказательство теоремы 1. Единственность. Предположим, что начально-граничная задача (1)—(2) имеет два различных решения $u^{(1)}(x,t)$ и $u^{(2)}(x,t)$. Тогда их разность $u(x,t) = u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t)$ будет удовлетворять следующей однородной задаче:

$$\partial_t u + u\partial_x u^{(1)} + u^{(2)}\partial_x u - \nu\partial_x^2 u = 0, \tag{103}$$

$$\left[\frac{1}{3}u(u^{(1)} + u^{(2)}) - \nu\partial_x u\right]\Bigg|_{x=0} = 0, \tag{104}$$

$$\left[\frac{1}{3}u(u^{(1)} + u^{(2)}) - \nu\partial_x u\right]\Bigg|_{x=kt} = 0. \tag{105}$$

Согласно леммам 7 и 8 имеем

$$u^{(i)}(x,t) \in L_\infty(0,T;H^1(\Omega_t)) \cap L_2(0,T;H^2(\Omega_t)), \quad u^{(i)}(kt,t),\ u^{(i)}(0,t) \in L_\infty(0,T), \quad i = 1,2. \tag{106}$$

Умножая уравнение (103) на функцию $u(x,t)$ скалярно в $L_2(\Omega_t)$ и учитывая (104)—(105), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \nu\|\partial_x u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} = \frac{1}{3}|u(kt,t)|^2[u^{(1)}(kt,t) + u^{(2)}(kt,t)]+$$

$$+ \frac{1}{3}|u(0,t)|^2[u^{(1)}(0,t) + u^{(2)}(0,t)] - \int\limits_{\Omega_t} [u^2\partial_x u^{(1)} + u^{(2)}u\partial_x u]dx + \frac{k}{2}|u(kt,t)|^2. \tag{107}$$

Здесь использовано равенство

$$\frac{d}{dt}\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,kt)} = 2\int\limits_{\Omega_t} \partial_t u(x,t)u(x,t)dx + k|u(kt,t)|^2.$$

Оценим правую часть (107). Согласно (106) и леммам 7 и 8 имеем

$$\frac{1}{3}[u^{(1)}(kt,t)+u^{(2)}(kt,t)]|u(kt,t)|^2 \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{3}\big[\|u^{(1)}(x,t)\|_{H^1(\Omega_t)} + \|u^{(2)}(x,t)\|_{H^1(\Omega_t)}\big]|u(kt,t)|^2 \leqslant \frac{2\sqrt{K_2}}{3}|u(kt,t)|^2, \quad (108)$$

$$\frac{1}{3}[u^{(1)}(0,t)+u^{(2)}(0,t)]|u(0,t)|^2 \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{3}\big[\|u^{(1)}(0,t)\|_{H^1(\Omega_t)} + \|u^{(2)}(0,t)\|_{H^1(\Omega_t)}\big]|u(0,t)|^2 \leqslant \frac{2\sqrt{K_2}}{3}|u(0,t)|^2, \quad (109)$$

$$\int\limits_{\Omega_t}[u^2\partial_x u^{(1)} + u^{(2)}u\partial_x u]dx = [|u(kt,t)|^2u^{(1)}(kt,t) - |u(0,t)|^2u^{(1)}(0,t)] + \\ + \int\limits_{\Omega_t}[-2u^{(1)}u\partial_x u + u^{(2)}u\partial_x u]dx \leqslant \sqrt{K_2}|u(kt,t)|^2 + \sqrt{K_2}|u(0,t)|^2 + \\ + \frac{1}{2\nu}\big[2\|u^{(1)}\|_{H^1(\Omega_t)} + \|u^{(2)}\|_{H^1(\Omega_t)}\big]^2\|u\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \frac{\nu}{2}\|\partial_x u\|^2_{L_2(\Omega_t)} \leqslant \\ \leqslant \left[\frac{2\sqrt{K_2}}{3} + \sqrt{K_2}\right][|u(kt,t)|^2 + |u(0,t)|^2] + \frac{9K_2}{2\nu}\|u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \frac{\nu}{2}\|\partial_x u\|^2_{L_2(\Omega_t)} = \\ = C_3|u(kt,t)|^2 + C_4|u(0,t)|^2 + C_5\|u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \frac{\nu}{2}\|\partial_x u\|^2_{L_2(\Omega_t)}. \quad (110)$$

На основе соотношений (107)—(110) устанавливаем

$$\frac{d}{dt}\|u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \nu\|\partial_x u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} \leqslant \\ \leqslant (2C_3+k)|u(kt,t)|^2 + 2C_4|u(0,t)|^2 + 2C_5\|u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} \quad \forall t \in (0,T]. \quad (111)$$

Теперь оценим два предпоследних слагаемых из (111). Учитывая интерполяционное неравенство, будем иметь

$$2C|u(kt,t)|^2 \leqslant 2C\|u(x,t)\|^2_{L_\infty(\Omega_t)} \leqslant 2CK^2\|u\|_{H^1(\Omega_t)}\|u\|_{L_2(\Omega_t)} \leqslant \\ \leqslant \frac{\nu}{4}\big[\|u\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \|\partial_x u\|^2_{L_2(\Omega_t)}\big] + \frac{4C^2K^4}{\nu}\|u\|^2_{L_2(\Omega_t)} = \\ \leqslant \frac{\nu}{4}\|\partial_x u\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \left[\frac{\nu}{4} + \frac{4C^2K^4}{\nu}\right]\|u\|^2_{L_2(\Omega_t)}, \quad (112)$$

где $C = C_3 + k/2$ и K — постоянная из [8, Theorem 5.9, p. 140—141].

Аналогично (112) устанавливаем оценку

$$2\tilde{C}|u(0,t)|^2 \leqslant \frac{\nu}{4}\|\partial_x u\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \left[\frac{\nu}{4} + \frac{4\tilde{C}^2K^4}{\nu}\right]\|u\|^2_{L_2(\Omega_t)}, \quad (113)$$

где $\tilde{C} = C_4$. Применяя неравенство Гронуолла, из (111)—(113) получаем

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} \equiv 0, \quad \forall t \in (0,T].$$

Это означает, что $u^{(1)}(x,t) \equiv u^{(2)}(x,t)$ в $L_2(Q_{xt})$, т.е. решение начально-граничной задачи 1 (1)—(2) единственно. Теорема 1 полностью доказана.

12. Заключение. В работе установлены априорные оценки и теорема о разрешимости в соболевских классах граничной задачи типа Неймана для уравнения Бюргерса в вырождающейся угловой области, точка вырождения которой находится в начале координат. Причем, подвижная часть границы подчиняется линейному закону. Установленные результаты могут оказаться полезными в задачах моделирования нелинейных тепловых полей в контактных устройствах высокого напряжения, нелинейных процессов диффузии и распространения инородных включений в потоках водных и атмосферных ареалов и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Космакова М. Т., Рамазанов М. И.* Об одной однородной задаче для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области// Сиб. мат. ж. — 2015. — *56*, № 6. — С. 1234–1248.
2. *Веригин Н. Н.* Об одном классе гидромеханических задач для областей с подвижными границами// в кн.: Динамика жидкости со свободными границами. — Новосибирск, 1980. — Т. 46. — С. 23–32.
3. *Вишик М. И., Фурсиков А. В.* Математические задачи статистической гидродинамики. — М.: Наука, 1980.
4. *Карташов Э. М.* Проблема теплового удара в области с движущейся границей на основе новых интегральных соотношений// Изв. РАН. Энергетика. — 1997. — *4*. — С. 122–137.
5. *Ким Е. И., Омельченко В. Т., Харин С. Н.* Математические модели тепловых процессов в электрических контактах. — Алма-Ата: АН КазССР, 1977.
6. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А., Плотницкий Т. А.* Задачи со свободными границами для нелинейного эволюционного уравнения в проблемах металлургии, медицины, экологии// Укр. мат. ж. — 1992. — *44*, № 1. — С. 67–75.
7. *Солонников В. А., Фазано А.* Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами// Зап. науч. семин. ПОМИ.. — *269 2000*. — С. 322–338.
8. *Adams R. A., Fournier J. J. F.* Sobolev spaces. — Amsterdam: Elsevier, 2003.
9. *Amangaliyeva M. M., Jenaliyev M. T., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I.* About Dirichlet boundary-value problem for the heat equation in the infinite angular domain// Boundary-Value Problems. — 2014. — *213*. — P. 1–21.
10. *Amangaliyeva M. M., Jenaliyev M. T., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I.* On the solvability of nonhomogeneous boundary-value problem for the Burgers equation in the angular domain and related integral equations// Springer Proc. Math. Stat. — 2017. — *216*. — P. 123–141.
11. *Benia Y., Sadallah B.-K.* Existence of solutions to Burgers equations in domains that can be transformed into rectangles// Electron. J. Differ. Equations. — 2016. — *157*. — P. 1–13.
12. *Benia Y., Sadallah B.-K.* Existence of solutions to Burgers equations in a non-parabolic domain// Electron. J. Differ. Equations. — 2018. — *20*. — P. 1–13.
13. *Burgers J. M.* The Nonlinear Diffusion Equation. Asymptotic Solutions and Statistical Problems. — Boston, USA: Reidel Publishing Company, 1974.
14. *Farina A., Preziosi L.* Non-isothermal injection moulding with resin cure and perform deformability// Composites. A. Appl. Sci. Manufact. — 2000. — *31*, № 12. — P. 1355–1372.
15. *Fasano A.* A One-dimensional flow problem in porous media with hydrophile grains// Math. Meth. Appl. Sci. — 1999. — *22*. — P. 605–617.
16. *Fasano A., Solonnikov V.* Estimates of weighted Hölder norms of the solutions to a parabolic boundary-value problem in an initially degenerate domain// Rend. Mat. Acc. Lincei, Ser. 9. — 2002. — *13*, № 1. — P. 23–41.
17. *Fasano A., Solonnikov V.* Unsaturated incompressible flows in adsorbing porous media// Math. Meth. Appl. Sci. — 2003. — *26*. — P. 1391–1419.
18. *Lions J.-L., Magenes E.* Problemes aux limites non homogenes et applications. — Paris: Dunod, 1968.
19. *Molinet L., Pilod D., Vento S.* On well-posedness for some dispersive perturbations of Burgers equation// Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Lineaire. — 2018. — *35*, № 7. — P. 1719–1756.
20. *Nouri Z., Bendaas S., Kadem H. E.* *N* wave and periodic wave solutions for Burgers equations// Int. J. Anal. Appl. — 2020. — *18*, № 2. — P. 304–318.
21. *Riesz F., Sz.-Nagy B.* Leçons d'Analyse Fonctionelle. — Budapest: Akademiai Kiado, 1972.

22. *Rottmann-Matthes J.* Freezing similarity solutions in the multidimensional Burgers equation// Nonlinearity. — 2017. — *30*, № 12. — P. 4558–4586.
23. *Selmi R., Chaabani A.* Well-posedness to 3D Burgers' equation in critical Gevrey Sobolev spaces// Arch. Math. — 2019. — *112*, № 6. — P. 661–672.
24. *Yang X.-J., Tenreiro Machado J. A.* A new fractal nonlinear Burgers' equation arising in the acoustic signals propagation// Math. Meth. Appl. Sci. — 2019. — *42*, № 18. — P. 7539–7544.
25. *Zhu N., Liu Zh., Zhao K.* On the Boussinesq–Burgers equations driven by dynamic boundary conditions// J. Differ. Equations. — 2018. — *264*, № 3. — P. 2287–2309.

Дженалиев Мувашархан Танабаевич
Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан, Алматы, Казахстан
E-mail: muvasharkhan@gmail.com

Ергалиев Мади Габиденович
Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан, Алматы, Казахстан
E-mail: ergaliev.madi.g@gmail.com

Асетов Алибек Асенович
Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова
E-mail: bekaaskar@mail.ru

Аязбаева Асем Мухтаровна
Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан, Алматы, Казахстан
E-mail: aayazbayeva@gmail.com