ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 63–67
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-63-67

УДК 517.957

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2022 г. **Н. Ж. КАЖКЕНОВА, Н. Т. ОРУМБАЕВА**

Аннотация. В работе исследуются вопросы существования решения нелинейной краевой задачи для уравнения третьего порядка и предлагается алгоритм нахождения приближенного решения.

***Ключевые слова*:** нелинейная краевая задача, уравнение в частных производных, приближенное решение.

ON A NONLINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2022 **N. Zh. KAZHKENOVA, N. T. ORUMBAYEVA**

Abstract. In this paper, we examine the existence of a solution to a nonlinear boundary-value problem for a third-order partial differential equation and propose an algorithm for the search for an approximate solution.

***Keywords and phrases*:** nonlinear boundary-value problem, partial differential equation, approximate solution.

***AMS Subject Classification*:** 35G30

На множестве $\Omega = [X_0, X] \times [0, T]$, $X_0 > 0$, рассмотрим задачу вида

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w\frac{\partial w}{\partial t} + \varphi\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \frac{1}{x^2}\psi(t), \tag{1}$$

$$w(x, 0) = 0, \tag{2}$$

$$\alpha w''_{xt}(x, 0) = \beta w''_{xt}(x, T), \tag{3}$$

где $\varphi \neq 0$, α, β — константы, $\psi(t)$ — непрерывная на $[0, T]$ функция. При $\psi(t) = 0$ получим уравнение Бенджамина—Бона—Махони. Уравнение Бенджамина—Бона—Махони имеет многочисленные приложения, в том числе описывает длинные волны в дисперсных системах (см. [1, 4, 8]).

В настоящей работе исследуются вопросы существования решения нелинейной краевой задачи для уравнения третьего порядка и предлагается алгоритм нахождения приближенного решения. С помощью дополнительных функций рассматриваемая задача сводится к многоточечной задаче, состоящей из краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка и функционального соотношения. При установлении условий разрешимости краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения использован метод параметризации

Работа выполнена при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № AP09259780, 2021-2023).

(см. [9]). В [2–7, 11–14] метод параметризации был применен для решения нелокальных, периодических краевых задач системы гиперболических уравнений. Применение данного метода позволило предложить алгоритмы нахождения приближенного решения исследуемой задачи и доказать его сходимость.

Точное решение задачи будем искать в виде $w(x,t) = u(t)/x$; тогда

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{u}{x^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{u'}{x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = -\frac{u'}{x^2}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = -\frac{u''}{x^2}$$

и функция $u = u(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi u'' - uu' - u = \psi(t) \tag{4}$$

с условиями

$$u(0) = 0, \quad \alpha u'(0) = \beta u'(T).$$

Итак, получили периодическую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Поставим в соответствие уравнению (4) эквивалентную систему первого порядка, обозначив $z(t) = u'(t)$, после чего будем иметь эквивалентную задачу:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F(t, z), \quad \alpha z(0) = \beta z(T), \tag{5}$$

где

$$F(t, z) = \frac{1}{\varphi}\left[(z+1)\int_0^t z(\tau)d\tau + \psi(t)\right].$$

Для нахождения решения задачи (5) применим метод параметризации.

Возьмем шаг $h > 0$ $(Nh = X)$ и по нему произведем разбиение

$$[0, T) = \bigcup_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh), \quad N = 1, 2, \ldots.$$

Сужение функций $u(t)$, $z(t)$ на r-й интервал $[(r-1)h, rh)$ обозначим через $u_r(t)$, $z_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, и сведем задачу (5) к многоточечной краевой задаче

$$\frac{\partial z_r}{\partial t} = F(t, z_r), \quad \alpha z(0) = \beta \lim_{t \to Nh-0} z_N(t), \quad \lim_{t \to sh-0} z_s(t) = z_{s+1}(sh), \quad s = \overline{1, N-1},$$

где последнее условие представляет собой условие непрерывности решения во внутренних точках разбиения интервала.

Обозначим через λ_r значение функции $z_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, и на каждом интервале $[(r-1)h, rh)$ произведем замену $v_r(t) = z_r(t) - \lambda_r$. Получим систему многоточечных краевых задач с параметром:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = F(t, v_r(t) + \lambda_r), \quad v_r[(r-1)h, rh) = 0, \quad r = \overline{1, N}, \tag{6}$$

$$\alpha\lambda_1 - \beta\lambda_N = \lim_{t \to Nh-0} v_N(t), \tag{7}$$

$$\lambda_s + \lim_{x \to sh-0} v_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1, N-1}, \tag{8}$$

При фиксированных значениях параметра λ_r задача Коши (6) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра

$$v_r(t) = \int_{(r-1)h}^{t} F(\tau, v_r(\tau) + \lambda_r)d\tau, \quad \tau \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}. \tag{9}$$

Вместо $v_r(t)$ подставим соответствующую правую часть (9); повторив процесс ν раз ($\nu = 1, 2, \ldots$), получим

$$v_r(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} F\left(\tau_1, \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} F\left(\tau_2, \ldots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} F(\tau_\nu, v_r(\tau_\nu) + \lambda_r) d\tau_\nu + \ldots + \lambda_r\right) d\tau_2 + \lambda_r\right) d\tau_1. \quad (10)$$

Отсюда, определив $\lim\limits_{t\to rh-0} v_r(t)$, подставив в (7)—(8) на $h > 0$, получим систему уравнений относительно $\lambda_r \in \mathbb{R}^n$:

$$\lambda_1 - \lambda_N -$$
$$- \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} F\left(\tau_1 \int\limits_{(N-1)h}^{\tau_1} F\left(\tau_2, \ldots \int\limits_{\nu-1}^{\tau_{(N-1)h}} F(\tau_\nu, v_N(\tau_\nu) + \lambda_N) d\tau_\nu + \ldots + \lambda_N\right) d\tau_2 + \lambda_N\right) d\tau_1 = 0,$$

$$\lambda_s + \int\limits_{(s-1)h}^{sh} F\left(\tau_1, \int\limits_{(s-1)h}^{\tau_1} F\left(\tau_2, \ldots \int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{\nu-1}} F(\tau_\nu, v_s(\tau_\nu) + \lambda_s) d\tau_\nu + \ldots + \lambda_s\right) d\tau_2 + \lambda_s\right) d\tau_1 = \lambda_{s+1},$$

$s = \overline{1, N-1}$, которую запишем в виде

$$Q_{\nu,h}(v, \lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{nN}. \quad (11)$$

Таким образом, для нахождения пары $(\lambda_r, v_r(t))$, $r = \overline{1, N}$, имеем замкнутую систему, состоящую из уравнений (11), (10).

Обозначим через $C([(r-1)h, rh], \mathbb{R}^n)$ множество непрерывных и ограниченных на $[(r-1)h, rh]$ функций $v_r : [(r-1)h, rh] \to \mathbb{R}^n$.

Взяв за начальное приближение $v_r(t) = 0$ параметр $\lambda^{(0)}$, определим из системы уравнений (11). Подставляя (10) в правую часть уравнения вместо $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, находим $v_r^{(0)}(t)$, $t \in [(r-1)h, rh]$, $r = \overline{1, N}$.

Взяв $\lambda^{(0)}$, $v^{(0)}[t]$ и числа $\rho > 0$, $\theta > 0$, построим следующие множества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho) = \Big\{(\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_N)' \in R^{nN} :\ \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| < \rho,\ r = \overline{1, N}\Big\},$$

$$S(v^{(0)}[t], \theta) = \Big\{(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_N(t))',\ v_r(t) \in C([(r-1)h, rh], \mathbb{R}^n),$$
$$\|v_r(t) - v_r^{(0)}(t)\| \leqslant \theta,\ t \in [(r-1)h, rh],\ r = \overline{1, N}\Big\},$$

$$G(\rho, \theta) = \Big\{(t, z) :\ t \in [0, T],\ \|z - \lambda_r{}^{(0)} - v_r^{(0)}(t)\| < \rho + \theta,$$
$$t \in [(r-1)h, rh],\ r = \overline{1, N},\ \Big\|z - \lambda_N{}^{(0)} - \lim_{t\to Nh-0} v_N^{(0)}(t)\Big\| < \rho + \theta,\ t = T\Big\},$$

где $v[t] = (v_1(t), v_2(t), \ldots, v(t))'$. Обозначим через $U(F, L, h)$ совокупность $(\lambda^{(0)}, v^{(0)}[t], \rho, \theta)$, при которых функция $F(t, z)$ в $G(\rho, \theta)$ имеет непрерывные частные производные $F_z'(t, z)$ и

$$\sup_{t\in[0,T]} \|F_z'(t, z)\| \leqslant L, \quad L = \mathrm{const}.$$

Возьмем систему пар $(\lambda_r^{(0)}, v_r^{(0)}(t))$, $r = \overline{1, N}$, и последовательные приближения строим по следующему алгоритму:

Шаг 1. (a) Подставляя $v_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1, N}$, в (11), определяем $\lambda_r^{(1)}$, $r = \overline{1, N}$, из системы функциональных уравнений $Q_{\nu,h}(v^{(0)}, \lambda) = 0$.

(b) Подставляя в правую часть уравнения (10) величины $\lambda_r^{(1)}$, $v_r^{(0)}(t)$ вместо λ_r, $\nu_r(t)$, соответственно, $r = \overline{1, N}$, определяем $v_r^{(1)}(x)$, $r = \overline{1, N}$.

Шаг 2. (a) Подставляя $v_r^{(1)}(t)$, $r=\overline{1,N}$, в (11), определяем $\lambda_r^{(2)}$, $r=\overline{1,N}$, из системы функциональных уравнений $Q_{\nu,h}(v^{(1)},\lambda)=0$.

(b) Подставляя в правую часть уравнения (10) величины $\lambda_r^{(2)}$, $v_r^{(1)}(t)$ вместо λ_r, $\nu_r(t)$, соответственно, $r=\overline{1,N}$, определяем $v_r^{(2)}(t)$, $r=\overline{1,N}$.

Продолжая процесс, на k-м шаге получаем систему пар $(\lambda_r^{(k)}, v_r^{(k)}(x))$, $r=\overline{1,N}$.

Достаточные условия осуществимости, сходимости алгоритма и существования решения многоточечной краевой задачи с параметром (6)—(8) устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть существуют такие* $h>0$ $(Nh=T,\ N=1,2,\ldots)$, ν $(\nu=1,2,\ldots)$, $(\lambda^{(0)}, v^{(0)}[t],\rho,\theta)\in U(F,L,h)$, *при которых матрица Якоби* $\partial Q_{\nu,h}(v,\lambda)/\partial\lambda$ *обратима для всех* $(\lambda, v[t], u[t])\in S(\lambda^{(0)},\rho)\times S(v^{(0)}[t],\theta)\times S(u^{(0)}[t],h(\rho+\theta))$, *причем выполнены следующие неравенства*:

$$\left\|\left[\frac{\partial Q_{\nu,h}(v,\lambda)}{\partial\lambda}\right\|\right]^{-1}\| \leqslant \gamma_\nu(h),$$

$$q_\nu(h)=\frac{(Lh)^\nu}{\nu!}\left(1+\gamma_\nu(h)\sum_{j=1}^{\nu}\frac{(Lh)^j}{j!}\right)\leqslant\mu<1,\quad \mu=\mathrm{const},$$

$$\frac{(Lh)^\nu}{\nu!}\frac{\gamma_\nu(h)}{1-q_\nu(h)}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{(1)}(t)-v_r^{(0)}(t)\|+\gamma_\nu(h)\|Q_{\nu,h}(v^{(0)},\lambda^{(0)})\|<\rho,$$

$$\frac{1}{1-q_\nu(h)}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{(1)}(t)-v_r^{(0)}(t)\|<\theta.$$

Тогда определяемая алгоритмом последовательность пар $(\lambda^{(k)}, v^{(k)}[t])$, $k=1,2,\ldots$, *содержится в* $S(\lambda^{(0)},\rho)\times S(v^{(0)}[t],\theta)$ *и сходится к решению* $(\lambda^*, v^*[t])$ *задачи* (6)—(8), *причем справедливы следующие оценки*:

$$\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^*(t)-v_r^{(0)}(t)\|\leqslant\frac{1}{1-q_\nu(h)}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{(1)}(t)-v_r^{(0)}(t)\|,$$

$$\|\lambda^*-\lambda^{(0)}\|\leqslant\gamma_\nu(h)\|Q_{\nu,h}(v^{(0)},\lambda^{(0)})\|+\frac{(Lh)^\nu}{\nu!}\frac{\gamma_\nu(h)}{1-q_\nu(h)}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{(1)}(t)-v_r^{(0)}(t)\|.$$

При этом любое решение $(\lambda, v[t])$ *задачи* (6)—(8) *в* $S(\lambda^{(0)},\rho)\times S(\tilde v^{(0)}[t],\theta)$ *изолировано.*

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 1 из [3].

Определим функции $z^{(k)}(t)$, $k=0,1,2,\ldots$, равенством

$$z^{(k)}(t)=\begin{cases}\lambda_r^{(k)}+v_r^{(k)}(t), & r=\overline{1,N},\\ \lambda_N^{(k)}+\lim\limits_{t\to T-0}v_N^{(k)}(t), & t=Nh.\end{cases}$$

Тогда

$$w(x,t)=\frac{1}{x}\int\limits_0^t z^{(k)}(\tau)d\tau.$$

Обозначим через $S_0(w^{(0)}(x,t), t(\rho+\theta)/x)$ множество кусочно непрерывно дифференцируемых по x, t функций $w\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left\|w(t)-\frac{1}{x}\int\limits_0^t(\lambda^{(0)}-v^{(0)}(\tau))d\tau\right\|<\frac{t(\rho+\theta)}{x},\qquad \left\|w(T)-\frac{1}{x}\int\limits_0^T(\lambda^{(0)}-v^{(0)}(\tau))d\tau\right\|<\frac{T(\rho+\theta)}{x}.$$

Ввиду эквивалентности задач (6)—(8) и (1)—(3) из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то последовательность* $\{w^{(k)}(x,t)\}$, $k=1,2,\ldots$, *содержится в* $S_0\big(w^{(0)}(x,t), t(\rho+\theta)/x\big)$, *сходится к решению* $w^*(x,t)$ *задачи* (1)–(3) *в* $S_0\big(w^{(0)}(x,t), t(\rho+\theta)/x\big)$ *и справедливо неравенство*

$$\big\|w^*(x,t)-w^{(0)}(x,t)\big\| \leqslant \frac{t}{x}\gamma_\nu(h)\big\|Q_{\nu,h}(v^{(0)},\lambda^{(0)})\big\| + \\ + \frac{t}{x}\left(\frac{(Lh)^\nu}{\nu!}\gamma_\nu(h)+1\right)\frac{1}{1-q_\nu(h)}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\big\|v_r^{(1)}(t)-v_r^{(0)}(t)\big\|,$$

причем любое решение задачи (1)–(3) *в* $S_0\big(w^{(0)}(x,t), t(\rho+\theta)/x\big)$ *изолировано.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1989. — *29*, № 2. — С. 50–66.
2. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1989. — *29*, № 1. — С. 50–66.
3. *Орумбаева Н. Т.* Об одном алгоритме нахождения решения периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений// Сиб. электрон. мат. изв. — 2013. — *10*. — С. 464–474.
4. *Орумбаева Н. Т.* О разрешимости нелинейной полупериодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений// Изв. вузов. Мат. — 2016. — № 9. — С. 26–41.
5. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. — М.: Физматлит, 2002.
6. *Assanova A. T., Iskakova N. B., Orumbayeva N. T.* Well-posedness of a periodic boundary value problem for the system of hyperbolic equations with delayed argument// Вестн. Карагандинск. ун-та. Сер. Мат. — 2018. — № 1 (89). — С. 8–11.
7. *Assanova A. T., Iskakova N. B., Orumbayeva N. T.* On the well-posedness of periodic problems for the system of hyperbolic equations with finite time delay// Math. Meth. Appl. Sci. — 2020. — *43*, № 2. — P. 881–902.
8. *Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems// Phil. Trans. Roy. Soc. A. Math. Phys. Eng. Scis. — 1972. — *272*, № 1220. — P. 47–78.
9. *Peregrine D. N.* Calculations of the development of an undular bore// J. Fluid Mech. — 1966. — *25*, № 2. — P. 321–330.
10. *Orumbayeva N. T., Keldibekova A. B.* On the solvability of the duo-periodic problem for the hyperbolic equation system with a mixed derivative// Вестн. Карагандинск. ун-та. Сер. Мат. — 2019. — № 1 (93). — С. 59–71.
11. *Orumbayeva N. T., Keldibekova A. B.* On one solution of a periodic boundary-value problem for a third-order pseudoparabolic equation// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 9. — P. 1857–1865.
12. *Orumbayeva N. T., Sabitbekova G.* A boundary-value problem for nonlinear differential equation with arbitrary functions// Вестн. Карагандинск. ун-та. Сер. Мат. — 2017. — № 1 (85). — С. 71–76.
13. *Orumbayeva N. T., Sabitbekova G.* On a solution of a nonlinear semi-periodic boundary-value problem for a differential equation with arbitrary functions// in: Functional Analysis in Interdisciplinary Applications (*Kalmenov T., Nursultanov E., Ruzhansky M., Sadybekov M.*, eds.). — Cham: Springer, 2017. — *216*. — P. 158–163.
14. *Orumbayeva N. T., Shayakhmetova B. K.* On a method of finding a solution of semi-periodic boundary-value problem for hyperbolic equations// AIP Conf. Proc. — 2016. — *1759*, № 1. — 020121.

Кажкенова Назерке Жакеновна
Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова
E-mail: `OrumbayevaN@mail.ru`

Орумбаева Нургул Тумарбековна
Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова
E-mail: `OrumbayevaN@mail.ru`