ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 98–106
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-98-106

УДК 519.765, 517.9, 81-132

О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ В ЯЗЫКОЗНАНИИ

© 2022 г. **А. А. КРЕТОВ, М. В. ПОЛОВИНКИНА, И. П. ПОЛОВИНКИН**

Аннотация. Рассматриваются диффузионные модели изменения языка. Первая из моделей представляет собой начально-краевую задачу для уравнения Хотеллинга. Эта модель описывает изменение размера словаря естественного языка с течением времени под воздействием собственно его развития и диффузионного проникновения. Другая модель описывает процесс взаимодействия носителей двух языков. Обсуждается вопрос об устойчивости стационарных решений.

Ключевые слова: диффузионная модель, стационарное состояние, устойчивость, рост словаря.

ON SOME MODELS IN LINGUISTICS

© 2022 **A. A. KRETOV, M. V. POLOVINKINA, I. P. POLOVINKIN**

Abstract. Two diffusion models of language change are considered. The first model is an initial-boundary-value problem for the Hotelling equation. This model describes the change in the size of a natural language vocabulary over time under the influence of its development and diffusion penetration. The other model describes the process of interaction between native speakers of two languages. The stability of stationary solutions is discussed.

Keywords and phrases: diffusion model, steady state, stability, vocabulary growth.

AMS Subject Classification: 35B35, 35Q99

1. Введение. Методы теории нелинейной динамики применяются во многих отраслях науки. Одно из направлений, где может быть использована идеология нелинейной динамики, связано с изучением формирования и изменения языка во времени. Накопленные на сегодняшний день сведения о количественных характеристиках процесса изменения языка позволяют предположить, что этот процесс протекает по законам, схожим с законами роста и распространения популяций. Это наблюдение дает возможность применять математические методы, уже с успехом используемые в биологии, медицине и даже в экономике, к изучению развития языка. Ниже мы приведем пример применения одного из методов исследования устойчивости стационарного состояния системы к изучению развития языка. Модели, рассмотренные в настоящей работе, в их диффузионном варианте, введены в [2].

2. О моделировании роста словаря естественного языка. Обратимся к вопросу о моделировании роста словаря языка. Очень содержательные мысли по этой проблеме можно найти в книгах [7] и [9]. Сделаем краткое введение в настоящий раздел, опираясь на эти книги (к сожалению, каждая из них является библиографической редкостью).

Общеизвестным является тезис о том, что «в результате постоянного расширения сферы деятельности человека лексика каждого языка, особенно его терминологический словарь, несмотря на выпадение некоторого количества слов, неуклонно растет» (см. [7, с. 56]). Такому неуклонному нарастанию размера словаря соответствует, в частности, экспоненциальный закон роста по следующей формуле (см. [7, с. 57]):

$$L(t) = L_0 e^{nt}, \tag{1}$$

где t — текущий момент времени, $L(t)$ — размер словаря в момент времени t, L_0 — начальный размер словаря, задающий начало отсчета времени, $n > 0$ — коэффициент прироста. По экспоненциальному закону скорость роста словаря имеет «лавинообразный» характер (скорость роста словаря пропорциональна достигнутому уровню), который может быть описан обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dL(t)}{dt} = nL(t). \tag{2}$$

Множитель L_0 задается начальным условием

$$L(0) = L_0. \tag{3}$$

Ретроспективная проверка закона (1) на основе данных о представительных (например, толковых) словарях некоторых естественных языков убеждает в том, что рост общеупотребительной лексики и рост объема словаря литературного языка за разные промежутки времени может характеризоваться экспоненциальным законом только в отдельные периоды развития языка [9]. В действительности процесс роста лексики начинается медленно (период становления литературного языка), затем ускоряется и принимает «лавинообразный» характер (период формирования литературного языка), но в какой-то момент процесс роста обязательно замедляется (период стабилизации). Такой схеме развития отвечает математическая модель, выражаемая т. н. логистической функцией

$$L(t) = \frac{L_c}{1 + ae^{-kt}}, \tag{4}$$

где L_c — теоретический супремум словаря, $k > 0$, a суть некоторые параметры. Графически эта модель представляется S-образной кривой, которая выражает сначала рост с возрастающей скоростью, затем скорость уменьшается и почти прекращается по мере асимптотического приближения к пределу L_c.

По всей вероятности, закон логистического развития в своей общей форме (ускорение — точка перегиба — замедление) имеет всеобщее социально-лингвистическое значение и характеризует рост и развитие лексики большинства литературных языков, хотя конкретную форму этот закон принимает в зависимости от условий исторического развития данного народа — носителя языка. Можно добавить, что логистический закон роста в различных своих конкретных проявлениях (имеется ряд вариантных формул логистического роста) считается одним из основных законов развития самоорганизующихся сложных систем, если рассматривать их развитие при достаточно больших временных интервалах. S-образной кривой характеризуются также некоторые другие диахронные лингвистические процессы, и они находят себе в наши дни широкое применение во многих областях науки, в том числе при решении задач моделирования развития самой науки (см. [9, с. 155]).

Здесь нельзя не отметить, в частности, что осознание законов развития роста словаря естественного языка идет по тому же пути, что и осознание законов роста популяций.

Уравнение (2) называется моделью Мальтуса (см. [10]). Одним из первых исследователей динамики населения был Томас Мальтус (Thomas Malthus). Мальтус заметил в эссе, написанном в 1798 году, что рост человеческого населения принципиально отличался от роста запасов продовольствия, чтобы прокормить это население. Он писал, что человеческое население растет геометрически (то есть экспоненциально), в то время как запасы продовольствия растут арифметически (то есть линейно). Он пришел к выводу, что если его не остановить, то будет лишь вопросом времени следующая ситуация: население будет слишком велико, чтобы прокормить себя. Мальтус предположил, что темпы роста населения прямо пропорциональны его нынешнему размеру. Если популяция в момент времени t обозначается $L(t)$, то предположение о естественном росте может быть записано символически как (2), а L_0 — начальная популяция. Решение предсказывает демографический взрыв при $n > 0$, вымирание популяции при $n < 0$ и отсутствие изменений при $n = 0$.

Мальтузианскую модель обычно называют моделью естественного роста или моделью экспоненциального роста. Эта модель может быть полезна в ситуации, в которых временной масштаб наблюдения достаточно мал, чтобы сделать приемлемым предположение, что $n > 0$ остается почти постоянным, ресурсы кажутся неограниченными, а L_0 мал.

Позже (1838) Пьер Франс Ферхююльст (Pierre François Verhulst) заменил постоянную относительную скорость роста n в (2) на относительную скорость роста

$$k\left(1-\frac{L}{L_c}\right),$$

которая линейно уменьшается в зависимости от L. Безразмерный множитель $k(1-L/L_c)$ служит для отражения уменьшения относительного темпа роста от k до нуля по мере увеличения численности населения от его начальный уровень L_0 — L_c. Константа L_c представляет собой максимальное устойчивое население, за пределами которого L не может увеличиться. Полученная модель (см. [10])

$$\frac{dL}{dt}=kL\left(1-\frac{L}{L_c}\right), \tag{5}$$

называется моделью логистического роста или моделью Ферхюльста. Модель Ферхюльста предполагает, что скорость роста колеблется от значения k, когда условия очень благоприятны, к значению 0, когда популяция увеличилась до максимального значения L_c, которое может поддерживать окружающая среда. Решение уравнения (5) имеет вид

$$L(t)=\frac{L_cL_0}{L_0+(L_c-L_0)e^{-kt}},$$

и это совпадает с (4) при $a=(L_c-L_0)/L_0$.

Логистическая модель предсказывает быстрый начальный рост для $0 < L_0 < L_c$, затем снижение темпов роста с течением времени, так что размер популяции приближается к пределу. Такое поведение согласуется с наблюдаемым поведением многих популяций, и по этой причине логистическая модель часто используется в качестве средства описания численности популяции

Модель Ферхюльста и мальтузианская модель не учитывали миграции населения. Гарольд Хотеллинг (Harold Hotelling) (1921) добавил к уравнению Ферхюльста слагаемое, описывающее миграции. В результате уравнение приняло вид (см. [13])

$$\frac{\partial L}{\partial t}=A(L_c-L)L+B\Delta L, \tag{6}$$

где $L=L(x_1,x_2,t)$ — плотность населения в точке (x_1,x_2) в момент времени t,

$$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

— оператор Лапласа, A — скорость роста населения, B — скорость миграции, s — коэффициент насыщенной плотности населения, t — временной параметр, x_1, x_2 — географические координаты.

Модель Хотеллинга описывает как рост населения, так и миграционные процессы. Рост населения моделируется как логистический процесс. Миграционные процессы описываются с помощью закона Фурье теплопроводности. Хотеллинг ввел понятие насыщенной плотности населения. Если реальная плотность населения выше насыщенной, то население уменьшается, если реальная плотность населения ниже насыщенной, то население увеличивается. Пространственная диффузия объяснялась тем, что рост населения приводит к снижению производства на душу населения, а люди перемещаются из более населенных мест в менее населенные.

Существенным недостатком модели Хотеллинга как модели роста и распространения населения является то, что предполагается, что запасы средств к существованию равны заданной константе, не зависящей от времени и численности населения (рабочей силы). Таким образом, эта модель более пригодна для популяций животных, о чем свидетельствует его успешное применение в экологии через 30 лет после создания.

В огромном числе случаев при попытке построить модель какого-либо объекта либо невозможно прямо указать фундаментальные законы или вариационные принципы, которым он подчиняется, либо, с точки зрения наших сегодняшних знаний, вообще нет уверенности в существовании подобных законов, допускающих математическую формулировку. Одним из плодотворных подходов к такого рода объектам является использование аналогий с уже изученными явлениями (см. [8]). В интересующем нас случае моделирования роста словаря мы можем повторить фрагменты пути исследований роста и распространения популяции. Часто наряду с явным заданием функций, которое далеко не всегда известно, полезно изучать дифференциальные уравнения, которым эта функция удовлетворяет, развивая закон, который это уравнение описывает. В нашем случае мы можем наряду с заданием функции (4) в явном виде рассматривать и дифференциальное уравнение (5), которое его задает. Такой подход целесообразен, например, при изучении вопросов, связанных с устойчивостью стационарного состояния.

Уравнение (5) хорошо изучено. Мы можем пойти дальше по тому же пути что и при исследовании роста и распространения популяции. Добавим справа от знака равенства диффузионный член и получим уравнение вида (6), где $L = L(x_1, x_2, t)$ размер словаря в точке (x_1, x_2) в момент времени t.

В некоторых случаях удобно трактовать $L = L(x_1, x_2, t)$ как отклонение размера словаря в момент времени t от размера, зафиксированного как некий стационарный уровень, который принимается нулевым. К сожалению, такой «локализованный» подход может повлечь за собой дополнительные технические трудности в экспериментальном подтверждении модели. Без диффузионного члена $B\Delta L$ мы имеем дело с «точечной» моделью, которая на самом деле как раз глобальна в том смысле что закон (6) может быть применен к языку в целом. В этом случае можно опираться на представительные словари рассматриваемого языка разных лет для проверки гипотез. В случае диффузионно-логистической модели (6) мы, возможно, если речь идет о большой стране, вынуждаем себя заменить исследование национального языка изучением наречий и диалектов, динамика изменения которых не так подробно отражена в официальных словарях. Впрочем, можно надеяться, что эта модель подойдет для исследования влияния взаимопроникновения языков некоторой территории с относительно небольшими подтерриториями (странами, федеральными землями, регионами и т. д.) языки и наречия которых фиксируются в словарях. Диффузионный подход на самом деле дает новые знания о модели. Простейшим примером, иллюстрирующим это, может служить задача об устойчивости стационарного состояния. Пусть $w = w(x_1, x_2)$ — стационарное решение уравнения (6) в некоторой ограниченной области Ω с кусочно гладкой границей, удовлетворяющее на границе этой области классическому краевому условию первого, второго или третьего рода, d — диаметр области Ω. В [5] показано, что условие

$$w > \frac{L_c}{2} - \frac{B}{2Ad^2}$$

является достаточным для устойчивости стационарного решения $w(x_1, x_2)$ (см. также [12], где этот результат обобщен). Хорошо известно, что без диффузионного члена (при $B = 0$) нулевое стационарное решение является неустойчивым. В диффузионном случае (при $B \neq 0$) тривиальное стационарное решение может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым, что определяется размером области Ω. Это эффект исключительно диффузионной модели.

3. О моделировании взаимодействия языковых групп. Рассматриваемая далее модель в бездиффузионном виде заимствована из работы [3]. Мы дополняем ее до диффузионного вида. Только величинам, в ней участвующим, придан нами иной смысл. Мы по-прежнему считаем возможной новую интерпретацию, исходя из уже упомянутого принципа аналогий при построении моделей [8]. Мы осознаем, что получение достоверных данных о входных величинах модели, как и об искомых величинах для ее экспериментальной проверки, представляет собой отдельную трудоемкую задачу, которую мы здесь не рассматриваем.

Пусть $u_1 = u_1(x_1, x_2, t)$ и $u_2 = u_2(x_1, x_2, t)$ суть численности (в условных единицах) групп носителей двух языков (наречий, диалектов), проживающих на общей территории. Будем считать, что вторая группа обладает «агрессивностью» в следующем смысле: за счет влияния участников второй группы возможен переход из первой группы во вторую. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая этот процесс, имеет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \mu u_1(u_1-\alpha)(1-u_1) - u_1u_2, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -\beta(b-u_1)u_2, \tag{8}$$

где $\alpha \in [0,1)$, μ, β и b суть некоторые параметры. К системе (7)—(8) добавим начальные условия

$$u_1|_{t=0} = u_1^0 \in [0,1], \tag{9}$$

$$u_2|_{t=0} = u_2^0 \in [0,1). \tag{10}$$

В диффузионном варианте система принимает вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \mu u_1(u_1-\alpha)(1-u_1) - u_1u_2 + \vartheta_1\Delta u_1, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -\beta(b-u_1)u_2 + \vartheta_2\Delta u_2, \tag{12}$$

где $\vartheta_1 \geqslant 0$, $\vartheta_2 \geqslant 0$ (при $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = 0$ мы получаем систему (7)—(8) из [3]). Будем считать, что система рассматривается в ограниченной области Ω с кусочно гладкой границей Γ. Добавим краевые условия

$$\left.\left(\eta_{11}u_1 + \eta_{12}\frac{\partial u_1}{\partial \nu}\right)\right|_{\Gamma} = \zeta_1(x_1,x_2), \tag{13}$$

$$\left.\left(\eta_{21}u_2 + \eta_{22}\frac{\partial u_2}{\partial \nu}\right)\right|_{\Gamma} = \zeta_2(x_1,x_2), \tag{14}$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к границе Γ, $\eta_{s1}^2 + \eta_{s2}^2 > 0$, $\eta_{s1}\eta_{s2} > 0$, $s = 1,2$. Всюду далее будем рассматривать регулярные решения, обладающие достаточной гладкостью, что в частности, влечет за собой выполнение всех необходимых условий согласования начальных и граничных данных.

4. Исследование устойчивости стационарного состояния в диффузионной модели взаимодействия языковых групп. Пусть $v = (v_1,v_2)$ — стационарное решение системы (11)—(12), то есть решение системы

$$\mu u_1(u_1-\alpha)(1-u_1) - u_1u_2 + \vartheta_1\Delta u_1 = 0, \tag{15}$$

$$-\beta(b-u_1)u_2 + \vartheta_2\Delta u_2 = 0, \tag{16}$$

удовлетворяющее граничным условиям (13)—(14).

Пусть $z_j = u_j - v_j$, $j = 1,2$. Выведем уравнения для каждого из отклонений z_j, полученное равенство умножим на z_j и проинтегрируем по Ω. Из первого уравнения (11) имеем:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial z_1}{\partial t} = \mu(v_1+z_1)(v_1+z_1-\alpha)(1-v_1-z_1) - (v_1+z_1)(v_2+z_2) + \vartheta_1\Delta(v_1+z_1).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_1}{\partial t} = \mu z_1^2 + 2\mu v_1z_1 - \mu\alpha z_1 - \mu z_1^3 - 3\mu v_1z_1^2 - 3\mu v_1^2z_1 + \mu + \alpha z_1^2 + \\ + 2\mu\alpha v_1z_1 - z_1z_2 - v_1z_2 - v_2z_1 + \vartheta\Delta z_1 + \mu v_1(v_1-\alpha)(1-v_1) - v_1v_2 + \vartheta_1\Delta v_1.\end{aligned}$$

В силу того, что $v = (v_1,v_2)$ является решением системы (15)—(16), сумма последних трех слагаемых в правой части последнего равенства равна нулю. Поэтому получим

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = \mu z_1^2 + 2\mu v_1z_1 - \mu\alpha z_1 - \mu z_1^3 - 3\mu v_1z_1^2 - 3\mu v_1^2z_1 + \mu\alpha z_1^2 + 2\mu\alpha v_1z_1 - z_1z_2 - v_1z_2 - v_2z_1 + \vartheta\Delta z_1. \tag{17}$$

Умножим равенство (17) на z_1, после чего получим

$$z_1\frac{\partial z_1}{\partial t} = \mu z_1^3 + 2\mu v_1 z_1^2 - \mu\alpha z_1^2 - \mu z_1^4 - 3\mu v_1 z_1^3 - 3\mu v_1^2 z_1^2 + \\ + \mu\alpha z_1^3 + 2\mu\alpha v_1 z_1^2 - z_1^2 z_2 - v_1 z_1 z_2 - v_2 z_1^2 + z_1\vartheta\Delta z_1.$$

Считая отклонения z_j достаточно малыми, после умножения равенств на z_j будем отбрасывать одночлены переменных (z_1, z_2), имеющие степень выше второй. Последнее равенство после этого будет преобразовано к виду

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(z_1^2) = 2\mu v_1 z_1^2 - \mu\alpha z_1^2 - 3\mu v_1^2 z_1^2 + 2\mu\alpha v_1 z_1^2 - v_1 z_1 z_2 - v_2 z_1^2 + \vartheta z_1\Delta z_1.$$

Проинтегрируем полученное равенство по Ω и получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}(z_1^2)dx = \vartheta\int\limits_{\Omega} z_1\Delta z_1 dx + \int\limits_{\Omega}(2\mu v_1 z_1^2 - \mu\alpha z_1^2 - 3\mu v_1^2 z_1^2 + 2\mu\alpha v_1 z_1^2 - v_1 z_1 z_2 - v_2 z_1^2)dx.$$

К первому интегралу в правой части последнего равенства применим формулу Грина [1]. Учитывая граничные условия, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega}(z_1^2)dx = -\vartheta\int\limits_{\Omega}|\nabla z_1|^2 dx + \vartheta_1\int\limits_{\partial\Omega} z_1\frac{\partial z_1}{\partial\nu}d\Gamma + \\ + \int\limits_{\Omega}(2\mu v_1 z_1^2 - \mu\alpha z_1^2 - 3\mu v_1^2 z_1^2 + 2\mu\alpha v_1 z_1^2 - v_1 z_1 z_2 - v_2 z_1^2)dx, \quad (18)$$

где $d\Gamma$ является элементом границы $d\Omega$, так что второе слагаемое в правой части равенства (18) представляет собой криволинейный интеграл первого рода по границе области Ω. В интеграле по границе при $\mu_s = 0$ или при $\eta_s = 0$ подынтегральная функция равна нулю в силу краевого условия (13). Из этого же краевого условия при $\mu_s\eta_s > 0$ получим:

$$\left.\frac{\partial z_1}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = -\frac{\mu_s}{\eta_s}z_1\Big|_{\partial\Omega}.$$

Поэтому равенство (18) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega}(z_1^2)dx = -\vartheta\int\limits_{\Omega}|\nabla z_1|^2 dx - \sigma_1\vartheta_1\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\mu_1}{\eta_1}z_1^2 d\Gamma + \\ + \int\limits_{\Omega}(2\mu v_1 z_1^2 - \mu\alpha z_1^2 - 3\mu v_1^2 z_1^2 + 2\mu\alpha v_1 z_1^2 - v_1 z_1 z_2 - v_2 z_1^2)dx. \quad (19)$$

Аналогичным образом мы получим из второго уравнения (12):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l z_2^2 dx = -\vartheta_2\int\limits_{\Omega}|\nabla z_2|^2 dx - \sigma_2\vartheta_2\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\mu_2}{\eta_2}z_2^2 d\Gamma + \int\limits_{\Omega}(\beta v_2 z_1 z_2 + \beta v_1 z_2^2 - b\beta z_2^2)dx, \quad (20)$$

где $\sigma_s = 1$ в случае $\mu_s\eta_s > 0$ или $\sigma_s = 0$ в случае $\mu_s\eta_s = 0$, $s = 1, 2$.

Сложив равенства (19)—(20), получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l |z|^2 dx = -\vartheta_1\int\limits_{\Omega}|\nabla z_1|^2 dx - \vartheta_2\int\limits_{\Omega}|\nabla z_2|^2 dx - \sigma_1\vartheta_1\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\mu_1}{\eta_1}z_1^2 d\Gamma - \sigma_2\vartheta_2\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\mu_2}{\eta_2}z_2^2 d\Gamma + \\ + \int\limits_{\Omega}(2\mu v_1 z_1^2 - \mu\alpha z_1^2 - 3\mu v_1^2 z_1^2 + 2\mu\alpha v_1 z_1^2 - v_1 z_1 z_2 - v_2 z_1^2 + \beta v_2 z_1 z_2 + \beta v_1 z_2^2 - b\beta z_2^2)dx. \quad (21)$$

где $|z|^2 = z_1^2 + z_2^2$. Положим

$$\Theta_{11} = \left(2\mu v_1 + 2\mu\alpha v_1 - \mu\alpha - 3\mu v_1^2 - v_2\right), \tag{22}$$

$$\Theta_{12} = \Theta_{21} = \frac{1}{2}\left(\beta v_2 - v_1\right), \tag{23}$$

$$\Theta_{22} = \beta v_1 - b\beta \tag{24}$$

Нас интересует знак выражения, определенного формулой (21). Более точно, мы хотим установить достаточные условия для того, чтобы это выражение было отрицательным. Безусловно, отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} b_{kj}\xi_k\xi_j \tag{25}$$

будет таким достаточным условием. Однако еще есть резерв для уточнения достаточных условий. Воспользуемся методом, примененным в [5]. К интегралам от квадратов градиентов в правой части равенства (21) применим неравенство Стеклова—Пуанкаре—Фридрихса [4, 6, 11, 14],. С его учетом из равенства (21) получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l |z|^2 dx \leqslant \int_0^l (a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2)dx, \tag{26}$$

где

$$a_{11} = 2\mu v_1 + 2\mu\alpha v_1 - \mu\alpha - 3\mu v_1^2 - v_2 - \frac{\vartheta_1}{d^2}, \tag{27}$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}(\beta v_2 - v_1), \tag{28}$$

$$a_{22} = \beta v_1 - b\beta - \frac{\vartheta_2}{d^2}, \tag{29}$$

где d — диаметр области Ω.

Уточненное достаточное условие асимптотической устойчивости стационарного решения состоит в том, чтобы квадратичная форма

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{kj}\xi_k\xi_j \tag{30}$$

была отрицательно определенной. Безусловно, проверка этого условия хотя и несколько громоздка, все же вполне реализуема, особенно с помощью компьютера.

Отметим, что учет диффузионных явлений и здесь может внести новые знания об объекте исследования или о модели. Обратимся к первоисточнику рассматриваемой модели. В работе [3] указывается, что система обыкновенных дифференциальных уравнений (7)—(8) имеет четыре стационарные точки. Отметим, что каждая из них является и стационарным решением системы (11)—(12) уравнений в частных производных с диффузионными членами. Для иллюстрации нашего тезиса о новой информации об объекте рассмотрим две из указанных стационарных точек.
1. $v_1 = \alpha$, $v_2 = 0$. В этой стационарной точке собственные значения матрицы правой части уравнений (7)—(8) будут следующими: $\lambda_1 = \mu\alpha(1-\alpha) > 0$, $\lambda_2 = -\beta(b-\alpha)$. Поскольку одно из собственных значений положительно, эта стационарная точка будет неустойчивой. Посмотрим, что даст нам наличие ненулевых диффузионных членов. Оказывается, в таком случае квадратичная форма (30) может быть отрицательно определенной при выполнении некоторых условий. В этом случае имеем:

$$a_{11} = \mu\alpha(1-\alpha) - \vartheta_1/d^2, \quad a_{12} = -\alpha/2, \quad a_{22} = \beta(\alpha - b) - \vartheta_2/d^2.$$

Согласно критерию Сильвестра, для отрицательной определенности формы (30) необходимо и достаточно выполнение условий

$$a_{11} = \mu\alpha(1-\alpha) - \vartheta_1/d^2 < 0,$$
$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \Phi_1(d; \alpha, \beta, \mu, b) = (\mu\alpha(1-\alpha) - \vartheta_1/d^2)(\beta(\alpha - b) - \vartheta_2/d^2) - \alpha^2/4 > 0.$$

Совершенно очевидно, что каждое из этих двух условий будет выполняться при достаточно малых d.

2. $v_1 = 1$, $v_2 = 0$. В этой точке $\lambda_1 = -\mu(1-\alpha) < 0$, $\lambda_2 = -\beta(b-1)$. Неравенство $b > 1$ является необходимым и достаточным условием устойчивости точки $(1, 0)$, рассматриваемой как стационарная точка системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7)—(8). При рассмотрении системы (11)—(12) мы имеем:

$$a_{11} = -\mu(1-\alpha) - \vartheta_1/d^2, \quad a_{12} = -1/2, \quad a_{22} = \beta(1-b) - \vartheta_2/d^2.$$

Критерий Сильвестра отрицательной определенности квадратичной формы в этом случае приведет к условиям

$$a_{11} = -\mu(1-\alpha) - \vartheta_1/d^2 < 0,$$
$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \Phi_2(d; \alpha, \beta, \mu, b) = (-\mu(1-\alpha) - \vartheta_1/d^2)(\beta(1-b) - \vartheta_2/d^2) - 1/4 > 0.$$

На сей раз первое условие выполнено. Второе условие может быть выполнено при малых значениях d не только при $b > 1$, но и при $b \leqslant 1$.

Отметим также точку $v_1 = 0$, $v_2 = 0$. В этой стационарной точке собственные значения матрицы правой части уравнений (7)—(8) будут отрицательными, а значит, эта точка будет устойчивой. В этом случае добавление диффузионных членов ничего нового не дает.

5. Заключение. Мы затронули некоторые стороны обширной проблемы математического моделирования в языкознании. Мы полагаем, что принцип аналогий, широко используемый при моделировании, даст свои плоды и при моделировании в задачах языкознания. В частности, мы считаем, что аппарат дифференциальных уравнений весьма пригоден для моделирования роста словаря и взаимодействия разных языковых групп. При моделировании процесса взаимодействия двух разных языковых групп мы добавили диффузионные (миграционные) составляющие в уравнения системы. Это привело к некоторым новым эффектам, которые не были ожидаемы a priori. Выяснилось, что некоторые стационарные состояния, будучи неустойчивыми как стационарные точки системы с сосредоточенными параметрами (системы обыкновенных дифференциальных уравнений), становятся устойчивыми в областях с малыми диаметрами как стационарные состояния системы с распределенными параметрами (системы дифференциальных уравнений в частных производных). В терминах предметной области это означает, что миграционные процессы способны сохранить устойчивые состояния языка в малых областях. Этот вывод, безусловно, нуждается в подтверждении статистическими данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
2. *Кретов А. А., Половинкина М. В., Половинкин И. П., Ломец М. В.* О моделировании изменений языка// Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории функций и смежные проблемы». Воронеж. зимняя мат. школа (Воронеж, 28 января – 2 февраля 2021 г.). — Воронеж: Изд-во ВГУ, 2021. — С. 172.
3. *Колпак Е. П., Гаврилова А. В. Математическая модель возникновения культурных центров и течений в живописи* Мол. ученый. — 2019. — *22 (260)*. — С. 1–17.
4. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
5. *Мешков В. З., Половинкин И. П., Семенов М. Е.* Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга// Обозр. прикл. пром. мат. — 2002. — *9*, № 1. — С. 226–227..
6. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
7. *Пиотровский Р. Г., Бектаев К. Б., Пиотровская А. А.* Математическая лингвистика. — М.: Высшая школа, 1977.

8. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М.: Физматлит, 2005.
9. *Тулдава Ю. А.* Проблемы и методы квантитативно-системного исследования лексики. — Таллин: Валгус, 1987.
10. *Brauer F., Castillo-Chavez C.* Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. — New York: Springer, 2012.
11. *Friedrichs K. O.* Spectral Theory of Operators in Hilbert Space. — New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1973.
12. *Gogoleva T. N., Shchepina I. N., Polovinkina M. V., Rabeeakh S. A.* On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — *1203.* — 012041.
13. *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. — Berlin,: Springer-Verlag, 1997.
14. *Rektorys K.* Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. — Springer Science & Business Media, 2012.

Кретов Алексей Александрович
Воронежский государственный университет
E-mail: kretov@rgph.vsu.ru

Половинкина Марина Васильевна
Воронежский государственный университет инженерных технологий
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Половинкин Игорь Петрович
Воронежский государственный университет
E-mail: polovinkin@yandex.ru