ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 125–132
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-125-132

УДК 514.76

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ $lcAC_S$-СТРУКТУР

© 2022 г. **А. Р. РУСТАНОВ, С. В. ХАРИТОНОВА**

Аннотация. Работа посвящена изучению почти эрмитовых структур, индуцируемых на интегральных многообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения локально конформно почти косимплектического многообразия.

Ключевые слова: почти эрмитова структура, интегральное многообразие, фундаментальное распределение, косимплектическое многообразие.

INTEGRABILITY OF $lcAC_S$-STRUCTURES

© 2022 **A. R. RUSTANOV, S. V. KHARITONOVA**

Abstract. In this paper, we study almost Hermitian structures induced on maximal integral manifolds of the first fundamental distribution of a locally conformally almost cosymplectic manifold.

Keywords and phrases: almost Hermitian structure, integral manifold, fundamental distribution, cosymplectic manifold.

AMS Subject Classification: 53B35

Между контактной и эрмитовой геометрией существует тесная связь. Ряд работ посвящен изучению почти контактных структур, индуцируемых на ориентируемых гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий. В данной работе мы изучаем почти эрмитовы структуры, индуцируемые на интегральных многообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения локально конформно почти косимплектического многообразия.

Одним из наиболее интересных тензоров почти контактных метрических многообразий, с геометрической точки зрения, является тензор Нейенхейса структурного эндоморфизма. Как известно, обращение в нуль тензора Нейенхейса структурного эндоморфизма почти контактной метрической структуры равносильно интегрируемости структуры. С тензором Нейенхейса естественным образом связаны еще четыре тензора. В данной работе мы также исследуем обращение этих тензоров в нуль, а именно, каким образом обращение в нуль каждого из этих тензоров влияет на почти эрмитову структуру, индуцируемую на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения локально конформно почти косимплектического многообразия.

Пусть M — гладкое многообразие, $\dim M = 2n+1$; $\mathcal{X}(M)$ — $C^\infty(M)$-модуль гладких векторных полей на многообразии M; $\otimes$ — тензорное произведение, $\wedge$ — внешнее умножение, d — оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и т. п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞. В данной работе будем полагать, что индексы $i, j, k, \dots$ принимают значения от 0 до $2n$, а индексы $a, b, c, \dots$ — значения от 1 до n, и будем считать, что $\hat{a} = a + n$, $\hat{\hat{a}} = a$, $\hat{0} = 0$.

Определение 1 (см. [4,8])**.** Почти контактной метрической структурой (AC-структурой) на нечетномерном ориентируемом многообразии M называется четверка (η, ξ, Φ, g) тензорных полей на этом многообразии, где η — дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой структуры, ξ — векторное поле, называемое характеристическим, Φ — эндоморфизм модуля $\mathcal{X}(M)$, называемый структурным эндоморфизмом, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова структура на M. При этом

$$\eta(\xi) = 1; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \Phi^2 = -\operatorname{id} + \eta \otimes \xi;$$
$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(x)\eta(Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется, *почти контактным метрическим многообразием* (AC-многообразием).

Задание почти контактной метрической структуры на многообразии внутренним образом порождает присоединенную G-структуру, тотальное пространство расслоения которой состоит из, так называемых, A-реперов. Матрицы компонент тензоров Φ и g в A-репере имеют вид соответственно

$$(\Phi_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1} I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Структурной группой такой G-структуры является группа $1 \times U(n)$ (см. [2–4]).

В модуле $\mathcal{X}(M)$ гладких векторных полей AC-структуры (η, ξ, Φ, g) многообразия M^{2n+1} внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $m = \eta \otimes \xi$ и $l = \operatorname{id} - m = -\Phi^2$ на подмодули M и L соответственно (см. [2–4]). Таким образом, $\mathcal{X}(M) = \mathrm{L} \oplus \mathrm{M}$, где $\mathrm{L} = \operatorname{Im}(\Phi) = \ker \eta$ — так называемое первое фундаментальное распределение, $\mathrm{M} = \operatorname{Im} m = \ker(\Phi) = L(\xi)$ — второе фундаментальное распределение (линейная оболочка структурного вектора). Распределения M и L инвариантны относительно Φ и взаимно ортогональны.

Определение 2 (см. [2,3])**.** Почти эрмитовой структурой на четномерном многообразии N называется пара $\{J, g\}$, где J — почти комплексная структура, а $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика на многообразии. При этом $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in \mathcal{X}(N)$.

Поскольку $(\Phi|_\mathrm{L})^2 = -\operatorname{id}$, $\langle \Phi|_\mathrm{L} X, \Phi|_\mathrm{L} Y \rangle = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in \mathrm{L}$, то пара $\{\Phi|_\mathrm{L}, g_\mathrm{L}\}$ задает почти эрмитову структуру на L. Первая группа структурных уравнений соответствующего почти эрмитова многообразия имеет вид

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c, \end{aligned} \tag{2}$$

где ω^i, θ_j^i — компоненты форм смещения и римановой связности ∇ соответственно (см. [3,4]).

Определение 3 (см. [10])**.** Конформным преобразованием AC-структуры $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ на многообразии M называется переход от S к AC-структуре $\tilde{S} = (\tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$, при этом

$$\tilde{\eta} = e^{-\sigma}\eta, \quad \tilde{\xi} = e^{\sigma}\xi, \quad \tilde{\Phi} = \Phi, \quad \tilde{g} = e^{-2\sigma} g,$$

где σ — определяющая функция соответствующего конформного преобразования.

Определение 4 (см. [7])**.** Почти контактная метрическая структура (ξ, η, Φ, g) на многообразии M называется локально конформно почти косимплектической структурой ($lcAC_S$-структурой), если сужение этой структуры на некоторую окрестность U произвольной точки $p \in M$ допускает конформное преобразование в почти косимплектическую структуру.

Многообразие, снабженное локально конформно почти косимплектической структурой, называется *локально конформно почти косимплектическим многообразием* ($lcAC_S$-многообразием).

Первая группа структурных уравнений $lcAC_S$-многообразий на пространстве присоединенной G-структуры имеет вид

$$\begin{gathered} d\omega = C_b\omega\wedge\omega^b + C^b\omega\wedge\omega_b; \\ d\omega^a = -\theta^a_b\wedge\omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c\wedge\omega_b + B^{abc}\omega_b\wedge\omega_c + B^a_b\omega\wedge\omega^b + B^{ab}\omega\wedge\omega_b; \\ d\omega_a = \theta^b_a\wedge\omega_b + B_{ab}{}^c\omega_c\wedge\omega^b + B_{abc}\omega^b\wedge\omega^c + B^b_a\omega\wedge\omega_b + B_{ab}\omega\wedge\omega^b \end{gathered} \tag{3}$$

(см. [7]), где

$$\begin{gathered} B^{[abc]} = B_{[abc]} = 0; \quad B^{[ab]} = B_{[ab]} = 0; \\ B_a{}^b = B^b{}_a = \sigma_0\delta^b_a; \quad B^{ab}{}_c = 2\sigma^{[a}\delta^{b]}_c; \quad B_{ab}{}^c = 2\sigma_{[a}\delta^c_{b]}; \\ C^{ab} = C_{ab} = 0; \quad C^b = -\sigma^b; \quad C_b = -\sigma_b; \\ d\sigma = \sigma_0\omega + \sigma_a\omega^a + \sigma^a\omega_a. \end{gathered} \tag{4}$$

Определение 5 (см. [3])**.** Распределение D многообразия M называется инволютивным, если оно является подалгеброй Ли алгебры Ли $\mathcal{X}(M)$, рассматриваемой как (бесконечномерное) R-линейное пространство, т.е. $\forall X,Y\in D\Rightarrow [X,Y]\in D$.

Распределение инволютивно тогда и только тогда, когда существует такая 1-форма ω, что $d\omega\wedge\omega = 0$ (см. [3]).

Определение 6 (см. [3])**.** Распределение на M называется вполне интегрируемым, если через каждую точку многообразия M проходит интегральное многообразие максимальной размерности.

Предложение 1. *Первое фундаментальное распределение $lcAC_S$-многообразия является вполне интегрируемым.*

Доказательство. Из (3) следует, что первое фундаментальное распределение L $lcAC_S$-многообразия инволютивно, а значит, в силу теоремы Фробениуса (см. [3]) вполне интегрируемо. □

Напомним, что компоненты ковариантного дифференциала структурного оператора Φ в римановой связности ∇ для $lcAC_S$-многообразий на пространстве присоединенной G-структуры имеют следующий вид (см. [7]):

$$\begin{gathered} \Phi^a_{0,b} = -\Phi^0_{\hat{a},b} = -\sqrt{-1}\delta^a_b\sigma_0; \quad \Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}} = -\Phi^0_{a,\hat{b}} = \sqrt{-1}\delta^b_a\sigma_0; \\ \Phi^a_{0,0} = -\Phi^0_{\hat{a},0} = \sqrt{-1}\sigma^a; \quad \Phi^{\hat{a}}_{0,0} = -\Phi^0_{a,0} = -\sqrt{-1}\sigma_a; \\ \Phi^a_{\hat{b},c} = 4\sqrt{-1}\sigma^{[a}\delta^{b]}_c; \quad \Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}} = -4\sqrt{-1}\sigma_{[a}\delta^c_{b]}; \\ \Phi^a_{\hat{b},\hat{c}} = 4\sqrt{-1}B^{cab} \quad \Phi^{\hat{a}}_{b,c} = -4\sqrt{-1}B_{cab}; \\ \Phi^0_{a,b} = -\Phi^{\hat{a}}_{0,b} = -\sqrt{-1}B_{ab}; \quad \Phi^0_{\hat{a},\hat{b}} = -\Phi^a_{0,\hat{b}} = \sqrt{-1}B^{ab}; \\ \Phi^a_{\hat{b},0} = \Phi^{\hat{a}}_{b,0} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Тензором Нейенхейса (см. [5]) эндоморфизма Φ называется тензор N типа $(2,1)$, для $X,Y\in\mathcal{X}(M)$ определяемый формулой

$$N_\Phi(X,Y) = \frac{1}{4}\Big([\Phi X,\Phi Y] + \Phi^2[X,Y] - \Phi[\Phi X,Y] - \Phi[X,\Phi Y]\Big).$$

В терминах ковариантного дифференцирования тензор Нейенхейса AC-структуры можно определить формулой

$$N(X,Y) = \frac{1}{4}\Big\{\nabla_{\Phi X}(\Phi)Y - \Phi\nabla_X(\Phi)Y - \nabla_{\Phi Y}(\Phi)X + \Phi\nabla_Y(\Phi)X\Big\}.$$

На пространстве присоединенной G-структуры компоненты тензора N определяются тождествами

$$\begin{gathered}N^0_{ab}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^0_{[a,b]};\quad N^0_{\hat{a}b}=-N^0_{b\hat{a}}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^0_{(\hat{a},b)};\\ N^0_{\hat{a}\hat{b}}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^0_{[\hat{a},\hat{b}]};\quad N^a_{\hat{b}0}=-N^a_{0\hat{b}}=\frac{\sqrt{-1}}{4}\Phi^a_{\hat{b},0}-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{0,\hat{b}};\\ N^a_{\hat{b}\hat{c}}=\sqrt{-1}\Phi^a_{[\hat{b},\hat{c}]};\quad N^{\hat{a}}_{bc}=-\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{[b,c]};\\ N^{\hat{a}}_{b0}=-N^{\hat{a}}_{0b}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{0,b}-\frac{\sqrt{-1}}{4}\Phi^{\hat{a}}_{b,0}.\end{gathered}\tag{6}$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно равны нулю (см. [3, 4]). Тогда согласно (4) и (5) ненулевые компоненты тензора Нейенхейса структурного эндоморфизма $lcAC_S$-структуры задаются равенствами

$$N^a_{\hat{b}0}=-N^a_{0\hat{b}}=-\frac{1}{2}B^{ab};\quad N^{\hat{a}}_{b0}=-N^{\hat{a}}_{0b}=-\frac{1}{2}B_{ab};\quad N^a_{\hat{b}\hat{c}}=2B^{abc};\quad N^{\hat{a}}_{bc}=2B_{abc}.\tag{7}$$

Определение 7 (см. [3, 5])**.** AC-Структура на многообразии называется интегрируемой, если AC-многообразие локально эквивалентно произведению комплексного многообразия на гладкое многообразие без дополнительной структуры.

Обращение тензора Нейенхейса в нуль равносильно интегрируемости AC-структуры (см. [3,5]).

Пусть $lcAC_S$-структура интегрируема; тогда из (7) следует, что $B^{abc}=B_{abc}=0$, $B_{ab}=B^{ab}=0$. Первая группа структурных уравнений (3) запишется в виде

$$\begin{gathered}d\omega=C_b\omega\wedge\omega^b+C^b\omega\wedge\omega_b;\\ d\omega^a=-\theta^a_b\wedge\omega^b+B^{ab}{}_c\omega^c\wedge\omega_b+B^a_b\omega\wedge\omega^b;\\ d\omega_a=\theta^b_a\wedge\omega_b+B_{ab}{}^c\omega_c\wedge\omega^b+B^b_a\omega\wedge\omega_b,\end{gathered}$$

а первая группа структурных уравнений (2) почти эрмитовой структуры интегральных многообразий распределения L интегрируемой $lcAC_S$-структуры — в виде

$$\begin{gathered}d\omega^a=-\theta^a_b\wedge\omega^b+B^{ab}c\omega^c\wedge\omega_b;\\ d\omega_a=\theta^b_a\wedge\omega_b+B_{ab}{}^c\omega_c\wedge\omega^b.\end{gathered}$$

где $B^{ab}{}_c=2\sigma^{[a}\delta^{b]}_c$, $B_{ab}{}^c=2\sigma_{[a}\delta^c_{b]}$. Т. е. в классификации Грея—Хервеллы (см. [3]) эта структура является структурой класса W_4.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения интегрируемого $lcAC_S$-многообразия является структурой класса W_4 в классификации Грея—Хервеллы почти эрмитовых структур.*

Известно (см. [9]), что задание тензора Нейенхейса равносильно заданию четырех тензоров $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$, а именно,

$$\begin{aligned}&N^{(1)}(X,Y)=N(X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi;\\ &N^{(2)}(X,Y)=(\mathcal{L}_{\Phi X}\eta)(Y)-(\mathcal{L}_{\Phi Y}\eta)(X);\\ &N^{(3)}(X)=(\mathcal{L}_\xi\Phi)(X);\\ &N^{(4)}(X)=(\mathcal{L}_\xi\eta)(X);\quad X,Y\in\mathcal{X}(M),\end{aligned}$$

где $\mathcal{L}_X$ — производная Ли в направлении векторного поля X.

В [1,6] приведено аналитическое выражение тензоров $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$:

$$
\begin{gathered}
N^{(2)}(X,Y)=\nabla_{\Phi X}(\eta)(Y)+\eta\{\nabla_Y(\Phi)X\}-\nabla_{\Phi Y}(\eta)(X)-\eta\{\nabla_X(\Phi)Y\};\\
N^{(3)}(X)=\nabla_\xi(\Phi)X-\nabla_{\Phi X}\xi+\Phi(\nabla_X\xi);\\
N^{(4)}(X)=\nabla_\xi(\eta)(X);\quad \forall X,Y\in\mathcal{X}(M).
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Для получения компонент этих тензоров на пространстве присоединенной G-структуры $lcAC_S$-многообразия, проведем предварительные вычисления. Пусть M — $lcAC_S$-многообразие тензорные компоненты формы римановой связности имеют следующий вид (см. [7]):

$$
\begin{gathered}
\theta^a_{\hat b}=-2\sigma^{[a}\delta^{b]}_c\omega^c-2B^{cab}\omega_c;\quad \theta^{\hat a}_b=-2\sigma_{[a}\delta^c_{b]}\omega_c-2B_{cab}\omega^c;\\
\theta^a_0=\sigma_0\omega^a+B^{ab}\omega_b-\sigma^a\omega;\quad \theta^{\hat a}_0=\sigma_0\omega_a+B_{ab}\omega^b-\sigma_a\omega;\\
\theta^0_a=-\sigma_0\omega_a-B_{ab}\omega^b+\sigma_a\omega;\\
\theta^0_{\hat a}=-\sigma_0\omega^a-B^{ab}\omega_b+\sigma^a\omega
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Рассмотрим характеристический вектор $lcAC_S$-многообразия. Поскольку ξ — тензор типа $(0,1)$, его компоненты на пространстве расслоения всех комплексных реперов над M удовлетворяют уравнениям

$$d\xi^i+\xi^j\theta^i_j=\xi^i{}_{,j}\omega^j,$$

где $\xi^i{}_{,j}$ — компоненты тензора $\nabla\xi$. Расписывая эти соотношения на пространстве присоединенной G-структуры с учетом (9) и того обстоятельства, что на этом пространстве $\xi^a=0$, $\xi^{\hat a}=0$, $\xi^0=1$, получаем для $lcAC_S$-многообразий следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
\xi^0{}_{,j}=0;\quad \xi^a{}_{,0}=\sqrt{-1}\Phi^a_{0,0}=C^a=-\sigma^a;\\
\xi^a{}_{,b}=\sqrt{-1}\Phi^a_{0,b}=B^a{}_b=\sigma_0\delta^a_b;\quad \xi^a{}_{,\hat b}=\sqrt{-1}\Phi^a_{0,\hat b}=B^{ab};\\
\xi^{\hat a}{}_{,0}=-\sqrt{-1}\Phi^{\hat a}_{0,0}=C_a=-\sigma_a;\quad \xi^{\hat a}{}_{,b}=-\sqrt{-1}\Phi^{\hat a}_{0,b}=B_{ab};\\
\xi^{\hat a}{}_{,\hat b}=-\sqrt{-1}\Phi^{\hat a}_{0,\hat b}=B_a{}^b=\sigma_0\delta^b_a.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Аналогично для контактной формы η $lcAC_S$-многообразия получим компоненты ковариантной производной:

$$
\begin{gathered}
\eta_{0,i}=0;\quad \eta_{\hat a,0}=\sqrt{-1}\Phi^a_{0,0}=C^a=-\sigma^a;\\
\eta_{\hat a,b}=\sqrt{-1}\Phi^a_{0,b}=B^a{}_b=\sigma_0\delta^a_b;\quad \eta_{\hat a,\hat b}=\sqrt{-1}\Phi^a_{0,\hat b}=B^{ab};\\
\eta_{a,0}=-\sqrt{-1}\Phi^{\hat a}_{0,0}=C_a=-\sigma_a;\quad \eta_{a,b}=-\sqrt{-1}\Phi^{\hat a}_{0,b}=B_{ab};\\
\eta_{a,\hat b}=-\sqrt{-1}\Phi^{\hat a}_{0,\hat b}=B_a{}^b=\sigma_0\delta^b_a.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Учитывая, что $\omega=\omega^0=\pi^*(\eta)$, где π — естественная проекция пространства присоединенной G-структуры на $lcAC_S$-многообразие M, находим, что на этом пространстве тензор $N^{(1)}$ имеет следующие компоненты:

$$
\begin{gathered}
(N^{(1)})^0_{a0}=-(N^{(1)})^0_{0a}=-C_a=\sigma_a;\\
(N^{(1)})^0_{\hat a0}=-(N^{(1)})^0_{0\hat a}=-C^a=\sigma^a;\\
(N^{(1)})^a_{\hat b0}=-(N^{(1)})^a_{0\hat b}=-\frac{1}{2}B^{ab};\quad (N^{(1)})^a_{\hat b\hat c}=2B^{abc};\\
(N^{(1)})^{\hat a}_{bc}=2B_{abc},\quad (N^{(1)})^{\hat a}_{b0}=-(N^{(1)})^{\hat a}_{0b}=-\frac{1}{2}B_{ab};
\end{gathered}
\tag{12}
$$

остальные компоненты нулевые.

Определение 8 (см. [8,9])**.** Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если

$$N(X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi=0.$$

Понятие нормальности было введено С. Сасаки и Дж. Хатакеямой (см. [9]) и является одним из фундаментальных понятий контактной геометрии, тесно связанных с понятием интегрируемости структуры.

Пусть M — нормальное $lcAC_S$-многообразие. Тогда из (12), (4) и определения 8 следует, что

$$C_a = C^a = 0, \quad B^{ab} = B_{ab} = 0, \quad B^{abc} = B_{abc} = 0, \quad B^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c = 0.$$

Первая группа структурных уравнений нормального $lcAC_S$-многообразия запишется в виде

$$\begin{aligned} d\omega &= 0; \\ d\omega^a &= -\theta^a_b \wedge \omega^b + B^a{}_b \omega \wedge \omega^b; \\ d\omega_a &= \theta^b_a \wedge \omega_b + B_a{}^b \omega \wedge \omega_b, \end{aligned}$$

а первая группа структурных уравнений почти эрмитовой структуры, индуцированной на первом фундаментальном распределении, — запишется в виде

$$d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b; \quad d\omega_a = \theta^b_a \wedge \omega_b.$$

Таким образом, в классификации Грея—Херවිеллы (см. [3]) эта структура является келеровой структурой.

Теорема 2. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения нормального $lcAC_S$-многообразия является келеровой структурой.*

На пространстве присоединенной G-структуры тождество (8) примет вид

$$N^{(2)}_{ij} = \eta_{j,k}\Phi^k_i - \eta_{i,k}\Phi^k_j + \eta_k \Phi^k_{i,j} - \eta_k \Phi^k_{j,i}. \tag{13}$$

С учетом соотношений $\eta_{\hat{a}} = \eta_a = 0$, $\eta_0 = 1$, (1) и (11), из (13) имеем

$$\begin{aligned} N^{(2)}_{0a} &= -N^{(2)}_{a0} = -\eta_0 \Phi^0_{a,0} = \sqrt{-1} C_a = -\sqrt{-1}\sigma_a; \\ N^{(2)}_{0\hat{a}} &= -N^{(2)}_{\hat{a}0} = -\eta_0 \Phi^0_{\hat{a},0} = -\sqrt{-1} C^a = \sqrt{-1}\sigma^a, \end{aligned} \tag{14}$$

остальные компоненты нулевые.

Пусть на $lcAC_S$-многообразии $N^{(2)}(X,Y) = 0$; тогда из (14), с учетом (4) следует, что

$$C_a = C^a = 0, \quad B^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c = 0.$$

Первая группа структурных уравнений такого $lcAC_S$-многообразия примет вид

$$\begin{aligned} d\omega &= 0; \\ d\omega^a &= -\theta^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^a{}_b \omega \wedge \omega^b + B^{ab}\omega \wedge \omega_b; \\ d\omega_a &= \theta^b_a \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_a{}^b \omega \wedge \omega_b + B_{ab}\omega \wedge \omega^b. \end{aligned}$$

Первая группа структурных уравнений почти эрмитовой структуры, индуцированной на первом фундаментальном распределении данного $lcAC_S$-многообразия, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c; \\ d\omega_a &= \theta^b_a \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c. \end{aligned}$$

В классификации Грея—Херверллы (см. [3]) эта структура является почти келеровой структурой. Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на первом фундаментальном распределении $lcAC_S$-многообразия, для которого $N^{(2)}(X,Y) = 0$, является почти келеровой структурой в классификации Грея—Херверллы почти эрмитовых структур.*

На пространстве присоединенной G-структуры тождество (8) равносильно соотношениям

$$(N^{(3)})^i_k = \Phi^i_{k,j}\xi^j - \xi^i{}_{,j}\Phi^j_k + \Phi^i_j\xi^j{}_{,k}.$$

С учетом (5) и (10) ненулевые компоненты $N^{(3)}$ для $lcAC_S$-многообразия на пространстве присоединенной G-структуры имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}(N^{(3)})^0_a &= \Phi^0_{a,0} = -\sqrt{-1}C_a = \sqrt{-1}\sigma_a;\\ (N^{(3)})^0_{\hat a} &= \Phi^0_{\hat a,0} = \sqrt{-1}C^a = -\sqrt{-1}\sigma^a;\\ (N^{(3)})^a_{\hat b} &= 2\sqrt{-1}\xi^a{}_{,\hat b} = -2\Phi^a_{0,\hat b} = 2\sqrt{-1}B^{ab};\\ (N^{(3)})^{\hat a}_b &= -2\sqrt{-1}\xi^{\hat a}{}_{,b} = -2\Phi^{\hat a}_{0,b} = -2\sqrt{-1}B_{ab}.\end{aligned} \tag{15}$$

Обращение в нуль тензора $N^{(3)}(X)$ на $lcAC_S$-многообразии влечет, согласно (15) с учетом (4), выполнение равенств

$$C_a = C^a = 0, \quad B^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c = 0, \quad B^{ab} = B_{ab} = 0.$$

Первая группа структурных уравнений $lcAC_S$-многообразия на пространстве присоединенной G-структуры примет следующий вид:

$$\begin{aligned}d\omega &= 0;\\ d\omega^a &= -\theta^a_b\wedge\omega^b + B^{abc}\omega_b\wedge\omega_c + B^a{}_b\omega\wedge\omega^b;\\ d\omega_a &= \theta^b_a\wedge\omega_b + B_{abc}\omega^b\wedge\omega^c + B_a{}^b\omega\wedge\omega_b.\end{aligned}$$

Следовательно, почти эрмитова структура, индуцируемая на первом фундаментальном распределении $lcAC_S$-многообразия, для которого $N^{(3)}(X) = 0$ является почти келеровой структурой в классификации Грея—Херveллы почти эрмитовых структур.

Наконец, рассмотрим тензор $N^{(4)}(X) = \nabla_\xi(\eta)(X)$; $\forall X \in \mathcal{X}(M)$. На пространстве присоединенной G-структуры это равенство запишется в виде $(N^{(4)})_i = \eta_{i,0}$; последнее равносильно соотношениям

$$\begin{aligned}(N^{(4)})_0 &= \eta_{0,0} = 0;\\ (N^{(4)})_a &= \eta_{a,0} = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat a}_{0,0} = C_a = -\sigma_a;\\ (N^{(4)})_{\hat a} &= \eta_{\hat a,0} = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,0} = C^a = -\sigma^a.\end{aligned} \tag{16}$$

Равенство нулю тензора $N^{(4)}(X)$, согласно (16) с учетом (4), равносильно соотношениям

$$C_a = C^a = 0, \quad B^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c = 0.$$

В этом случае первая группа структурных уравнений $lcAC_S$-многообразия на пространстве присоединенной G-структуры примет следующий вид:

$$\begin{aligned}d\omega &= 0;\\ d\omega^a &= -\theta^a_b\wedge\omega^b + B^{abc}\omega_b\wedge\omega_c + B^a{}_b\omega\wedge\omega^b + B^{ab}\omega\wedge\omega_b;\\ d\omega_a &= \theta^b_a\wedge\omega_b + B_{abc}\omega^b\wedge\omega^c + B_a{}^b\omega\wedge\omega_b + B_{ab}\omega\wedge\omega^b.\end{aligned}$$

Поэтому почти эрмитова структура, индуцируемая на первом фундаментальном распределении $lcAC_S$-многообразия, для которой $N^{(4)}(X) = 0$, является почти келеровой структурой в классификации Грея—Херveллы почти эрмитовых структур.

Как промежуточный факт можно отметить следующее утверждение.

Предложение 2. *Для $lcAC_S$-многообразия обращение тензора $N^{(2)}$ в нуль равносильно обращению в нуль тензора $N^{(4)}$.*

Доказательство. Сравнивая полученные для $lcAC_S$-многообразия компоненты тензора $N^{(2)}$ и тензора $N^{(4)}$ на пространстве присоединенной G-структуры, а именно соотношения (14) и (16), получим требуемое утверждение. □

Обобщая вышеизложенное, сформулируем следующий результат.

Теорема 4.

1. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения интегрируемого $lcAC_S$-многообразия, является структурой класса W_4.*
2. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения нормального $lcAC_S$-многообразия, является келеровой структурой.*
3. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения $lcAC_S$-многообразия, для которого $N^{(2)}(X,Y) = 0$, или $N^{(3)}(X) = 0$, или $N^{(4)}(X) = 0$, является почти келеровой структурой в классификации Грея—Херреллы почти эрмитовых структур.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абу-Салеем А., Рустанов А. Р., Харитонова С. В.* Свойства интегрируемости обобщенных многообразий Кенмоцу// Владикавказ. мат. ж. — 2018. — *20*, № 3. — С. 4–20.
2. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 1986. — *18*. — С. 25–71.
3. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — Одесса: Печатный дом, 2013.
4. *Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р.* Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 8. — С. 71–100.
5. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1981.
6. *Рустанов А. Р.* Свойства интегрируемости $NC_1$0-многообразий// Мат. физ. комп. модел. — 2017. — *20*, № 5. — С. 32–38.
7. *Харитонова С. В.* О геометрии локально конформно почти косимплектических многообразий// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 1. — С. 126–138.
8. *Blair D. E.* Contact manifolds in Riemannian geometry// Lect. Notes Math. — 1976. — *509*. — P. 1–146.
9. *Sasaki S., Hatakeyama J.* On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure// Tôhoku Math. J. — 1961. — *13*, № 2. — P. 281–294.
10. *Vaisman I.* Conformal changes of almost contact metric manifolds// Lect. Notes Math. — 1980. — *792*. — P. 435–443.

Рустанов Алигаджи Рабаданович
Московский государственный строительный университет
E-mail: `aligadzhi@yandex.ru`

Харитонова Светлана Владимировна
Оренбургский государственный университет
E-mail: `hcb@yandex.ru`