ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 219 (2023). С. 16–38
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-219-16-38

УДК 512.552

АВТОМОРФИЗМЫ МАТРИЧНЫХ КОЛЕЦ

© 2023 г. **П. А. КРЫЛОВ, А. А. ТУГАНБАЕВ**

Аннотация. Исследуются группы автоморфизмов алгебр формальных матриц. Также рассматриваются автоморфизмы обычных алгебр матриц (в частности, алгебр треугольных матриц).

Ключевые слова: алгебра формальных матриц, алгебра треугольных матриц, автоморфизм.

AUTOMORPHISMS OF MATRIX RINGS

© 2023 **P. A. KRYLOV, A. A. TUGANBAEV**

Abstract. We examine the automorphism groups of algebras of formal matrices. We also consider automorphisms of ordinary matrix algebras (in particular, algebras of triangular matrices).

Keywords and phrases: algebra of formal matrices, algebra of triangular matrices, automorphism.

AMS Subject Classification: 16R99, 16D10

1. Введение. Автоморфизмы и изоморфизмы различных колец матриц изучались во многих статьях; см., например, [1, 4–11, 17–21, 25].

Исследовались также и некоторые другие отображения матричных колец; в частности, коммутирующие и централизующие отображения (см., например, [27]).

Работа авторов [25] посвящена автоморфизмам и гомоморфизмам алгебр формальных матриц. Сначала в ней рассматриваются автоморфизмы алгебры $S = L \oplus M$, где L — некоторая подалгебра, M — нильпотентный идеал. В таком случае говорят, что S — *расщепляющееся расширение* идеала M с помощью подалгебры L. Затем в [25] результаты о группе $\operatorname{Aut} S$ применяются к алгебрам формальных матриц. При этом часть утверждений не записана в полном виде.

В настоящей статье значительно усиливаются некоторые результаты из [25] и приводится много новых результатов об автоморфизмах колец формальных матриц. Исследуются также автоморфизмы обычных колец матриц, в частности, треугольных.

Отметим, что работы [10] и [11] содержат интересные результаты и подходы к нахождению строения автоморфизмов колец формальных треугольных матриц. Мы почерпнули и использовали некоторые идеи из этих статей [10] и [11].

Мы рассматриваем только ассоциативные кольца, являющиеся унитальными алгебрами над некоторым коммутативным унитальным кольцом T. Однако само кольцо T явно почти не присутствует. Иногда мы пишем «алгебра», иногда «кольцо».

Пусть K — некоторая алгебра. Тогда $\operatorname{Aut} K$ — группа автоморфизмов, $\operatorname{In}(\operatorname{Aut} K)$ — подгруппа внутренних автоморфизмов и $\operatorname{Out} K$ — группа внешних автоморфизмов алгебры K, т. е. фактор-группа $\operatorname{Aut} K/\operatorname{In}(\operatorname{Aut} K)$.

Если S — некоторое кольцо, то $U(S)$ — его группа обратимых элементов, а $P(S)$ — первичный радикал кольца S. Через $\operatorname{Aut}_S M$ обозначаем группу автоморфизмов S-S-бимодуля M.

Пусть R, S — кольца, A — R-S-бимодуль и α, γ — автоморфизмы колец R и S соответственно.

Можно задать новую структуру бимодуля на A, положив

$$x \circ a = \alpha(x)a, \quad a \circ y = a\gamma(y) \quad \text{для всех} \quad x \in R,\ y \in S,\ a \in A.$$

Обычно этот бимодуль обозначается через ${}_\alpha A_\gamma$, а исходный бимодуль может быть обозначен через ${}_1A_1$.

Полупрямое произведение групп A и B обозначается через $A \leftthreetimes B$. Такое обозначение носит условный характер, но оно удобно. Запись $G \cong A \leftthreetimes B$ подразумевает, что группа G содержит нормальную подгруппу H и подгруппу E, для которых

$$G = H \cdot E, \quad H \cap E = \langle e \rangle, \quad A \cong H, \quad B \cong E \cong G/H.$$

2. Группа $\operatorname{Aut} K$, где K — кольцо формальных матриц с нулевыми идеалами следа. Кольцам формальных матриц посвящена книга [24]. Можно также говорить об алгебрах формальных матриц.

Зафиксируем натуральное число $n \geqslant 2$. Пусть $R_1, \ldots, R_n$ — кольца и M_{ij} — R_i-R_j-бимодули, причем $M_{ii} = R_i$, $i, j = 1, \ldots, n$. Предположим, что для любых таких индексов $i, j, k = 1, \ldots, n$, что $i \neq j$, $j \neq k$, задан R_i-R_k-бимодульный гомоморфизм $\varphi_{ijk}\colon M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \to M_{ik}$. Обозначим через φ_{iik} и φ_{ikk} канонические изоморфизмы

$$R_i \otimes_{R_i} M_{ik} \to M_{ik}, \quad M_{ik} \otimes_{R_k} R_k \to M_{ik}$$

соответственно, $i, k = 1, \ldots, n$. Вместо $\varphi_{ijk}(a \otimes b)$ просто пишем ab. Допустим также, что в этих обозначениях $(ab)c = a(bc)$ для всех элементов $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$, $c \in M_{k\ell}$ и индексов i, j, k, ℓ.

Обозначим через K множество всех квадратных матриц (a_{ij}) порядка n со значениями в бимодулях M_{ij}. Относительно стандартных матричных операций сложения и умножения K образует кольцо. Его можно записать в следующем виде:

$$K = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \ldots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \ldots & M_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{n1} & M_{n2} & \ldots & R_n \end{pmatrix}.$$

Кольцо K называется *кольцом формальных* (или *обобщенных*) *матриц* порядка n. Если $M_{ij} = 0$ для всех i, j, удовлетворяющих неравенству $i > j$, то K — *кольцо формальных (верхних) треугольных матриц*.

Для каждого $k = 1, \ldots, n$ положим

$$I_k = \sum_{i \neq k} \operatorname{Im}(\varphi_{kik}), \quad \text{или, по-другому,} \quad I_k = \sum_{i \neq k} M_{ki} M_{ik}.$$

Здесь $M_{ki}M_{ik}$ — множество всех конечных сумм элементов вида ab, $a \in M_{ki}$, $b \in M_{ik}$. Тогда I_k — идеал кольца R_k. Говорят, что $I_1, \ldots, I_n$ — *идеалы следа* кольца K.

Как обычно, мы будем отождествлять некоторые матрицы с соответствующими элементами. Например, матрицу вида

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

можно отождествить с элементом r и т. п. Аналогичные соглашения действуют и для множеств матриц.

Пусть K — некоторая алгебра формальных матриц. Обозначим через L подкольцо всех диагональных матриц, а через M подгруппу всех матриц с нулями на главной диагонали. Можно записать прямую сумму $K = L \oplus M$ абелевых групп. Подгруппа M будет идеалом в точности тогда, когда все идеалы следа кольца K равны нулю. В этом случае говорят, что K кольцо *с нулевыми идеалами следа*. К таким кольцам относятся все кольца треугольных матриц.

Пусть K — кольцо формальных матриц с нулевыми идеалами следа. Имеем расщепляющееся расширение $K = L \oplus M$, причем M — нильпотентный идеал степени нильпотентности $\leqslant n$ и L-L-бимодуль. В [25] автоморфизмы такого кольца K представляются определенными матрицами порядка 2. Делается это так. Произвольному автоморфизму φ алгебры K стандартным способом можно сопоставить матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\alpha\colon L \to L, \quad \beta\colon M \to M, \quad \gamma\colon M \to L, \quad \delta\colon L \to M$$

— T-модульные гомоморфизмы и

$$\varphi(x+y) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha(x)+\gamma(y)) + (\delta(x)+\beta(y))$$

для всех $x \in L$ и $y \in M$. Как и в [25] мы будем в основном рассматривать (за исключением раздела 10) только «треугольный» случай; имеется в виду, что $\gamma = 0$ для любого автоморфизма φ. В дальнейшем мы не будем различать автоморфизм φ и соответствующую ему матрицу. Иногда для краткости мы пишем «треугольный автоморфизм φ», если

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix},$$

и «диагональный автоморфизм φ», если

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$$

— некоторый автоморфизм алгебры K. В таком случае α, δ, β удовлетворяют равенствам раздела 3 статьи [25]. В частности, α — автоморфизм алгебры L, а β — автоморфизм алгебры M (как неунитальной алгебры). Если $M^2 = 0$, то δ является дифференцированием алгебры L со значениями в бимодуле ${}_\alpha M_\alpha$, а β — изоморфизм L-L-бимодулей $M \to {}_\alpha M_\alpha$.

Договоримся через $\mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,K)$ (соотв., $\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\,K)$) обозначать подгруппу внутренних автоморфизмов алгебры K, определяемых обратимыми элементами вида $1+y$, $y \in M$, (соотв., обратимыми элементами алгебры L). Первая подгруппа является нормальной в $\mathrm{Aut}\,K$ и имеет место полупрямое разложение

$$\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\,K) = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,K) \leftthreetimes \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\,K)$$

(см. [25, Section 4]).

Определим один гомоморфизм и несколько групп (см. [25, Section 3]).

Пусть $f\colon \mathrm{Aut}\,K \to \mathrm{Aut}\,L$ — такой гомоморфизм, что $f(\varphi) = \alpha$ для каждого автоморфизма

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}.$$

Пусть, далее, Λ — подгруппа диагональных автоморфизмов, а Ψ — подгруппа, состоящая из автоморфизмов вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Кроме того, обозначим через Ω образ гомоморфизма f. Затем, пусть Φ — нормальная подгруппа

$$\left\{\varphi \in \mathrm{Aut}\,K : \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\,L)\right\}$$

группы $\mathrm{Aut}\,K$. Информация о введенных группах очень важна для понимания строения группы $\mathrm{Aut}\,K$.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — единичные элементы колец $R_1, \ldots, R_n$ соответственно. В соответствии с принятым соглашением отождествляем их с соответствующими матричными единицами.

Сформулируем два условия на алгебру K (см. [25, Section 9]).

I. Для любого $\varphi \in \operatorname{Aut} K$ верно равенство $\varphi M = M$, т. е. любой автоморфизм является треугольным.

II. Для любого $\varphi \in \operatorname{Aut} K$ и каждого $i = 1, \dots, n$ справедливо включение $\varphi(e_i) \in e_k + M$ для некоторого k.

Из выполнения условия II *вытекает выполнение условия* I.

Сформулируем подробно и в более полном виде основные результаты из разделов 8 и 9 работы [25] о группе $\operatorname{Aut} K$, где K — алгебра формальных матриц с нрулевыми идеалами следа.

Сначала запишем несколько полезных равенств и изоморфизмов:

$$\Psi \cap \operatorname{Aut} K = \Psi \cap \operatorname{In}_0(\operatorname{Aut} K) = \Psi_0; \tag{1}$$

$$\Lambda/(\operatorname{In}_0(\operatorname{Aut} K) \cdot \Psi) \cong \Omega/\operatorname{In}(\operatorname{Aut} L); \tag{2}$$

$$\Phi/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{In}_0(\operatorname{Aut} K)/\Psi_0 \cong \operatorname{In}(\operatorname{Aut} L); \tag{3}$$

$$\Phi/\operatorname{In}(\operatorname{Aut} K) \cong \Psi/\Psi_0. \tag{4}$$

Группа Ψ_0 — это подгруппа внутренних автоморфизмов алгебры K, определяемых центральными элементами алгебры L (введена в [25, Section 4]).

В следующей теореме собрана основная информация о группе $\operatorname{Aut} K$.

Теорема 1. *Пусть K — алгебра формальных матриц с нулевыми идеалами следа и выполнено условие* I. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(a) *Имеют место равенства*

$$\operatorname{Aut} K = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \rtimes \Lambda; \tag{5}$$

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \rtimes \Psi; \tag{6}$$

$$\Phi = \operatorname{In}(\operatorname{Aut} K) \cdot \Psi = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \rtimes \operatorname{In}_0(\operatorname{Aut} K) \cdot \Psi. \tag{7}$$

(b) *Верны изоморфизмы*

$$\operatorname{Aut} K/\operatorname{Ker} f \cong \Omega \cong \Lambda/\Psi; \tag{8}$$

$$\operatorname{Aut} K/\Phi \cong \Omega/\operatorname{In}(\operatorname{Aut} L). \tag{9}$$

(c) *В* $\operatorname{Out} K$ *есть нормальная подгруппа, изоморфная* Ψ/Ψ_0, *а факторгруппа по ней изоморфна* $\Omega/\operatorname{In}(\operatorname{Aut} L)$.

(d) *Если выполнено равенство* $\Omega = \operatorname{In}(\operatorname{Aut} L)$, *то верны соотношения*

$$\operatorname{Aut} K = \Phi = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \rtimes (\operatorname{In}_0(\operatorname{Aut} K) \cdot \Psi); \tag{10}$$

$$\operatorname{Out} K \cong \Psi/\Psi_0. \tag{11}$$

(e) *Если справедливо равенство* $\Psi = \Psi_0$, *то*

$$\Phi = \operatorname{In}(\operatorname{Aut} K), \quad \operatorname{Out} K \cong \Omega/\operatorname{In}(\operatorname{Aut} L).$$

Можно сделать вывод о том, что если удастся найти строение групп Ψ и Ω, то строение групп $\operatorname{Aut} K$ и $\operatorname{Out} K$ будет в определенном смысле известно.

В работе [25] для алгебры K над коиммутативным неразложимым кольцом при некоторых условиях вычисляются группы Ψ и Ω. В разделах 7 и 8 эти результаты получают значительное развитие, а сами указанные алгебры определяются в разделе 5.

Кольцо R называется *неразложимым*, если 1 — единственный его ненулевой центральный идемпотент.

Следствие 1. *Пусть все факторкольца $R_1/P(R_1), \dots, R_n/P(R_n)$ неразложимы. Тогда для алгебры K выполняются условия* II *и* I *и, следовательно, справедливы утверждения теоремы* 1.

Как мы договорились, мы отождествляем кольцо R_i с кольцом e_iKe_i, а бимодуль M_{ij} с бимодулем e_iKe_j.

Пример из [20], приведенный также в [25], говорит о том, что автоморфизмы могут «перемешивать» кольца R_i и бимодули M_{ij}. В [25] выделены некоторые условия, препятствующие такому перемешиванию. Учитывая теорему 1 можно при этом ограничиваться диагональными автоморфизмами.

Теорема 2. *Предположим, что все факторкольца $R_1/P(R_1), \dots, R_n/P(R_n)$ неразложимы. Пусть*

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

— диагональный автоморфизм алгебры K. Тогда автоморфизм α алгебры L переставляет кольца $R_1, \dots, R_n$, а автоморфизм β L-L-бимодуля M переставляет бимодули M_{ij} в соответствии с некоторой подстановкой τ степени n. Кроме того, сужение β на M_{ij} является изоморфизмом бимодулей $M_{ij} \to M_{\tau(i)\tau(j)}$ (относительно изоморфизмов колец $\alpha|_{R_i} \colon R_i \to R_{\tau(i)}$, $\alpha|_{R_j} \colon R_j \to R_{\tau(j)}$).

3. Кольца формальных треугольных матриц. В работе [25] кольца формальных треугольных матриц специально не рассматривались. Они обладают определенной спецификой, которая позволяет более глубоко проникнуть в строение как самих колец, так и их групп автоморфизмов.

Напоминаем, что, как указано в разделе 1, все наши кольца являются T-алгебрами.

Для кольца K приведем одно условие на кольца $R_1, \dots, R_n$, более слабое по сравнению с условием из следствия 1 и теоремы 2; это условие гарантирует выполнение условия I.

Определение 1 (см. [11])**.** Идемпотент e кольца R называется *полуцентральным*, если $(1-e)Re = 0$.

Кольцо R называется *сильно неразложимым*, если 1 — единственный его полуцентральный идемпотент.

Соберем вместе следующие условия на кольцо R:

(1) R — неразложимое кольцо;
(2) R — сильно неразложимое кольцо;
(3) факторкольцо $R/P(R)$ неразложимо;
(4) для любого идемпотента e кольца R из равенства $(1-e)Re = 0$ следует равенство $eR(1-e) = 0$.

Между этими условиями имеются такие соотношения:

$$(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1), \quad (2) \Rightarrow (4).$$

К условиям I и II из раздела 2 для кольца формальных матриц K добавим еще одно условие:

III. Каждое из колец $R_1, \dots, R_n$ удовлетворяет приведенному выше условию (4).

В разделе 2 отмечено, что условие II влечет условие I. Ниже мы покажем, что в «треугольном» случае условие III также влечет условие I.

Запишем один раз в полном виде кольцо K формальных треугольных матриц порядка n:

$$K = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ 0 & R_2 & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_n \end{pmatrix}.$$

Предложение 1. *Пусть K — алгебра формальных треугольных матриц, причем все кольца $R_1, \dots, R_n$ удовлетворяют условию* (4)*. Тогда K удовлетворяет условию* I*, т.е. любой автоморфизм алгебры K является треугольным.*

Доказательство. Как и в разделе 2, обозначим через $e_1, \dots, e_n$ единичные элементы колец $R_1, \dots, R_n$ соответственно. Запишем расщепляющееся расширение: $K = L \oplus M$.

Допустим напротив, что существует автоморфизм φ алгебры K, не являющийся треугольным. Для каждого $i = 1, \dots, n$ имеем равенство

$$\varphi(e_i) = g_i + y_i, \quad \text{где} \quad g_i \in L, \ y_i \in M.$$

Здесь $g_1, \ldots, g_n$ полная ортогональная система идемпотентов в L. Запишем их относительно разложения $L = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$:

$$\begin{aligned} &g_1 = g_1^{(1)} + \ldots + g_n^{(1)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &g_n = g_1^{(n)} + \ldots + g_n^{(n)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Все первые слагаемые в равенствах (12) образуют полную ортогональную систему идемпотентов в кольце R_1 и т. д. Можно заключить, что $e_i K e_j = 0$ для любых i, j с условием $i > j$. Далее имеем, что $\varphi(e_i) K \varphi(e_j) = 0$ и $g_i L g_j = 0$ для любых i, j с условием $i > j$.

Учитывая равенства (12), получаем следующую серию равенств:

$$\begin{gathered} \left(g_1^{(n)} + g_1^{(n-1)} + \ldots + g_1^{(2)}\right) R_1 g_1^{(1)} = 0, \\ \left(g_2^{(n)} + g_2^{(n-1)} + \ldots + g_2^{(3)}\right) R_2 \left(g_2^{(1)} + g_2^{(2)}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n^{(n)} R_n \left(g_n^{(1)} + g_n^{(2)} + \ldots + g_n^{(n-1)}\right) = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Учитывая условия на кольца $R_1, \ldots, R_n$, можно далее записать такие равенства:

$$\begin{gathered} g_1^{(1)} R_1 \left(g_1^{(n)} + g_1^{(n-1)} + \ldots + g_1^{(2)}\right) = 0, \\ \left(g_2^{(1)} + g_2^{(2)}\right) R_2 \left(g_2^{(n)} + g_2^{(n-1)} + \ldots + g_2^{(3)}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(g_n^{(1)} + g_n^{(2)} + \ldots + g_n^{(n-1)}\right) R_n g_n^{(n)} = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Из равенств (14) получаем, что

$$g_k^{(i)} R_k g_k^{(j)} = 0 \tag{15}$$

для всех $i, j, k = 1, \ldots, n$ со свойством $i < j$.

Так как автоморфизм φ не является треугольным, то существуют индексы i и j $(i < j)$, для которых φM_{ij} не содержится в M. Поэтому из равенства $\varphi M_{ij} = (g_i + y_i)(L \oplus M)(g_j + y_j)$ получаем, что $g_i L g_j \neq 0$. Отсюда следует, что

$$g_1^{(i)} R_1 g_1^{(j)} \oplus \ldots \oplus g_n^{(i)} R_n g_n^{(j)} \neq 0.$$

Поэтому $g_k^{(i)} R_k g_k^{(j)} \neq 0$ для некоторого k. Это противоречит (15). Следовательно, утверждение предложения верно. $\square$

Ситуация, когда кольцо формальных треугольных матриц удовлетворяет условию III, довольно распространенная. Это подтверждается следующим результатом.

Лемма 1. *Если кольцо S либо полупервично, либо нормально (например, коммутативно), либо сильно неразложимо, то S удовлетворяет условию (4).*

Доказательство. Для нормального или сильно неразложимого кольца утверждение очевидно.

Допустим, что кольцо S полупервично, но не удовлетворяет условию (4). Тогда S содержит такой идемпотент e, что $(1-e)Se = 0$, но $eS(1-e) \neq 0$. Кольцо S можно отождествить с кольцом формальных матриц вида

$$\begin{pmatrix} eSe & eS(1-e) \\ 0 & (1-e)S(1-e) \end{pmatrix}.$$

В этом кольце $eS(1-e)$ — ненулевой нильпотентный идеал; это приводит к противоречию. Следовательно, S удовлетворяет условию (4). $\square$

Следующий результат усиливает [25, Corollary 9.9(2)].

Следствие 2. *Пусть K — такая алгебра формальных треугольных матриц, что каждое из колец $R_1, \ldots, R_n$ удовлетворяет условию (15). Тогда для K справедливы утверждения теоремы 1.*

Приведем один частный случай следствия 2.

Следствие 3. *Предположим, что K — такая алгебра формальных треугольных матриц, что $R_1, \ldots, R_n$ — коммутативные кольца и $\Omega = \langle 1 \rangle$. Например, пусть $R_1 = \ldots = R_n = T$, где T — коммутативное неразложимое кольцо и $M_{ij} \neq 0$ для всех i, j с условием $i < j$. Тогда верно равенство* $\operatorname{Aut} K = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \rightthreetimes \Psi$.

Доказательство. Из равенства $\Omega = \langle 1 \rangle$ вытекает равенство $\operatorname{Aut} K = \operatorname{Ker} f$. Поэтому указанные в следствии равенства вытекают из следствия 2 и теоремы 1.

Перейдем к частному случаю. Из утверждений 1, 1 и 1 вытекает равенство $\operatorname{Aut} K = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \rightthreetimes \Lambda$. Пусть

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Lambda.$$

Автоморфизм β переставляет бимодули M_{ij} в соответствии с некоторой подстановкой τ (теорема 2). Поскольку все бимодули M_{ij} отличны от нуля, то τ — тождественная подстановка. Поэтому из равенств $R_1 = \ldots = R_n = T$ следует, что $\alpha = 1$, и затем мы получаем равенство $\Omega = \langle 1 \rangle$. $\square$

Специализируем теорему 2 на случай кольца K формальных треугольных матриц.

Следствие 4. *Пусть K — такая алгебра формальных треугольных матриц, что выполняется условие* I *и факторкольца $R_1/P(R_1), \ldots, R_n/P(R_n)$ неразложимы. Например, пусть кольца $R_1, \ldots, R_n$ сильно неразложимы. Кроме того, пусть $M_{ij} \neq 0$ для всех i, j с условием $i < j$. Тогда любой диагональный автоморфизм*

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

алгебры K оставляет каждое из колец $R_1, \ldots, R_n$ на месте, а сужение $\beta|_{M_{ij}}$ является изоморфизмом R_i-R_j-бимодулей $M_{ij} \to {}_{R_i}(M_{ij})_{R_j}$ для всех i, j с условием $i < j$.

Доказательство. Автоморфизмы α и β переставляют кольца $R_1, \ldots, R_n$ и бимодули M_{ij} в соответствии с некоторой подстановкой τ. Как и в доказательстве следствия 3 τ — тождественная подстановка. $\square$

4. Подгруппа Ψ и внутренние автоморфизмы. В начале раздела K обозначает некоторую алгебру формальных матриц с нулевыми идеалами следа.

В разделе 3 статьи [25] сформулирована задача вычисления подгруппы Ψ. Важная роль этой подгруппы в проблеме описания группы автоморфизмов алгебры K уже видна из теоремы 1. Приведем несколько замечаний о подгруппе Ψ. Все сказанное ниже верно для любой алгебры K (т. е. не предполагается, что каждый ее автоморфизм является треугольным).

Возьмем произвольный автоморфизм

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Psi.$$

Известно, что β — автоморфизм алгебры M (как неунитальной алгебры) и автоморфизм L-L-бимодуля M. И обратно, если отображение β имеет указанные свойства, то

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

— автоморфизм алгебры K, принадлежащий Ψ. Это наблюдение уточним следующим образом.

Автоморфизм β индуцирует автоморфизм β_{ij} на каждом R_i-R_j-бимодуле M_{ij}. При этом для любых попарно различных индексов i, j, k и элементов $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$ должно выполняться равенство

$$\beta_{ik}(a \cdot b) = \beta_{ij}(a) \cdot \beta_{jk}(b). \tag{16}$$

Пусть теперь для каждой пары индексов i, j дан автоморфизм β_{ij} бимодуля M_{ij}, причем верно равенство (16) для всех значений входящих в него символов. Полагая

$$\beta = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} \beta_{ij},$$

приходим к автоморфизму

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

который принадлежит подгруппе Ψ.

Мы получим вложение групп

$$\Psi \to \operatorname{Aut}_L M = \prod_{i,j=1, i\neq j}^{n} \operatorname{Aut}_L M_{ij},$$

если поставим в соответствие автоморфизму

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

из подгруппы Ψ набор ограничений $\beta|_{M_{ij}}$. Если алгебра K обладает тем свойством, что $M^2 = 0$, то соответствие

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \to \beta$$

определяет изоморфизм групп $\Psi \cong \operatorname{Aut}_L M$.

Есть еще одна ситуация, когда тоже можно указать строение подгруппы Ψ. Чтобы раскрыть эту ситуацию, наложим дополнительное условие на кольцо K. Именно, для любых индексов i, j, k с условием $i < j < k$ мы полагаем, что R_i-R_k-бимодульные гомоморфизмы $\varphi_{ijk}\colon M_{ij} \otimes M_{jk} \to M_{ik}$, используемые в определении умножения в K, являются изоморфизмами.

Напомним, что в разделе 2 мы договорились вместо $\varphi_{ijk}(a \otimes b)$ писать ab; кроме того, символ $M_{ij} \cdot M_{jk}$ обозначает множество всех конечных сумм элементов вида ab, где $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$. Иными словами, $M_{ij} \cdot M_{jk}$ — образ гомоморфизма φ_{ijk}. Ясно также, что мы будем понимать под произведением нескольких бимодулей M_{ij}. Итак, при $i < j < k$ или $i > j > k$ можно написать равенство $M_{ij} \cdot M_{jk} = M_{ik}$. Также верны равенства

$$M_{ik} = M_{i,i+1} \cdot M_{i+1,i+2} \cdot \ldots \cdot M_{k-1,k},$$
$$M_{ik} = M_{i,i-1} \cdot M_{i-1,i-2} \cdot \ldots \cdot M_{k+1,k},$$

соответственно при $i < k$ и $i > k$.

Далее получаем следующее. Пусть для каждого $i = 1, \ldots, n-1$ имеется автоморфизм $\beta_{i,i+1}$ бимодуля $M_{i,i+1}$. Эти автоморфизмы индуцируют однозначно определенный автоморфизм β_{ik} бимодуля M_{ik} для всех i, k с условием $i < k$. Аналогично, набор автоморфизмов $\beta_{i,i-1}$ бимодулей $M_{i,i-1}$ при $i = 2, \ldots, n$ индуцирует автоморфизм β_{ik} бимодуля M_{ik} для всех i, k с условием $i > k$. При этом верно равенство (16). Таким образом, автоморфизмы $\beta_{i,i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ и $\beta_{i,i-1}$ $(i = 2, \ldots, n)$ индуцируют однозначно определенный автоморфизм β алгебры M и L-L-бимодуля M. Значит, автоморфизм

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

лежат в подгруппе Ψ. Можно записать следующий результат.

Следствие 5. *В описанной выше ситуации имеет место изоморфизм*

$$\Psi \cong \prod_{i=1}^{n-1} \operatorname{Aut}(M_{i,i+1}) \times \prod_{i=2}^{n} \operatorname{Aut}(M_{i,i-1}).$$

Если K — кольцо треугольных матриц, то второй множитель в правой части отсутствует.

Во второй половине раздела коснемся следующего известного вопроса: когда все автоморфизмы алгебры K будут внутренними? Он рассматривался в [25, Section 10] для алгебр треугольных матриц. Здесь многое зависит от подгруппы Ψ.

До конца раздела мы предполагаем, что алгебра K формальных матриц с нулевыми идеалами следа удовлетворяет условию I, записанному в разделе 2.

Следующие факты вытекают из теоремы 1, с и равенств (12) перед этой теоремой.

Следствие 6.

1. *Каждый автоморфизм алгебры K является внутренним в точности тогда, когда справедливы равенства*
$$\Psi = \Psi_0 \quad \textit{и} \quad \Omega = \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, L).$$
2. *Включение $\Psi \subseteq \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, K)$ равносильно равенству $\Psi = \Psi_0$.*

Приведем ряд замечаний, касающихся выполнения равенства $\Psi = \Psi_0$. Вряд ли возможно найти критерии выполнения этого равенства без дополнительной информации о кольцах R_i и бимодулях M_{ij}.

А что можно сказать об автоморфизмах из Ψ_0? Пусть автоморфизм
$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$
принадлежит Ψ_0 и определяется обратимой центральной матрицей $v = \mathrm{diag}(v_1, \ldots, v_n) \in L$, где
$$L = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i.$$
Для любых не совпадающих индексов i, j и любого $y \in M_{ij}$ имеем равенства
$$\varphi(y) = \beta(y) = v^{-1} y v = v_i^{-1} y v_j;$$
это вся имеющаяся информация о φ.

Ниже считаем, что кольца $R_1, \ldots, R_n$ имеют попарно изоморфные центры. Мы отождествляем эти центры и говорим «общий центр». Обозначим его буквой C.

Предположим, что группа автоморфизмов каждого R_i-R_j-бимодуля M_{ij} состоит из умножений на обратимые элемент из центра C, т. е. $\mathrm{Aut}(M_{ij}) = U(C)$. Возьмем
$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Psi.$$
Пусть c_{ij} — тот обратимый элемент кольца C, для которого выполняется равенство $\beta(y) = c_{ij} y$, $y \in M_{ij}$. Тогда для автоморфизма φ равенство (16) приобретает вид
$$c_{ik} ab = c_{ij} c_{jk} ab \quad \text{или} \tag{17}$$
$$(c_{ik} - c_{ij} c_{jk}) M_{ij} M_{jk} = 0. \tag{18}$$
Получается, что автоморфизму φ можно поставить в соответствие систему обратимых элементов c_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, где мы считаем, что $c_{ii} = 1$. Для этих элементов верны формулы (17) и (18).

Указанное выше вложение групп $\Psi \to \mathrm{Aut}_L M$ превращается во вложение
$$\Psi \to \prod_{n^2 - n} U(S).$$
Найти его образ затруднительно. В разделе 7 это делается для кольца матриц над заданным кольцом R.

Предложение 2. *Пусть K — такая алгебра, как в теореме 1. Дополнительно считаем, что все кольца R_i имеют общий центр C и $cm = mc$ для всех $c \in C$ и $m \in M$. При таких предположениях равенство $\Psi = \Psi_0$ справедливо в точности тогда, когда для любого автоморфизма*
$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Psi$$

существуют такие обратимые элементы $c_{ij} \in C$, $i, j = 1, \ldots, n$, *что* $c_{ii} = 1$,

(a) $\varphi(y) = c_{ij} y$ *для любых* i, j *и* $y \in M_{ij}$;

(b) $c_{ij} \cdot c_{jk} = c_{ik}$ *для всех* i, j, k.

Доказательство. Предположим, что равенство $\Psi = \Psi_0$ справедливо и

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Psi.$$

Продолжая равенства (1), мы получаем $\varphi(y) = v_i^{-1} v_j y$. Положим

$$c_{ij} = v_i^{-1} v_j \quad \text{и} \quad c_{ii} = 1 \quad \text{для всех } i, j.$$

Элементы c_{ij} удовлетворяют (a) и (b).

Обратно, пусть для всякого автоморфизма $\varphi \in \Psi$ существуют элементы c_{ij} с указанными в (a) и (b) свойствами. Выберем некоторый обратимый элемент v_1 в C и положим $v_2 = v_1 c_{12}, \ldots, v_n = v_1 c_{1n}$. Тогда $v_i^{-1} v_j = c_{ij}$ для всех i, j. Кроме того, сопряжение матрицей $\operatorname{diag}(v_1, \ldots, v_n)$ совпадает с автоморфизмом φ. Следовательно, $\varphi \in \Psi_0$ и $\Psi = \Psi_0$. $\square$

Следствие 7. *Добавим к условиям предложения 2 еще одно условие:* $M_{ij} M_{jk}$ *— точный* C*-модуль для всех* i, j, k. *Тогда п.* (b) *предложения можно исключить.*

Что касается равенства $\Omega = \operatorname{In}(\operatorname{Aut} L)$, то в разделе 8 получены различные сведения о группе Ω для кольца формальных матриц над данным кольцом R.

5. Кольца формальных матриц над данным кольцом. Есть один интересный вид колец формальных матриц. Они указаны в названии раздела. Такие кольца рассматриваются в книге [24].

Именно, пусть R — некоторое кольцо. Если K — такое кольцо формальных матриц, что $R_1 = \ldots = R_n = R$ и $M_{ij} = R$ для всех не совпадающих индексов i и j, то говорят, что K — *кольцо формальных матриц над кольцом* R или *кольцо формальных матриц со значениями в кольце* R.

Обозначим через e_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ матричные единицы кольца K. Тогда для всех значений индексов i, j, k имеем $e_{ij} e_{jk} = s_{ijk} e_k$ для каких-то центральных элементов s_{ijk} кольца R. При умножении матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ из K нужно принимать во внимание равенство

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ikj} a_{ik} b_{kj}, \tag{19}$$

где $A \cdot B = C = (c_{ij})$. Элементы s_{ijk} удовлетворяют тождествам

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \quad s_{ijk} \cdot s_{ik\ell} = s_{ij\ell} \cdot s_{jk\ell}. \tag{20}$$

Пусть теперь $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$ — некоторое множество центральных элементов кольца R, удовлетворяющих тождествам (20). Если определить умножение матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ с помощью равенства (19), то получим кольцо формальных матриц над кольцом R. Поэтому два приведенных определения эквивалентны.

Пусть K — некоторое кольцо формальных матриц над кольцом R и $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$ — соответствующая система центральных элементов. Множество Σ называется *системой множителей*, а его элементы называются *множителями* кольца K. Вместо «множители» также говорят «мультипликативные коэффициенты»; см., например, [7]. Кольцо K можно обозначить $M(n, R, \Sigma)$. Если все s_{ijk} равны 1, то получаем обычное кольцо матриц $M(n, R)$.

Пусть τ — подстановка степени n. Для любой матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n полагаем $\tau A = (a_{\tau(i)\tau(j)})$, т. е. мы берем сопряжение матрицы A матрицей подстановки τ. Далее, если $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ — некоторая система множителей, то положим $t_{ijk} = s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$. Тогда $\{t_{ijk}\}$ — тоже система множителей, поскольку она удовлетворяет тождествам (12). Обозначим ее через $\tau\Sigma$. Следовательно, существует кольцо формальных матриц $M(n, R, \tau\Sigma)$. Кольца $M(n, R, \Sigma)$ и $M(n, R, \tau\Sigma)$ изоморфны при соответствии $A \to \tau A$.

До конца раздела мы считаем, что K — кольцо формальных матриц над данным кольцом R, являющимся T-алгеброй. Также мы считаем, что каждый множитель s_{ijk} равен 1 или 0.

В [25] показано, что при таком предположении найдется подстановка τ с тем свойством, что кольцо τK можно представить как кольцо формальных блочных матриц с нулевыми идеалами следа. Кратко напомним этот материал.

Рассматривая тождества (12), нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть индексы i, j, k попарно различны. Тогда для элементов s_{iji}, s_{jkj} s_{kik} имеет место одна из следующих возможностей*:

(i) *все три элемента — единицы*;

(ii) *какие-то два из этих трех элементов — нули, а третий элемент — единица*;

(iii) *все три элемента — нули.*

Введем на множестве чисел $\{1, \dots, n\}$ бинарное отношение $\sim$, полагая $i \sim j \Leftrightarrow s_{iji}$ — единица.

Лемма 3. *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.*

Симметрическая матрица $S = (s_{iji})$ называется *матрицей множителей* кольца K.

Составим подстановку τ следующим образом. В верхней строке поставим натуральные числа от 1 до n в естественном порядке. Нижняя строка состоит из классов эквивалентности относительно отношения $\sim$, расположенных в произвольном порядке. Внутри классов числа также располагаются в произвольном порядке. Тогда в матрице τS на главной диагонали стоят блоки, состоящие из единиц. Есть взаимно однозначное соответствие между этими блоками и классами эквивалентности относительно отношения $\sim$. Порядок данного блока равен числу элементов соответствующего класса эквивалентности. Все позиции в матрице τS вне рассматриваемых блоков заняты нулями.

Как замечено выше, кольца K и τK изоморфны при соответствии $A \to \tau A$, $A \in K$. Для упрощения записей условимся, что матрица множителей S кольца K уже имеет указанный выше блочный вид. Пусть число блоков на главной диагонали матрицы S равно m.

На главной диагонали всякой матрицы A из K выделим блоки $A_1, \dots, A_m$ того же порядка и в той же последовательности, что и на главной диагонали матрицы S. Тогда блоки A_ℓ для фиксированного ℓ всех матриц из K образуют обычное кольцо матриц $M(k_\ell, R)$ для некоторого k_ℓ. Обозначим его R_ℓ. Блоки $A_1, \dots, A_m$ задают блочное разложение матрицы A очевидным образом.

Буква L будет обозначать прямую сумму колец $R_1 \oplus \ldots \oplus R_m$. Обозначим через M множество всех матриц $A \in K$, для которых соответствующие блоки $A_1, \dots, A_m$ состоят из нулей. Ясно, что M — L-L-бимодуль.

Разложение $L = R_1 \oplus \ldots \oplus R_m$ индуцирует то же блочное разложение каждой матрицы, о котором говорилось выше. Именно, запишем $1 = e_1 + \ldots + e_m$, где e_i — единичный элемент кольца R_i. Теперь положим $M_{ij} = e_i M e_j$, M_{ij} — подбимодуль в M. Действие кольца L на подбимодуле M_{ij} сводится к действию колец R_i и R_j слева и справа соответственно. Справедливо бимодульное прямое разложение

$$M = \bigoplus_{i,j=1}^{m} M_{ij},$$

где $i \neq j$. Как и в разделе 2 имеем прямую сумму $K = L \oplus M$.

Кольцо K является кольцом формальных (блочных) матриц, построенным из колец $R_1, \dots, R_m$ и бимодулей M_{ij} в соответствии с изложенной в разделе 2 процедурой; см. [24, Section 2.3]. В основном мы будем рассматривать кольцо K как кольцо блочных матриц.

Как кольцо блочных матриц алгебра K имеет нулевые идеалы следа. Значит, мы попадаем в ситуацию раздела 2.

Если факторкольцо $R/P(R)$ неразложимо, то все факторкольца $R_i/P(R_i)$ $(i = 1, \dots, m)$ также неразложимы. Учитывая следствие 1, можно записать такой результат.

Следствие 8. *Пусть кольцо $R/P(R)$ неразложимо. Тогда алгебра K удовлетворяет условиям* II *и* I; *следовательно, для группы* $\operatorname{Aut} K$ *верны теоремы* 1 *и* 2.

Замечание 1. Для коммутативного кольца R неразложимость кольца $R/P(R)$ равносильна неразложимости кольца R. Поэтому, если R — неразложимое коммутативное кольцо, то для группы автоморфизмов R-алгебры K верны теоремы 1 и 2.

6. Случай $M^2 = 0$. Мы сохраняем все обозначения и соглашения, принятые в предыдущем разделе. Таким образом, K — алгебра формальных матриц над данным кольцом R и $K = L \oplus M$, где буквы L и M имеют прежний смысл. Мы рассматриваем K как кольцо формальных блочных матриц в соответствии с разделом 5. Для алгебры K с условием $M^2 = 0$ в [25] уточнены некоторые факты и получена дополнительная информация о группе $\operatorname{Aut} K$.

Мы напомним этот материал. Но сначала кратко повторим некоторые соображения общего характера из [25, Section 9]. Справедлив следующий факт; см. [25, Lemma 9.6].

Лемма 4. *Пусть даны неразложимые кольца $R_1, \ldots, R_n$, $L = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$ и $\alpha \in \operatorname{Aut} L$. Тогда для каждого индекса $i = 1, \ldots, n$ найдется такой индекс j, что $\alpha R_i = R_j$.*

Затем в [25] на основании леммы 4 определяется некоторая группа подстановок Σ степени n, действующая на кольце L. При этом подстановка σ из Σ отождествляется с соответствующим автоморфизмом α_σ кольца L. Также вводится нормальная подгруппа Γ автоморфизмов кольца L, оставляющая все R_i на месте. Тогда

$$\Gamma \cap \Sigma = \langle 1 \rangle \quad \text{и} \quad \operatorname{Aut} L = \Gamma \leftthreetimes \Sigma.$$

Вернемся к алгебрам формальных матриц K над R, где R — некоторое кольцо. Как и в разделе 2 пишем

$$K = L \oplus M, \quad \text{где} \quad L = R_1 \oplus \ldots \oplus R_m$$

и каждое R_i — обычное кольцо матриц $M(k_i, R)$ для некоторого $k_i \geqslant 1$.

Наложим на кольцо R те же ограничения, что и в разделе 5. Именно, считаем, что кольцо $R/P(R)$ неразложимо. Тогда все кольца $R_i/P(R_i)$ также неразложимы. Следовательно, кольцо K удовлетворяет условию II. Кроме того, все кольца R_i также неразложимы. Поэтому можно применить лемму 4 к L. Можно записать $\operatorname{Aut} L = \Gamma \leftthreetimes \Sigma$, где Γ и Σ — такие подгруппы, как указано после леммы 4.

Пусть $h\colon \operatorname{Aut} L \to \Sigma$ — канонический гомоморфизм и $g = hf\colon \operatorname{Aut} L \to \Sigma$. Тогда имеем

$$\operatorname{Ker} g = \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} : \alpha R_i = R_i,\ i = 1, \ldots, m \right\}.$$

С помощью равенств (20) раздела 5 нетрудно проверить следующий факт.

Лемма 5. *Для данной алгебры K равенство $M^2 = 0$ справедливо в точности тогда, когда выполняется следующее условие: для любых попарно различных индексов i, j, k из равенств $s_{iji} = s_{jkj} = s_{kik} = 0$ следует равенство $s_{ijk} = 0$.*

В [25, Section 3] определена подгруппа Δ. Она состоит из автоморфизмов вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix}.$$

Для нашей алгебры K имеем соотношения

$$\Delta = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \quad \text{и} \quad \Delta \cong 1 + M.$$

Согласно теореме 1 имеет место равенство $\operatorname{Aut} K = \Delta \leftthreetimes \Lambda$. Можно также записать разложение $\operatorname{Ker} g = \Delta \leftthreetimes C$, где C обозначает

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : \alpha R_i = R_i \text{ для всех } i = 1, \ldots, m \right\}.$$

Теперь с учетом теоремы 1 можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть R — кольцо с неразложимым факторкольцом $R/P(R)$, K — алгебра формальных матриц над R, причем $M^2 = 0$.*

1. *Справедливы равенства*

$$\operatorname{Aut} K = \Delta \leftthreetimes \Lambda, \quad \operatorname{Aut} K = \Delta \leftthreetimes C \leftthreetimes \Sigma, \quad \Phi = \Delta \leftthreetimes (\operatorname{In}_0(\operatorname{Aut} K)) \cdot \Psi.$$

2. *Если все автоморфизмы каждой алгебры $R_1, \ldots, R_m$ являются внутренними, то имеют место соотношения*

$$\operatorname{Aut} K = \Delta \leftthreetimes (\operatorname{In}_0(\operatorname{Aut} K) \cdot \Psi)\Delta \leftthreetimes \Sigma, \quad \operatorname{Out} K \cong \Psi/\Psi_0 \leftthreetimes \Sigma.$$

Замечания о пункте 2: при выполнении условий этого пункта верно равенство $\operatorname{Ker} g = \Phi$, причем

$$\operatorname{Aut} K = \operatorname{Ker} g \leftthreetimes \Sigma = \Phi \leftthreetimes \Sigma = \Delta \leftthreetimes (\operatorname{In}_0(\operatorname{Aut} K) \cdot \Psi) \leftthreetimes \Sigma.$$

Известно строение подгрупп Δ, $\operatorname{In}_0(\operatorname{Aut} K)$, Ψ и Σ, входящих в теорему 3 (см. разделы 7 и 8). Поэтому известно строение всей группы $\operatorname{Aut} K$ из этого пункта. Условие на автоморфизмы алгебр $R_1, \ldots, R_m$ выполняется, например, для коммутативного кольца R, являющегося областью с однозначной факторизацией или локальным кольцом.

7. Подгруппа Ψ и внутренние автоморфизмы, II. Раздел 4 содержит некоторую информацию о подгруппе Ψ для алгебры формальных матриц с нулевыми идеалами следа. В разделе 7 мы вычислим эту подгруппу для кольца формальных матриц со значениями в произвольном кольце R. Таким образом, мы продолжаем линию разделов 5 и 6. При этом мы разовьем результаты из [25, Section 13]. Все обозначения и термины разделов 5 и 6 сохраняются. Кроме того, мы считаем, что $C(U(R))$ — центр группы $U(R)$.

Пусть K — алгебра формальных матриц со значениями в кольце R. Согласно разделу 4 существует вложение групп

$$\Psi \to \operatorname{Aut}_L M = \prod_{i,j=1, i\neq j}^{m} \operatorname{Aut}_L M_{ij}.$$

В силу [25, Proposition 13.2], автоморфизмы R_i-R_j-бимодуля M_{ij} совпадают с умножениями на обратимые центральные элементы кольца R. Поэтому можно писать $\operatorname{Aut}_L M_{ij} = C(U(R))$.

Пусть

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Psi.$$

Имеем систему обратимых центральных элементов c_{ij} $(i, j = 1, \ldots, m)$ кольца R, где полагаем $c_{ii} = 1$, удовлетворяющих равенствам (17) и (18) из раздела 4 для всех значений индексов i, j, k. Мы покажем, что для нашей алгебры K можно ограничиться в определенном смысле меньшим количеством элементов c_{ij}. А также мы точно укажем образ вложения

$$\Psi \to \prod_{m^2-m} C(U(R)).$$

С этой целью проведем некоторые рассуждения.

Зафиксируем индекс i, где $1 \leqslant i \leqslant m-1$. Пусть k_i — такой индекс, что

$$i < k_i \leqslant m, \quad M_{i,i+1} \cdots M_{k_i-1,k_i} \neq 0,$$

причем k_i — максимальное число с таким свойством (смысл записанного произведения бимодулей поясняется в разделе 4). Тогда $M_{ij} \cdot M_{jk} \neq 0$ для любых k и j таких, что $i < k \leqslant k_i$ и $i < j < k$. Из равенства (18) раздела 4 следует, что $c_{ik} = c_{ij}c_{jk}$ (надо учесть, что множители s_{ijk} принимают значения только 0 или 1).

А если существуют индексы ℓ такие, что $k_i < \ell \leqslant m$, то элементы $c_{i\ell}$ и $c_{ij}c_{j\ell}$ $(i < j < \ell)$ могут быть никак не связаны, поскольку $M_{ij}M_{j\ell} = 0$. И соответственно элемент $c_{i\ell}$ не зависит от элементов $c_{i,i+1}, \ldots, c_{\ell-1,\ell}$.

Выберем некоторые позиции. Прежде всего возьмем позиции $(1,2), \ldots, (m-1,m)$. Затем для каждого i, где $1 \leqslant i \leqslant m-1$ и $k_i < m$, выбираем позиции

$$(i, k_i + 1), \ldots, (i, m). \tag{21}$$

Теперь то же самое проделаем относительно позиций (i,j), где $i>j$, для всех индексов j таких, что $1\leqslant j\leqslant m-1$. И далее фиксируем позиции $(2,1),\dots,(m,m-1)$. А также для всякого j, где $1\leqslant j\leqslant m-1$ и $k_j<m$, выбираем позиции

$$(k_j+1,j),\dots,(m,j),\tag{22}$$

где k_j — максимальное число со свойством $M_{k_j,k_j-1}\cdots M_{j+1,j}\neq 0$. И приходим к соответствующим фактам об элементах c_{ij} для $i>j$.

После проведенной работы можно сформулировать следующее утверждение.

Предложение 3.

1. *Существует изоморфизм*

$$\Psi\cong\prod_{(i,j)}C(U(R)),$$

где пары (i,j) пробегают все выделенные выше позиции. Или, точнее,

$$\Psi\cong\prod_{p}C(U(R)),$$

где

$$p=2(m-1)+q,\quad q=\sum_{i=1}^{m-1}s_i+\sum_{j=2}^{m}t_j$$

и s_i (соотв., t_j) — число выделенных позиций в (21) (соотв., (22)).

2. *Справедливы изоморфизмы*

$$\Psi_0\cong\prod_{m-1}C(U(R))\quad \text{и}\quad \Psi/\Psi_0\cong\prod_{(m-1)+q}C(U(R)).$$

Доказательство. Докажем утверждение 1. Вложение

$$\Psi\to\prod_{m^2-m}C(U(R))$$

ставит в соответствие автоморфизму $\beta\in\Psi$ систему обратимых центральных элементов

$$\{c_{ij}\mid i,j=1,\dots,m,\ i\neq j\}$$

кольца R, где $\beta(y)=c_{ij}y$, $y\in M_{ij}$ (см. раздел 4 и написанное выше). Из текста перед предложением следует, что при этом можно ограничиться элементами c_{ij} для пар (i,j), пробегающих лишь указанные там позиции.

Докажем утверждение 2. Пусть $\beta\in\Psi_0$ и c_{ij} — те же элементы, что и в 1. Для всех $i,j,k=1,\dots,m$ верны равенства $c_{ik}=c_{ij}\cdot c_{jk}$ (см. предложение 2 и его доказательство). Отсюда получаем, что элементы c_{ij} с условием $i<j$ являются произведениями элементов вида $c_{k,k+1}$. Принимая во внимание, что $1=c_{11}=c_{ij}c_{ji}$, получаем $c_{ji}=c_{ij}^{-1}$, откуда элементы c_{ji} с условием $i<j$ выражаются через элементы, обратные к элементам $c_{k,k+1}$. Эти соображения и приводят к первому изоморфизму из 2. Второй изоморфизм вытекает из первого изоморфизма и 1. □

Следствие 9 (см. [25])**.** *Если $M^2=0$, то имеют место изоморфизмы*

$$\Psi\cong\prod_{m^2-m}C(U(R)),\quad \Psi_0\cong\prod_{m-1}C(U(R)),\quad \Psi/\Psi_0\cong\prod_{(m-1)^2}C(U(R)).$$

Из предложения 2, следствия 7 и материала данного раздела можно сформулировать, когда автоморфизм из Ψ является внутренним. Заметим, что автоморфизмы, принадлежащие Ψ, можно называть *мультипликативными*.

Следствие 10. *Пусть K — алгебра формальных матриц над кольцом R с неразложимым факторкольцом $R/P(R)$. Мультипликативный автоморфизм φ является внутренним в точности тогда, когда соответствующая ему система элементов $c_{ij}\in C(U(R))$ $(i,j=1,\dots,m)$ удовлетворяет равенствам $c_{ij}\cdot c_{jk}=c_{ik}$ для всех $i,j,k=1,\dots,m$.*

Следствие 11. *Если к условиям следствия 10 добавить условие*

$$M_{ij} \cdot M_{jk} \neq 0 \quad \textit{для всех } i, j, k,$$

то верно равенство $\Psi = \Psi_0$, *т. е. всякий мультипликативный автоморфизм будет внутренним.*

Доказательство. Имеем, что R-модуль $M_{ij} \cdot M_{jk}$ точен. (Это уже использовалось в начале раздела.) Отсюда вытекают равенства $c_{ij} \cdot c_{jk} = c_{ik}$. □

8. Группы Ω и Ω_1. По-прежнему K — алгебра формальных матриц над кольцом R. В начале раздела 2 была введена группа Ω, являющаяся образом гомоморфизма $f\colon \operatorname{Aut} K \to \operatorname{Aut} L$. Данный раздел посвящен группе Ω в ситуации кольца K. О роли этой группы и группы Ψ уже говорилось в разделе 2 (особенно см. окончание раздела 2). Мы также введем группу Ω_1 — образ сужения гомоморфизма f на $\operatorname{Ker} g$.

Вернемся к разложению $\operatorname{Aut} L = \Gamma \leftthreetimes \Sigma$ из раздела 6 и гомоморфизму $g\colon \operatorname{Aut} K \to \Sigma$. Напомним о разложении $K = L \oplus M$. Если $M^2 = 0$, то $\operatorname{Aut} K = \operatorname{Ker} g \leftthreetimes \Sigma$ [25, Theorem 13.3]. Далее, имеем полупрямое разложение $\Omega = \Omega_1 \leftthreetimes \Sigma$ (см. начало раздела 14 в [25]). Если же $M^2 \neq 0$, то можно лишь говорить, что Ω_1 — нормальная подгруппа в Ω, а факторгруппа Ω/Ω_1 изоморфно вкладывается в группу подстановок Σ. Мы обратим внимание именно на подгруппу Ω_1.

Мы запишем несколько вопросов о строении группы Ω_1.

1. Какие автоморфизмы из Γ принадлежат Ω_1?
2. Какое строение имеет группа Ω_1?

Далее мы считаем, что факторкольцо $R/P(R)$ неразложимо. Мы ответим на первый вопрос и, в одном случае, на второй вопрос. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Ввиду теоремы 1 и следствия 8 мы имеем равенство

$$\operatorname{Aut} K = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \leftthreetimes \Lambda.$$

Отсюда следует равенство $\operatorname{Ker} g = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \leftthreetimes C$, где

$$C = \operatorname{Ker} g \cap \Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : \alpha R_i = R_i,\ i = 1, \ldots, m \right\}.$$

Теперь можно утверждать, что автоморфизм α из Γ лежит в Ω_1 в точности тогда, когда найдется преобразование β алгебры M, которое одновременно является ее автоморфизмом и изоморфизмом L-L-бимодулей $M \to {}_\alpha M_\alpha$. Последнее свойство равносильно тому, что матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

определяет автоморфизм алгебры K, принадлежащий $\operatorname{Ker} g$.

Пусть $\alpha \in \Omega_1$,

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

— соответствующий автоморфизм алгебры K. Для любых $i, j = 1, \ldots, m$ справедливы равенства

$$\beta M_{ij} = \beta(e_i M e_j) = \alpha(e_i)\beta(M)\alpha(e_j) = e_i M e_j = M_{ij}.$$

Обозначим $\beta_{ij} = \beta|_{M_{ij}}$ и $\alpha_i = \alpha|_{R_i}$. Тогда $\beta_{ij}\colon M_{ij} \to {}_{\alpha_i}(M_{ij})_{\alpha_j}$ — изоморфизм R_i-R_j-бимодулей (бимодули вида ${}_\alpha A_\gamma$ определены в разделе 1). Можно придать следующую форму вопросу о том, какие элементы из Γ входят в Ω_1. Для каких автоморфизмов $\alpha_i \in \operatorname{Aut} R_i$ и $\alpha_j \in \operatorname{Aut} R_j$ существуют изоморфизмы между R_i-R_j-бимодулями M_{ij} и как они устроены?

Докажем один факт общего характера. Он обобщает следующий результат (см. [13, Chapter 2, Proposition 5.2]): пусть H — некоторая алгебра и α, γ — ее автоморфизмы. Изоморфизм H-H-бимодулей $H \to {}_\alpha H_\gamma$ существует в точности тогда, когда $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм.

Пусть k, ℓ — натуральные числа и $c = \text{НОК}(k, \ell)$. Обозначим

$$P = M(k, R), \quad Q = M(\ell, R), \quad H = M(c, R), \quad V = M(k \times \ell, R), \quad \ell' = \frac{c}{k}, \quad k' = \frac{c}{\ell}.$$

Кольцо H можно представить в виде кольца блочных матриц двумя способами: как кольцо блочных матриц над P порядка ℓ' и как кольцо блочных матриц над Q порядка k'. Оно также является P-Q-бимодулем блочных матриц над V размера $\ell' \times k'$.

Пусть α и γ — автоморфизмы алгебр P и Q соответственно. Они индуцируют автоморфизмы алгебры H, которые можно называть *кольцевыми*. Мы оставляем за ними обозначения α и γ соответственно. Это соглашение действует и в следующем предложении.

Предложение 4. *Если $\alpha \in \operatorname{Aut} P$ и $\gamma \in \operatorname{Aut} Q$, то изоморфизм P-Q-бимодулей $V \to {}_\alpha V_\gamma$ существует в точности тогда, когда $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм алгебры H.*

Доказательство. Пусть дан изоморфизм P-Q-бимодулей $\beta\colon V \to {}_\alpha V_\gamma$. Изоморфизм β индуцирует изоморфизм H-H-бимодулей

$$\overline{\beta}\colon H \to {}_\alpha H_\gamma, \quad \overline{\beta}(A) = (\beta(A_{ij}))$$

для каждой матрицы $A = (A_{ij})$ из H. Подразумевается, что матрица A представлена в указанном выше блочном виде, т. е. A_{ij} — блоки размера $\ell' \times k'$. Следовательно, $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм алгебры H.

Теперь допустим, что $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм алгебры H. Значит, существует изоморфизм H-H-бимодулей $\beta\colon H \to {}_\alpha H_\gamma$.

Возьмем алгебру треугольных матриц

$$S = \begin{pmatrix} H & H \\ 0 & H \end{pmatrix}.$$

Обозначим через ψ автоморфизм алгебры S, переводящий матрицу

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

в матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha(a) & \beta(c) \\ 0 & \gamma(b) \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\psi = \begin{pmatrix} (\alpha, \gamma) & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

в принятой нами матричной форме записи автоморфизмов.

Пусть $e_1, \dots, e_{\ell'}$ и $f_1, \dots, f_{k'}$ — диагональные матричные единицы, соответствующие двум блочным разбиениям матриц из H. Справедливы равенства

$$\alpha(e_i) = e_i, \quad i = 1, \dots, \ell', \quad \gamma(f_j) = f_j, \quad j = 1, \dots, k'.$$

Отсюда вытекает, что ψ индуцирует автоморфизм алгебры треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} e_i H e_i & e_i H f_j \\ 0 & f_j H f_j \end{pmatrix};$$

фактически, это означает, что ψ индуцирует автоморфизм алгебры

$$\begin{pmatrix} P & V \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\beta|_V$ является изоморфизмом P-Q-бимодулей $V \to {}_\alpha V_\gamma$. □

Пусть n_i — порядок матриц из кольца R_i, $i = 1, \dots, m$. Положим $c_{ij} = \text{НОК}(n_i, n_j)$ для всех попарно различных $i, j = 1, \dots, m$. Через H_{ij} обозначим кольцо матриц $M(c_{ij}, R)$. Оно является кольцом блочных матриц над R_i и над R_j, а также R_i-R_j-бимодулем блочных матриц над M_{ij}. Мы считаем, что автоморфизмы колец R_i и R_j являются кольцевыми автоморфизмами алгебры H_{ij}.

Теорема 4. *Автоморфизм* $\alpha = (\alpha_i)$ *алгебры*

$$L = \bigoplus_{i=1}^{m} R_i$$

принадлежит группе Ω_1 *в точности тогда, когда* $\alpha_i^{-1}\alpha_j$ *— внутренний автоморфизм алгебры* H_{ij} *для всех различных индексов* i *и* j.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\alpha \in \Omega_1$. Значит, существует изоморфизм

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

алгебры K, где β — автоморфизм L-L-бимодулей $M \to {}_{\alpha}M_{\alpha}$. Ограничение β на M_{ij} является изоморфизмом R_i-R_j-бимодулей $M_{ij} \to {}_{\alpha_i}(M_{ij})_{\alpha_j}$. Согласно предложению 4 $\alpha_i^{-1}\alpha_j \in \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, H_{ij})$.

Достаточность. По предложению 4 имеется изоморфизм R_i-R_j-бимодулей $\beta_{ij}\colon M_{ij} \to {}_{\alpha_i}(M_{ij})_{\alpha_j}$, $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$. Пусть

$$\beta = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{m} \beta_{ij}.$$

Тогда β — изоморфизм L-L-бимодулей $M \to {}_{\alpha}M_{\alpha}$. Чтобы преобразование

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

алгебры K было ее автоморфизмом, достаточно проверить, что выполняется равенство

$$\beta_{ik}(ab) = \beta_{ij}(a)\beta_{jk}(b) \tag{23}$$

для любых элементов $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$ и всех попарно различных индексов i, j, k.

Зафиксируем три указанных индекса i, j, k. Введем еще одно кольцо матриц. Положим $H = M(d, R)$, где $d = \text{НОК}(n_i, n_j, n_k)$. Это кольцо H является кольцом блочных матриц над каждым из бимодулей M_{ij}, M_{jk}, M_{ik}.

Мы считаем автоморфизмы α_i, α_j, α_k кольцевыми автоморфизмами алгебры H. Мы рассматриваем изоморфизмы β_{ij}, β_{jk}, β_{ik} как бимодульные изоморфизмы

$$H \to {}_{\alpha_i}H_{\alpha_j}, \quad H \to {}_{\alpha_j}H_{\alpha_k}, \quad H \to {}_{\alpha_i}H_{\alpha_k}$$

соответственно. При этом произведения $\alpha_i^{-1}\alpha_j$, $\alpha_j^{-1}\alpha_k$, $\alpha_i^{-1}\alpha_k$ являются внутренними автоморфизмами алгебры H. Они индуцируют те же бимодульные изоморфизмы β_{ij}, β_{jk} и β_{ik}, что и записанные выше.

Эти бимодульные изоморфизмы действуют следующим образом (см. [25, Section 2]). Существуют обратимые элементы $u, v, w \in H$ такие, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} \beta_{ij}(x) &= \alpha_i(x)\alpha_i(u) = \alpha_i(u)\alpha_j(x), \\ \beta_{jk}(y) &= \alpha_j(y)\alpha_j(v) = \alpha_j(v)\alpha_k(y), \\ \beta_{ik}(z) &= \alpha_i(z)\alpha_i(w) = \alpha_i(w)\alpha_k(z) \end{aligned}$$

при всех $x, y, z \in H$.

Проверим, что равенство

$$\beta_{ik}(xy) = \beta_{ij}(x)\beta_{jk}(y) \tag{24}$$

выполняется в H для любых $x, y \in H$. Из равенства

$$\alpha_i^{-1}\alpha_k = \alpha_i^{-1}\alpha_j\alpha_j^{-1}\alpha_k$$

вытекает равенство $w = vu$ (нужно еще принять во внимание то, что элементы u, v, w определяются с точностью до обратимых центральных элементов). Теперь имеем равенства

$$\beta_{ik}(xy) = \alpha_i(xy)\alpha_i(w) = \alpha_i(x)\alpha_i(y)\alpha_i(v)\alpha_i(u).$$

Также справедливы равенства

$$\begin{aligned}\beta_{ij}(x)\beta_{jk}(y) &= \alpha_i(x)\alpha_i(u)\alpha_j(y)\alpha_j(v) = \\ &= \alpha_i(x)\alpha_i(y)\alpha_i(u)\alpha_j(v) = \\ &= \alpha_i(x)\alpha_i(y)\alpha_i(v)\alpha_i(u).\end{aligned}$$

Итак, равенство (24) доказано. В нем умножение матриц выполняется в блочном виде. Отсюда вытекает равенство (23). □

В оставшейся части раздела затронем проблему строения группы Ω_1. Эта проблема кажется довольно сложной. Мы найдем строение группы Ω_1 при одном условии на числа n_i. Напомним, что n_i — это порядок матриц из кольца R_i.

Пусть n_s — наименьшее среди чисел $n_1, \ldots, n_m$. Далее считаем, что алгебра K удовлетворяет следующему свойству: n_s делит каждое из чисел n_i. При таком предположении всякое кольцо R_i является кольцом блочных матриц над R_s порядка n_i/n_s. Поэтому всякий автоморфизм α_s алгебры R_s продолжается до кольцевого автоморфизма α_i алгебры R_i. Мы будем называть *скалярным автоморфизмом* получающийся автоморфизм $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ алгебры L. Также мы будем записывать его в виде $(\alpha_s, \alpha_s, \ldots, \alpha_s)$, т. е. мы отождествляем α_i с α_s.

Обозначим через D подгруппу всех скалярных автоморфизмов алгебры L. Следующий результат расширяет [25, Corollary 14.3].

Следствие 12.

1. *Выполняется равенство* $\Omega_1 = \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, L) \cdot D$.
2. *Существует изоморфизм* $\Omega_1 / \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, L) \cong \mathrm{Out}\, R_s$.

Доказательство.
1. Пусть $\alpha = (\alpha_i) \in \Omega_1$. Для каждого $j = 1, \ldots, m$ обозначим через μ_j автоморфизм $\alpha_j \alpha_s^{-1}$ алгебры R_j. Из теоремы 4 вытекает, что μ_j — внутренний автоморфизм алгебры R_j. Теперь из равенств $\alpha_j = \mu_j \alpha_s$ $(j = 1, \ldots, m)$ вытекает, что

$$\alpha = (\mu_1, \ldots, \mu_m)(\alpha_s, \ldots, \alpha_s) = \mu\gamma \in \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, L) \cdot D.$$

Включение $\Omega_1 \subseteq \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, L) \cdot D$ доказано.

Докажем обратное включение. Включение $\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, L) \subseteq \Omega_1$ верно всегда. Теперь возьмем произвольный автоморфизм $\gamma = (\alpha, \ldots, \alpha)$ из D, где $\alpha \in R_s$. Включение $\gamma \in \Omega_1$ вытекает из теоремы 4.
2. Утверждение вытекает из утверждения 1. □

9. Автоморфизмы кольца треугольных матриц. В этом разделе R — произвольная алгебра на некоторым коммутативным кольцом T. Кольцо (верхних) треугольных матриц над R обозначается через $T(n, R)$. Обозначим это матричное кольцо буквой K. Представим кольцо K в виде расщепляющегося расширения: $T(n, R) = K = L \oplus M$, где буквы L и M имеют прежний смысл. Также удобно считать, что кольцо L является суммой $R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$, а L-L-бимодуль M равен

$$\bigoplus_{i,j=1, i<j}^{n} M_{ij}.$$

Всякий автоморфизм α алгебры R индуцирует автоморфизм $\overline{\alpha}$ алгебры K, где

$$\overline{\alpha}(a_{ij}) = (\alpha(a_{ij})), \quad (a_{ij}) \in K.$$

Автоморфизм $\overline{\alpha}$ называется *кольцевым автоморфизмом, индуцированным* α. Такие автоморфизмы уже рассматривались в предыдущем разделе.

Записанная ниже теорема представляет собой другую формулировку и доказательство одной из теорем статьи [23].

Теорема 5. *Всякий треугольный автоморфизм алгебры* $T(n, R)$ *является произведением внутреннего автоморфизма и кольцевого автоморфизма.*

Доказательство. Пусть φ — некоторый треугольный автоморфизм алгебры K. Он представим в виде произведения внутреннего и диагонального автоморфизмов, так как теорема 1, а верна для подгруппы треугольных автоморфизмов. Поэтому можно считать, что φ — диагональный автоморфизм. Итак,

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

где α — автоморфизм алгебры L, β — автоморфизм алгебры M и изоморфизм L-L-бимодулей $M \to {}_{\alpha}M_{\alpha}$.

Так как $e_1, \ldots, e_n$ — полная ортогональная система центральных идемпотентов кольца L, то система $\alpha(e_1), \ldots, \alpha(e_n)$ обладает такими же свойствами. Для каждого i запишем

$$\alpha(e_i) = f_1^{(i)} + f_2^{(i)} + \ldots + f_n^{(i)}, \tag{25}$$

где $f_k^{(i)} \in R_k$, $k = 1, \ldots, n$. Элементы $f_k^{(1)}, f_k^{(2)} \ldots, f_k^{(n)}$ образуют полную ортогональную систему центральных идемпотентов кольца R_k.

Существуют включения

$$M \supset M^2 \supset \ldots \supset M^{n-1} \supset M^n = 0,$$

причем $M^{n-1} = M_{1n}$. Поэтому верно равенство $\varphi M_{1n} = M_{1n}$. Из равенства $e_1 K e_n = M_{1n}$ вытекают равенства

$$\varphi(e_1 K e_n) = \alpha(e_1) K \alpha(e_n) = \varphi M_{1n} = M_{1n} = R.$$

Далее можно записать равенства

$$\alpha(e_1) K \alpha(e_n) = \alpha(e_1)(L \oplus M)\alpha(e_n) = f_1^{(1)} M f_n^{(n)}.$$

Таким образом, $f_1^{(1)} M f_n^{(n)} = R$. Следовательно, $f_1^{(1)} = 1$ (т. е. e_1), $f_n^{(n)} = 1$ (т. е. e_n) и

$$f_1^{(2)} = \ldots = f_1^{(n)} = 0, \quad f_n^{(1)} = \ldots = f_n^{(n-1)} = 0.$$

Индукцией по n покажем, что $\alpha(e_i) = e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Это уже доказано для $n = 2$. Пусть $n \geqslant 3$. Представим кольцо K в виде кольца блочных треугольных матриц порядка 2:

$$K = \begin{pmatrix} S & N \\ 0 & R_n \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad S = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \ldots & M_{1,n-1} \\ 0 & R_2 & \ldots & M_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & R_{n-1} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} M_{1n} \\ M_{2n} \\ \ldots \\ M_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

Проверим, что $\varphi S = S$, т. е. φ индуцирует автоморфизм кольца S. Во-первых, из равенств (25) вытекает, что

$$\varphi(R_1), \ldots, \varphi(R_{n-1}) \subseteq R_1 \oplus \ldots \oplus R_{n-1}.$$

Пусть M_{ik} — произвольный бимодуль, причем $i < k$ и $k \neq n$. Поскольку элемент $\alpha(e_k)$ имеет нулевую компоненту в R_n, то последний столбец всех матриц из $\alpha(e_i) M \alpha(e_k)$ состоит из нулей. Поэтому $\varphi(M_{ik}) \subseteq S$ и $\varphi(S) \subseteq S$. Аналогично получаем $\varphi^{-1}(S) \subseteq S$.

Пусть

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

— матрицы автоморфизмов φ и φ^{-1} соответственно относительно разложения $K = L_1 \oplus N$, где $L_1 = S \oplus R_n$. Тогда $\alpha_1\alpha_2 = 1 = \alpha_2\alpha_1$, т. е. $\alpha_1 = \varphi|_S$ — автоморфизм алгебры S. По предположению индукции имеем $f_2^{(2)} = \ldots = f_{n-1}^{(n-1)} = 1$, а все «остальные» $f_i^{(j)}$ равны нулю. Доказано, что

$$\alpha(e_1) = e_1, \ldots, \alpha(e_n) = e_n.$$

Вернемся к исходному представлению кольца K; а именно к записи $K = L \oplus M$. Возьмем произвольный индекс i и элемент $x \in R_i$. Тогда

$$x = xe_i, \quad \varphi(x) = \varphi(x)\varphi(e_i) = \varphi(x)e_i \in L \cap Ke_i = R_i.$$

Поэтому $\alpha R_i = R_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Обозначим через α_i ограничение α на R_i $(i = 1, \dots, n)$. Тогда α_i — автоморфизм кольца R_i. Также имеем равенства

$$\beta M_{ij} = \beta(e_i M e_j) = \alpha(e_i) M \alpha(e_j) = e_i M e_j = M_{ij}.$$

Обозначим через β_{ij} сужение $\beta|_{M_{ij}}$. Так как $\beta_{ij}(xyz) = \alpha_i(x)\beta(y)\alpha_j(z)$ для любых $x \in R_i$, $z \in R_j$, $y \in M_{ij}$, то β_{ij} — изоморфизм L-L-бимодулей M_{ij} и ${}_{\alpha_i}(M_{ij})_{\alpha_j}$. В таком случае $\alpha_i\alpha_j^{-1}$ — внутренний автоморфизм алгебры R [13, Part 2, Proposition 5.2]. Для каждого $i = 1, \dots, n$ положим $\mu_i = \alpha_i\alpha_1^{-1}$. Тогда

$$\alpha_i = \mu_i\alpha_1, \quad \alpha = (\mu_1, \dots, \mu_n)(\alpha_1, \dots, \alpha_1),$$

где $\mu_1, \dots, \mu_n$ — внутренние автоморфизмы кольца R. Более кратко, $\alpha = \mu\gamma$, где μ — внутренний автоморфизм и γ — кольцевой автоморфизм кольца L.

Автоморфизмы μ и γ индуцируют внутренний автоморфизм и кольцевой автоморфизм кольца K. Сохраним за ними обозначения μ и γ соответственно. Положим $\zeta = (\mu\gamma)^{-1}\varphi$ и покажем, что ζ — внутренний автоморфизм. Его матрица относительно разложения $K = L \oplus M$ имеет вид

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix},$$

где ρ — автоморфизм алгебры M и автоморфизм L-L-бимодуля M. Положим $\rho_{ij} = \rho|_{M_{ij}}$ для всех i, j с условием $i < j$. Тогда ρ_{ij} — автоморфизм R-R-бимодуля M_{ij}, т. е. ρ_{ij} — автоморфизм R-R-бимодуля R, поскольку

$$\rho M_{ij} = \rho(e_i M e_j) = e_i M e_j = M_{ij}.$$

Следовательно, ρ_{ij} действует на M_{ij} как умножение на некоторый обратимый центральный элемент c_{ij} кольца R.

Итак, автоморфизм ζ определяет систему обратимых центральных элементов c_{ij}, $(i, j = 1, \dots, n,\ i < j)$. При этом верны равенства $c_{ij} \cdot c_{jk} = c_{ik}$ для всех $i, j, k = 1, \dots, n$ таких, что $i < j < k$. Чтобы убедиться в том, что ζ — внутренний автоморфизм, можно использовать рассуждения, аналогичные рассуждениям из доказательства предложения 2.

В итоге мы получили равенство $\varphi = \mu\gamma\zeta$, в котором μ, ζ — внутренние автоморфизмы и γ — кольцевой автоморфизм. Переформулируя, мы получим равенство $\varphi = \mu\zeta'\gamma$, где $\zeta' = \gamma\zeta\gamma^{-1}$ — внутренний автоморфизм. Итак, автоморфизм φ равен произведению внутреннего автоморфизма и кольцевого автоморфизма, что и требовалось. $\square$

Из доказанной теоремы, предложения 1 и леммы 1 непосредственно вытекают следствия 13 и 14.

Следствие 13. *Любой автоморфизм алгебры $T(n, R)$ является произведением внутреннего автоморфизма и кольцевого автоморфизма в каждом из следующих случаев:*

1. R — *сильно неразложимая алгебра;*
2. R — *полупервичная или нормальная алгебра* [20].

Следствие 14 (см. [21]). *Если R — коммутативное кольцо, то все автоморфизмы R-алгебры $T(n, R)$ являются внутренними.*

10. Группа $\operatorname{Aut} K$, где $K = M(n, R)$. Как и в предыдущем разделе, R — алгебра над коммутативным кольцом T. Приведем некоторые замечания об автоморфизмах T-алгебры $K = M(n, R)$.

В предыдущих разделах использовалась техника, основанная на расщепляющихся расширениях. Однако она не применима к алгебре $M(n, R)$. Один из возможных подходов к изучению алгебры $\operatorname{Aut} K$ основан на связи этой группы с группой Пикара кольца R. Такой подход используется в [28] для сеперабельных алгебр и в [18] для T-алгебры $M(n, T)$.

Группа Пикара $\operatorname{Pic} S$ T-алгебры S определяется как группа классов $[P]$ изоморфных обратимых S-S-бимодулей P с операцией $[P] \cdot [Q] = [P \otimes_S Q]$; см. [13].

Как обычно, мы называем конечно порожденные проективные образующие модули *прообразующими.* Прямая сумма n копий модуля A обозначается через A^n. Мы используем следующий факт [13, Part 2, Proposition 5.2]. Пусть A — R-R-бимодуль и существует изоморфизм $A \cong R$ левых R-модулей. Тогда для некоторого $\alpha \in \operatorname{Aut} R$ существует изоморфизм R-R-бимодулей $A \cong {}_1R_\alpha$.

Приведем один известный результат [13, Part 2, Proposition 5.3].

Предложение 5. *Пусть Q — левый прообразующий R-модуль и кольцо эндоморфизмов $S = \operatorname{End}_R Q$ рассматривается как T-алгебра. Тогда имеет место точная последовательность групп*

$$1 \to \operatorname{In}(\operatorname{Aut}_T S) \to \operatorname{Aut}_T S \xrightarrow{\eta_Q} \operatorname{Pic} R,$$

где $\operatorname{Im}\eta_Q = \{[P] \in \operatorname{Pic} R \mid P \otimes_R Q \cong Q$ *как левые R-модули*$\}$.

Применим предложение 5 к алгебре $K = M(n, R)$. Возьмем R^n в качестве модуля Q. Тогда можно отождествить алгебру S с K. Далее, если $[P] \in \operatorname{Pic} R$, то изоморфизм левых R-модулей $P \otimes_R Q \cong Q$ существует в точности тогда, когда левые R-модули P^n и R^n изоморфны. Можно записать следующий результат.

Предложение 6. *Существует точная последовательность групп*

$$1 \to \operatorname{In}(\operatorname{Aut} K) \to \operatorname{Aut} K \xrightarrow{\eta} \operatorname{Pic} R, \tag{1}$$

где $\operatorname{Im}\eta = \{[P] \in \operatorname{Pic} R \mid P^n \cong R^n$ *как левые R-модули*$\}$.

Гомоморфизм η является композицией гомоморфизмов

$$\operatorname{Aut} K \xrightarrow{\zeta} \operatorname{Pic} K \xrightarrow{\theta} \operatorname{Pic} R.$$

Здесь $\zeta\colon \varphi \to [{}_1K_\varphi]$; кроме того, θ — канонический изоморфизм, который существует в силу того, что категории $K\text{-}\mathrm{mod}$ и $R\text{-}\mathrm{mod}$ эквивалентны. Более точно. Отождествим R^n с модулем вектор-строк длины n и обозначим R-K-бимодуль R^n через M. Также обозначим K-R-бимодуль вектор-столбцов R^n через N. Тогда

$$\theta\colon [Q] \to [M \otimes_K Q \otimes_K N], \quad \theta^{-1}\colon [P] \to [N \otimes_R P \otimes_R M].$$

Таким образом, имеем

$$\eta\colon \varphi \to [M \otimes_K {}_1K_\varphi \otimes_K N] = [M_\varphi \otimes_K N].$$

Предложение 7. *Следующие два утверждения эквивалентны*:

(i) *каждый автоморфизм алгебры $K = M(n, R)$ является произведением внутреннего автоморфизма и кольцевого автоморфизма*;

(ii) *если $[P] \in \operatorname{Pic} R$ и левые R-модули P^n и R^n изоморфны, то левые R-модули P и R изоморфны.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $[P] \in \operatorname{Pic} R$ и левые R-модули P^n и R^n изоморфны. Согласно предложению 6 $[P] \in \operatorname{Im}\eta$. Выберем $\varphi \in \operatorname{Aut} K$, для которого $\eta(\varphi) = [P]$. На основании (i) имеем $\varphi = \mu\psi$, где μ — внутренний автоморфизм и ψ — кольцевой автоморфизм. Поэтому $\eta(\varphi) = \eta(\psi) = [P]$. Пусть ψ определяется автоморфизмом $\alpha \in \operatorname{Aut} R$. Тогда справедливы изоморфизмы

$$P \cong M_\psi \otimes_K N \cong {}_1R_\alpha.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Если φ — произвольный автоморфизм алгебры K, то $\eta(\varphi) = [P] \in \operatorname{Pic} R$, $P^n \cong R^n$ как левые R-модули.

Согласно (ii) существует изоморфизм ${}_RP \cong {}_RR$. Следовательно, ${}_1P_1 \cong {}_1P_\alpha$ для какого-то $\alpha \in \operatorname{Aut} R$. Также имеем следующие равенства в группе $\operatorname{Pic} K$:

$$[N \otimes_R {}_1R_R \otimes_R M] = [N_\alpha \otimes_R M] = [{}_1K_{\overline{\alpha}}].$$

Теперь можно записать такие равенства:

$$\begin{aligned}\varphi = \eta^{-1}([P]) &= \eta^{-1}([{}_1R_\alpha]) = \\ &= \zeta^{-1}\theta^{-1}([{}_1R_\alpha]) = \\ &= \zeta^{-1}([N \otimes_R {}_1R_\alpha \otimes_R M]) = \\ &= \zeta^{-1}([{}_1K_{\overline{\alpha}}]).\end{aligned}$$

Иными словами, $\zeta(\varphi) = [{}_1K_{\overline{\alpha}}] = \zeta(\overline{\alpha})$, где $\overline{\alpha}$ — автоморфизм, индуцированный α. Значит, $\varphi = \mu\overline{\alpha}$, где μ — некоторый внутренний автоморфизм алгебры K. □

Следствие 15. *Пусть кольцо R не имеет нетривиальных идемпотентов и всякий прообразующий левый R-модуль обладает свойством изоморфизма прямых разложений. Тогда любой автоморфизм алгебры $M(n,R)$ равен произведению внутреннего автоморфизма и кольцевого автоморфизма.*

Доказательство. Пусть $[P] \in \operatorname{Pic} R$ и левые R-модули P^n, R^n изоморфны. Из изоморфизма $\operatorname{End}_R P \cong R$ вытекает, что ${}_RP$ — неразложимый модуль. Поэтому ${}_RP \cong {}_RR$ и можно использовать предложение 7. □

Следствие 16. *Если R — локальное кольцо или область главных левых идеалов, то любой автоморфизм алгебры $M(n,R)$ равен произведению внутреннего автоморфизма и кольцевого автоморфизма.*

Доказательство. Пусть левые R-модули P^n и R^n изоморфны. Тогда $\operatorname{End}_R P \cong R$. Если кольцо R локально, то сразу получаем ${}_RP \cong {}_RR$. Если R — область главных левых идеалов, то модуль ${}_RP$ изоморфен прямой сумме левых идеалов кольца R. Поэтому ${}_RP \cong {}_RR$ и можно использовать предложение 7. □

Замечание 2. В условиях следствий 15 и 16 имеет место изоморфизм $\operatorname{Out} K \cong \operatorname{Out} R$.

Замечание 3. Можно доказать следствие 15 без использования группы Пикара. При этом можно использовать рассуждения, похожие на рассуждения из доказательства теоремы 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абызов А. Н., Тапкин Д. Т.* Кольца формальных матриц и их изоморфизмы// Сиб. мат. ж. — 2015. — *56*, № 6. — С. 1199–1214.
2. *Абызов А. Н., Тапкин Д. Т.* О некоторых классах колец формальных матриц// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 3. — С. 3–14.
3. *Крылов П. А.* Афинные группы модулей и их автоморфизмы// Алгебра и логика. — 2001. — *40*, № 1. — С. 60–82.
4. *Крылов П. А., Норбосамбуев Ц. Д.* Автоморфизмы алгебр формальных матриц// Сиб. мат. ж. — 2018. — *59*, № 5. — С. 1116–1127.
5. *Крылов П. А., Норбосамбуев Ц. Д.* Группа автоморфизмов одного класса алгебр формальных матриц// Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех. — 2018. — № 53. — С. 16–21.
6. *Левчук В. М.* Автоморфизмы некоторых нильпотентных матричных групп и колец// Докл. АН СССР. — 1975. — *222*, № 6. — С. 1279–1282.
7. *Тапкин Д. Т.* Кольца формальных матриц и обобщение алгебры инцидентности// Чебышев. сб. — 2015. — *16*, № 3. — С. 442–449.
8. *Тапкин Д. Т.* Изоморфизмы колец инцидентности формальных матриц// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 12. — С. 84–91.
9. *Тапкин Д. Т.* Изоморфизмы колец формальных матриц с нулевыми идеалами следа// Сиб. мат. ж. — 2018. — *59*, № 3. — С. 659–675.
10. *Ánh P. N., van Wyk L.* Automorphism groups of generalized triangular matrix rings// Lin. Algebra Appl. — 2011. — *434*, № 4. — P. 1018–1026.
11. *Ánh P. N., van Wyk L.* Isomorphisms between strongly triangular matrix rings// Lin. Algebra Appl. — 2013. — *438*, № 11. — P. 4374–4381.
12. *Barker G. P.* Automorphism groups of algebras of triangular matrices// Lin. Algebra Appl. — 1989. — *121*, № C. — P. 207–215.
13. *Bass H.* Algebraic K-Theory. — New York, 1968.
14. *Birkenmeier G. F., Heatherly H. E., Kim J. Y., Park J. K.* Triangular Matrix Representations// J. Algebra. — 2000. — *230*, № 2. — P. 558–595.
15. *Boboc C., Dăscălescu S., van Wyk L.* Isomorphisms between Morita context rings// Lin. Multilin. Algebra. — 2012. — *60*, № 5. — P. 545–563.
16. *Faith C. C.* Algebra: Rings, Modules and Categories. — Berlin: Springer-Verlag, 1973.

17. *Haefner J., HolcombT.* The Picard group of a structural matrix algebra// Lin. Algebra Appl. — 2000. — *304*, № 1-3. — P. 69–101.
18. *Isaacs I. M.* Automorphisms of matrix algebras over commutative rings// Lin. Algebra Appl. — 1980. — *31C*. — P. 215–231.
19. *Jøndrup S.* The group of automorphisms of certain subalgebras of matrix algebras// J. Algebra. — 1991. — *141*. — P. 106–114.
20. *Jøndrup S.* Automorphisms and derivations of upper triangular matrix rings// Lin. Algebra Appl. — 1995. — *221C*. — P. 205–218.
21. *Kezlan T. P.* A note on algebra automorphisms of triangular matrices over commutative rings// Lin. Algebra Appl. — 1990. — *135C*. — P. 181–184.
22. *Khazal R., Dăscălescu S., van Wyk L.* Isomorphism of generalized triangular matrix-rings and recovery of tiles// Int. J. Math. Math. Sci. — 2003. — *2003*, № 9. — P. 533–538.
23. *Koppinen M.* Three automorphism theorems for triangular matrix algebras// Lin. Algebra Appl. — 1996. — *245*. — P. 295–304.
24. *Krylov P., Tuganbaev A.* Formal Matrices. — Berlin: Springer-Verlag, 2017.
25. *Krylov P. A., Tuganbaev A. A.* Automorphism groups of formal matrix rings// J. Math. Sci. — 2021. — *258*, № 2. — P. 222–249.
26. *Li Y., Wei F.* Semi-centralizing maps of generalized matrix algebras// Lin. Algebra Appl. — 2012. — *436*, № 5. — P. 1122–1153.
27. *Li Y., Wei F., Fošner A.* k-commuting mappings of generalized matrix algebras// Period. Math. Hungar. — 2019. — *79*, № 1. — P. 50–77.
28. *Rosenberg A., Zelinsky D.* Automorphisms of separable algebras// Pac. J. Math. — 1961. — *11*, № 3. — P. 1109–1117.
29. *Xiao Z., Wei F.* Commuting mappings of generalized matrix algebras// Lin. Algebra Appl. — 2010. — *433*, № 11-12. — P. 2178–2197.
30. *Xiao Z., Wei F.* Commuting traces and Lie isomorphisms on generalized matrix algebras// Operators Matr. — 2014. — *8*, № 3. — P. 821–847.

Крылов Петр Андреевич
Национальный исследовательский Томский государственный университет
E-mail: krylov@math.tsu.ru

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва
E-mail: tuganbaev@gmail.com