



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 219 (2023). С. 39–43
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-219-39-43

УДК 512.552

О ЗАДАЧАХ РЕАЛИЗАЦИИ И ИЗОМОРФИЗМА ДЛЯ КОЛЕЦ ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

© 2023 г. П. А. КРЫЛОВ, А. А. ТУГАНБАЕВ

Аннотация. Для колец формальных матриц над данным кольцом рассматриваются задачи реализации и изоморфизма. Важную роль при этом играют главные матрицы множителей таких колец.

Ключевые слова: кольцо формальных матриц, главная матрица множителей.

ON REALIZATION AND ISOMORPHISM PROBLEMS FOR FORMAL MATRIX RINGS

© 2023 P. A. KRYLOV, A. A. TUGANBAEV

ABSTRACT. We consider realization and isomorphism problems for formal matrix rings over a given ring. Principal multiplier matrices of such rings play an important role in this case.

Keywords and phrases: formal matrix ring, principal multiplier matrix.

AMS Subject Classification: 16R99, 16D10

1. Введение. Кольца формальных (или обобщенных) матриц над данным кольцом привлекают большое внимание специалистов. Это естественно, поскольку такие кольца регулярно появляются в теории колец и модулей. В частности, они играют важную роль при изучении ряда классов артиновых колец и алгебр (см. [8, 9]). Они также служат источником разнообразных примеров для общей теории колец и модулей. Ряд аспектов теории колец формальных матриц представлен в книге [11].

Есть один интересный вид колец формальных матриц. В случае 2×2 матриц они появились в [3]; в случае $n \times n$ матриц они появились в [13]. Мы имеем в виду кольца формальных матриц над данным кольцом R (или говорят — «со значениями в R »). Это означает, что конкретное кольцо формальных матриц содержит на всех позициях одно и то же кольцо R . Класс таких колец является непосредственным расширением обычного кольца $n \times n$ матриц $M(n, R)$. Однако свойства колец формальных матриц над кольцом R могут сильно отличаться от свойств кольца $M(n, R)$. Глава 3 книги [11] содержит изложение некоторых вопросов о кольцах формальных матриц над кольцом R , а в начале этой главы сформулированы три задачи о кольцах формальных матриц. Затем в главах 18–20 эти задачи решаются для некоторых видов колец формальных матриц над кольцом R . Данная статья посвящена двум из трех указанных задач. Именно, задаче реализации I и проблеме изоморфизма III. Эти задачи рассматриваются в [1, 2, 6, 7, 10].

В данной статье мы рассматриваем только ассоциативные кольца с ненулевой единицей. Если R — кольцо, то $M(n, R)$ — обычное кольцо всех $n \times n$ матриц со значениями в кольце R . Первичный радикал произвольного кольца S обозначается через $P(S)$.

Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00052).

2. Кольца формальных матриц над данным кольцом. Кратко напомним определение кольца формальных матриц. Зафиксируем натуральное число $n \geq 2$. Пусть $R_1, \dots, R_n$ — кольца и $M_{ij} = R_i R_j$ -бимодули, причем $M_{ii} = R_i$, $i, j = 1, \dots, n$. Предположим, что для любых индексов $i, j, k = 1, \dots, n$ задан $R_i R_k$ -бимодульный гомоморфизм $M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \rightarrow M_{ik}$. Обозначим через K множество всех $n \times n$ матриц со значениями в бимодулях M_{ij} . Относительно стандартных матричных операций сложения и умножения K образует кольцо. Матрицы умножаются посредством применения упомянутых выше бимодульных гомоморфизмов. Кольцо K называется *кольцом формальных* (или *обобщенных*) *матриц* порядка n . Его можно записать в следующем виде:

$$K = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & R_n \end{pmatrix}.$$

Пусть R — некоторое кольцо. Если K — такое кольцо формальных матриц, что $M_{ij} = R$ для всех i и j , то его называют *кольцом формальных матриц над кольцом R* или *кольцом формальных матриц со значениями в кольце R* . Такие кольца можно определить непосредственно. Именно, пусть $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ — некоторое множество центральных элементов кольца R , удовлетворяющих тождествам

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \quad s_{ijk} \cdot s_{ikl} = s_{ijl} \cdot s_{jkl} \quad (1)$$

для всех индексов $i, j, k, \ell = 1, \dots, n$. Для произвольных $n \times n$ матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ со значениями в R определим новое умножение, полагая

$$AB = C = (c_{ij}), \quad \text{где} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ikj} a_{ik} b_{kj}.$$

В результате получаем кольцо, которое обозначим через K или $M(n, R, \Sigma)$, где Σ — множество всех s_{ijk} . Множество Σ называется *системой множителей*, а его элементы называются *множителями* кольца K . Если все s_{ijk} равны 1, то получаем обычное кольцо матриц $M(n, R)$.

Пусть τ — подстановка степени n . Если $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ — некоторая система множителей, то положим $t_{ijk} = s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$. Тогда $\{t_{ijk}\}$ — тоже система множителей, поскольку она удовлетворяет тождествам (1). Обозначим ее через $\tau\Sigma$. Следовательно, существует кольцо формальных матриц $M(n, R, \tau\Sigma)$. Кольца $M(n, R, \Sigma)$ и $M(n, R, \tau\Sigma)$ изоморфны при соответствии $A \rightarrow \tau A$, где $A = (a_{ij})$ и $\tau A = (a_{\tau(i)\tau(j)})$.

С данным кольцом $M(n, R, \Sigma)$ можно ассоциировать несколько матриц. Положим $S = (s_{iji})$ и $S_k = (s_{ikj})$ для каждого $k = 1, \dots, n$. Эти матрицы называются *матрицами множителей* кольца $M(n, R, \Sigma)$. Матрица S является симметрической. Следуя [10], будем называть ее *главной матрицей множителей*. В [10] также используются матрицы (s_{ijk}) и (s_{kij}) для $k = 1, \dots, n$. Понятно, что соответствующими матрицами множителей для кольца $M(n, R, \tau\Sigma)$ будут матрицы τS и τS_k .

До конца статьи считаем, что K — кольцо формальных матриц над данным кольцом R . Кроме того, за исключением теоремы 3, каждый множитель s_{ijk} равен 0 или 1. Таким образом, все матрицы множителей такого кольца суть (01)-матрицы. Для краткости будем называть кольцо K (01)-кольцом формальных матриц.

Из тождеств (1) нетрудно вывести следующий результат.

Лемма 1. Для множителей s_{iji} , s_{jki} , s_{kik} , где $i \neq j$, $j \neq k$, $k \neq i$, некоторого (01)-кольца формальных матриц имеет место одна из следующих возможностей:

1. все три элемента являются единицами;
2. какие-то два из этих трех элементов являются нулями, а третий элемент — единица;
3. все три элемента являются нулями.

Полезно ввести понятие абстрактной матрицы множителей. Пусть $T = (t_{ij})$ — симметрическая (01)-матрица размера $n \times n$ над кольцом R , у которой главная диагональ состоит из единиц

и для любых трех элементов t_{ij} , t_{jk} , t_{ki} с попарно различными индексами верно одно из утверждений 1—1 леммы 1. Назовем такую матрицу T *главной матрицей множителей*.

Лемма 2 (см. [4], [5, раздел 12]). *Для любой главной $n \times n$ матрицы множителей T существует такая подстановка σ степени n , что матрица σT имеет канонический вид.*

Под *каноническим видом* подразумевается, что матрица σT может быть представлена в таком блочном виде, что на главной диагонали стоят блоки из единиц, а на всех остальных позициях стоят нули.

В ситуации леммы 2 будем говорить, что матрица T *приведена к каноническому виду*. Ввиду леммы 1 получается, что главная матрица множителей всякого (01)-кольца формальных матриц приводима к каноническому виду.

Замечание 1. Уточним, что канонический вид, конечно, определяется с точностью до перестановки блоков на главной диагонали и соответствующей перестановки оставшихся блоков.

3. Задача реализации для (01)-колец формальных матриц. О задаче реализации написано в разделе 1. Она направлена на описание матриц множителей как абстрактных матриц.

Теорема 1. *Пусть T — некоторая главная матрица множителей. Существует (01)-кольцо формальных матриц, у которого главная матрица множителей совпадает с T .*

Доказательство. На основании леммы 2 считаем, что матрица T имеет канонический вид. Для каждого индекса $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ определим элемент s_{ijk} кольца R , полагая $s_{ijk} = 1$, если одна из пар (i, j) или (j, k) занимает позицию в каком-либо из блоков на главной диагонали матрицы T . В противном случае считаем, что $s_{ijk} = 0$. Множество Σ всех таких s_{ijk} удовлетворяет тождествам (1). Поэтому кольцо $M(n, R, \Sigma)$ существует. Матрица T является главной матрицей множителей кольца $M(n, R, \Sigma)$. $\square$

Множители кольца $M(n, R, \Sigma)$, построенного в доказательстве теоремы 1, удовлетворяют следующему условию:

Условие 1. $s_{ijk} = 0$ для любых таких попарно различных индексов i, j, k , что $s_{iji} = 0 = s_{jkj}$.

Будем говорить, что некоторое (01)-кольцо формальных матриц является кольцом *вида* K_0 , если его множители удовлетворяют приведенному выше условию 1. По главной матрице множителей такого кольца можно однозначно восстановить все остальные матрицы множителей.

Отметим, что работы [4, 5, 12] содержат различный материал о группах автоморфизмов (01)-колец формальных матриц.

4. Проблема изоморфизма для колец формальных матриц. В [11, раздел 16] записана проблема изоморфизма III для колец формальных матриц:

Проблема 1. Когда две системы множителей определяют изоморфные кольца формальных матриц?

Рассмотрим эту проблему для (01)-колец формальных матриц.

Будем говорить, что некоторое кольцо R *удовлетворяет (n, m) -условию*, если для любых натуральных чисел n и m из изоморфизма колец $M(n, R)$ и $M(m, R)$ вытекает равенство $m = n$. Например, (n, m) -условие выполняется, когда кольцо R коммутативно, или локально, или является областью главных левых (правых) идеалов.

Кольцо S называется *неразложимым*, если 0 и 1 — единственные его центральные идемпотенты.

Теорема 2. *Предположим, что фактор-кольцо $R/P(R)$ неразложимо и удовлетворяет (n, m) -условию, а K_1 и K_2 — (01)-кольца формальных матриц с главными матрицами множителей S и T соответственно. Верны следующие утверждения.*

1. *Если кольца K_1 и K_2 изоморфны, то матрицы S и T обладают одинаковыми каноническими видами.*

2. Если K_1 и K_2 — (01)-кольца формальных матриц вида K_0 и канонические виды матриц S и T совпадают, то кольца K_1 и K_2 изоморфны.

Доказательство.

1. Ввиду леммы 2 можно считать, что матрицы S и T представлены в каноническом виде. Допустим, что $K_1 \cong K_2$. Тогда существует некоторый изоморфизм колец

$$\gamma: K_1/P(K_1) \rightarrow K_2/P(K_2).$$

Строение первичных радикалов $P(K_1)$ и $P(K_2)$ известно (см. [11, следствие 17.1] и абзац после него). Нам также дано блочное строение матриц S и T . Используя эту информацию, мы можем записать равенства

$$K_1/P(K_1) = P_1 \times \dots \times P_k \quad \text{и} \quad K_2/P(K_2) = Q_1 \times \dots \times Q_\ell,$$

где k (соотв., ℓ) — число блоков на главной диагонали матрицы S (соотв., T). При этом все P_i и Q_j — полные кольца матриц некоторых порядков. Так как кольцо $R/P(R)$ неразложимо, то все кольца $P_i/P(P_i)$ и $Q_j/P(Q_j)$ неразложимы.

В этом месте заметим, что верен аналог леммы 9.6 из [5] (или леммы 6.1 из [12]) об автоморфизмах прямых произведений неразложимых колец для изоморфизмов между прямыми произведениями неразложимых колец. Поэтому $k = \ell$ и найдется такая подстановка τ степени k , что ограничение γ на P_i является изоморфизмом $P_i \rightarrow Q_{\tau(i)}$, $i = 1, \dots, k$. Следовательно, канонические виды матриц S и T совпадают.

2. Пусть $\{s_{ijk}\}$ (соотв., $\{t_{ijk}\}$) — множество всех множителей кольца K_1 (соотв., кольца K_2). Как уже отмечалось, множители вида s_{iji} , т. е. элементы главной матрицы множителей S , определяют все остальные множители s_{ijk} ; то же самое верно для множителей кольца K_2 . Таким образом, $s_{ijk} = t_{ijk}$ для всех i, j, k . Поэтому можно записать равенство $K_1 = K_2$. $\square$

Следствие 1. Факторкольца $K_1/P(K_1)$ и $K_2/P(K_2)$ изоморфны в точности тогда, когда матрицы S и T имеют один и тот же канонический вид.

Введем еще один класс колец формальных матриц над данным кольцом и докажем для таких колец одну теорему, касающуюся проблемы изоморфизма.

Зафиксируем некоторый центральный элемент s кольца R со свойством $s^2 \neq 1$, $s^2 \neq s$. Кроме того, пусть K — такое кольцо формальных матриц над R , что каждый его множитель равен 1 или s . Обозначим введенное кольцо через $M(n, R, s)$ и договоримся называть его $(s1)$ -кольцом формальных матриц. Кольца $M(n, R, s)$ изучаются в разделах 18—19 книги [11]. Известны связи колец $M(n, R, s)$ с кольцами скрещенных матриц (см. [9]). В [10, лемма 4.7] доказано, что главная матрица множителей кольца $M(n, R, s)$ определяет все другие матрицы множителей. Для (01)-колец формальных матриц подобное утверждение, по-видимому, не верно.

Пусть S — главная матрица множителей некоторого кольца $M(n, R, s)$. Согласно [11, лемма 18.2] найдется такая подстановка τ степени n , что матрица τS имеет канонический вид. Это означает, что матрица τS представима в таком блочном виде, что на главной диагонали расположены блоки, состоящие из единиц, а на всех остальных местах стоит элемент s .

Теорема 3. Пусть факторкольцо $R/P(R)$ неразложимо и удовлетворяет (n, t) -условию. Для $(s1)$ -колец формальных матриц K_1 и K_2 над R , где $s \in P(R)$, верно следующее утверждение: Кольца K_1 и K_2 изоморфны в точности тогда, когда канонические виды главных матриц множителей для колец K_1 и K_2 совпадают.

Доказательство. Считаем, что главные матрицы множителей для колец K_1 и K_2 уже имеют канонический вид.

Необходимость. Если учесть, что $s \in P(R)$, то фактически можно повторить доказательство теоремы 2(1).

Достаточность. Главные матрицы множителей для колец K_1 и K_2 однозначно определяют все оставшиеся матрицы, см. [10, лемма 4.7]. Поэтому можно повторить рассуждения из доказательства теоремы 2(2). $\square$

Замечание 2. Для артинова слева кольца R результат, аналогичный теореме 3, доказан в [10, теорема 4.12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абызов А. Н., Тапкин Д. Т. Кольца формальных матриц и их изоморфизмы// Сиб. мат. ж. — 2015. — 56, № 6. — С. 1199–1214.
2. Абызов А. Н., Тапкин Д. Т. О некоторых классах колец формальных матриц// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 3. — С. 3–14.
3. Крылов П. А. Об изоморфизме колец обобщённых матриц// Алгебра и логика. — 2008. — 47, № 4. — С. 456–463.
4. Крылов П. А., Норбосамбуев Ц. Д. Автоморфизмы алгебр формальных матриц// Сиб. мат. ж. — 2018. — 59, № 5. — С. 1116–1127.
5. Крылов П. А., Туганбаев А. А. Группы автоморфизмов колец формальных матриц// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — 164. — С. 96–124.
6. Тапкин Д. Т. Кольца формальных матриц и обобщение алгебры инцидентности// Чебышев. сб. — 2015. — 16, № 3. — С. 442–449.
7. Тапкин Д. Т. Изоморфизмы колец инцидентности формальных матриц// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 12. — С. 84–91.
8. Auslander M., Reiten I., Smalø S. O. Representation Theory of Artin Algebras. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
9. Baba Y., Oshiro K. Classical Artinian Rings and Related Topics. — New Jersey–London–Singapore: World Scientific, 2009.
10. Chen W., Deng G., Su H. On the binary system of factors of formal matrix rings// Czech. Math. J. — 2020. — 70. — P. 693–709.
11. Krylov P. A., Tuganbaev A. A. Formal Matrices. — Berlin: Springer-Verlag, 2017.
12. Krylov P. A., Tuganbaev A. A. Automorphisms of formal matrix rings/ [arXiv:arXiv:2204.13332 \[math.RA\]](#).
13. Tang G., Zhou Y. A class of formal matrix rings// Lin. Algebra Appl. — 2013. — 438, № 12. — P. 4672–4688.

Крылов Петр Андреевич

Национальный исследовательский Томский государственный университет

E-mail: krylov@math.tsu.ru

Туганбаев Аскар Аканович

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: tuganbaev@gmail.com