



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 219 (2023). С. 50–53
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-219-50-53

УДК 512.5

МАКСИМАЛЬНЫЕ И МИНИМАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ ЦЕНТРАЛЬНО СУЩЕСТВЕННЫХ КОЛЕЦ

© 2023 г. О. В. ЛЮБИМЦЕВ, А. А. ТУГАНБАЕВ

Аннотация. Показано, что кольцо R с центром $Z(R)$ такое, что модуль $R_{Z(R)}$ является существенным расширением модуля $Z(R)_{Z(R)}$, не обязано быть квазиинвариантным справа, т. е. не все максимальные правые идеалы кольца R являются идеалами. В терминах центральной сущности получены достаточные условия того, что все максимальные правые идеалы являются идеалами.

Ключевые слова: центрально существенное кольцо, максимальный правый идеал, минимальный правый идеал.

MAXIMAL AND MINIMAL IDEALS OF CENTRALLY ESSENTIAL RINGS

© 2023 O. V. LYUBIMTSEV, A. A. TUGANBAEV

ABSTRACT. We show that a ring R with center $Z(R)$ such that the module $R_{Z(R)}$ is an essential extension of the module $Z(R)_{Z(R)}$ need not be right quasi-invariant, i.e., not all maximal right ideals of the ring R are ideals. In terms of the central essentiality property, we obtain sufficient conditions for the fact that all maximal right ideals are ideals.

Keywords and phrases: centrally essential ring, maximal right ideal, minimal right ideal.

AMS Subject Classification: 16D25, 16R99

1. Введение. Мы рассматриваем только ассоциативные унитарные ненулевые кольца. Кольцо A называется *центрально существенным*, если либо A коммутативно, либо для каждого его нецентрального элемента a существуют такие ненулевые центральные элементы x, y , что $ax = y$. Ясно, что кольцо A с центром $Z(A)$ центрально существенно в точности тогда, когда модуль $A_{Z(A)}$ является существенным расширением модуля $Z(A)_{Z(A)}$. Кроме того, любое коммутативное кольцо является центрально существенным.

Радикал Джекобсона кольца A обозначается через $J(A)$.

Замечание 1. Если A — кольцо и факторкольцо $A/J(A)$ центрально существенно, то кольцо $A/J(A)$ коммутативно, а кольцо A квазиинвариантно справа и слева.

Доказательство. Так как $A/J(A)$ — центрально существенное полупервичное кольцо, то кольцо $A/J(A)$ коммутативно [1, Proposition 3.3.]. В частности, все максимальные правые (левые) идеалы кольца $A/J(A)$ являются идеалами. Поэтому кольцо A квазиинвариантно справа и слева. $\square$

Работа О. В. Любимцева выполнена в рамках государственного проекта FSWR-2023-0034. Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00052).

Замечание 2. Все полуартиновы справа или полусовершенные центрально существенные кольца являются квазиинвариантными справа.

Замечание 2 вытекает из замечания 1 и того, что факторкольцо $A/J(A)$ центрально существенного кольца A коммутативно, если кольцо A полусовершенно или полуартиново справа; см. [2, Proposition 3.4] и [4, Theorem 1.5].

Замечание 3. Если A — центрально существенное кольцо и факторкольцо $A/J(A)$ коммутативно, то любой минимальный правый идеал S кольца A лежит в $Z(A)$. В частности, все минимальные правые идеалы кольца A являются идеалами и $\text{Soc } A_A$ лежит в центре кольца A .

Доказательство. Простой A -модуль S_A является циклическим модулем с ненулевым образующим $s \in S$. Обозначим $K = S \cap Z(A)$. По условию существуют такие ненулевые центральные элементы $x, y \in Z(A)$, что $0 \neq sx = y \in S$. Тогда $S = yA$ и $y \in K \neq 0$. Так как $J(A)$ — пересечение аннуляторов всех простых правых A -модулей, то $SJ(A) = 0$. Так как кольцо $A/J(A)$ коммутативно, то $ab - ba \in J(A)$ для любых элементов $a, b \in A$. Кроме того, $k(ab - ba) = 0$ для любого $k \in K$. Поскольку $k \in Z(A)$, то $(ka)b = kba = b(ka)$. Отсюда получаем, что $ka \in Z(A)$. Далее, из $ka \in S$ следует, что K — правый идеал кольца A . Так как S — минимальный правый идеал, то $S = K \subseteq Z(A)$. $\square$

В связи с замечаниями 1, 2 и 3 мы докажем теорему 1, которая является основным результатом данной работы.

Теорема 1.

- (a) *Существуют центрально существенные кольца, в которых не все максимальные правые идеалы являются идеалами.*
- (b) *Существуют центрально существенные кольца, в которых не все замкнутые¹ правые идеалы являются идеалами.*

В связи с теоремой 1 мы сформулируем открытый вопрос.

Открытый вопрос 1. Существуют ли центрально существенные кольца, в которых не все минимальные правые идеалы являются идеалами?

2. Доказательство теоремы 1.

Лемма 1. Пусть A — кольцо, $R = A[x]$ — кольцо многочленов и M — максимальный правый идеал кольца A .

- (a) $MR + xR$ — максимальный правый идеал кольца R .
- (b) Если $MR + xR$ — идеал кольца R , то M — идеал кольца A , факторкольца A/M и $R/(MR + xR)$ являются изоморфными телами, $(A/M)[x]$ — область главных односторонних идеалов, и имеется изоморфизм $\alpha: R/(MR + xR) \rightarrow A/M$, при котором $\alpha(f + (MR + xR)) = f_0 + M$, где f_0 — свободный член многочлена $f \in R$.
- (c) Если A — тело и кольцо многочленов R квазиинвариантно справа, то кольцо A является полем.
- (d) Если кольцо многочленов R квазиинвариантно справа, то факторкольцо $A/J(A)$ коммутативно, см. [3, Theorem 7].

Доказательство.

а. Пусть многочлен $f = f_0 + xg \in R$ не принадлежит правому идеалу $MR + xR$ кольца R , где $f_0 \in A$ и $g \in R$. Тогда $f_0 \notin M$, поскольку в противном случае $f = f_0 + xg \in MR + xR$. Поэтому существуют такие элементы $d \in A$ и $m' \in M$, что

$$1 = f_0d + m' = (f - xg)d + m' = fd - xgd + m' \in fR + xR + MR = fR + MR + xR.$$

Поэтому $MR + xR$ — максимальный правый идеал в R .

¹Подмодуль X модуля M называется замкнутым, если $X = Y$ для любого подмодуля Y в M , являющегося существенным расширением модуля X .

b. Утверждения проверяются непосредственно и хорошо известны.

c. Пусть a и b — ненулевые элементы тела A . Так как A — тело, то в области R имеется алгоритм Евклида, и поэтому $(a+x)R$ — максимальный правый идеал квазиинвариантной справа области R . Тогда $(a+x)R$ — идеал в R . Поэтому $b(a+x) \in (a+x)R$ и $ba + bx = ac + xc$ для некоторого $c \in A$, откуда $bx = xc$ и $ba = ac$. Тогда $b = c$ и $ba = ab$.

d. В силу утверждения b кольцо A — квазиинвариантно справа. Поэтому

$$J(A) = \bigcap_{i \in I} M_i,$$

где $\{M_i\}_{i \in I}$ — множество всех таких идеалов кольца A , что A/M_i — тело. Непосредственно проверяется, что любое факторкольцо квазиинвариантного справа кольца квазиинвариантно справа. Кроме того, каждое кольцо $(A/M_i)[x]$ изоморфно факторкольцу квазиинвариантного справа кольца R . Поэтому каждое кольцо $(A/M_i)[x]$ квазиинвариантно справа. В силу утверждения c каждое факторкольцо A/M_i коммутативно. Поэтому факторкольцо $A/J(A)$ коммутативно. $\square$

Лемма 2. Пусть A — центрально существенное кольцо.

(a) Кольцо $A[x]$ — центрально существенно.

(b) Если факторкольцо $A/J(A)$ некоммутативно, то $A[x]$ — центрально существенное кольцо, не являющееся квазиинвариантным справа (слева).

Доказательство.

a. Утверждение доказано в [1, Lemma 2.2].

b. Утверждение следует из утверждения a и леммы 1, d. $\square$

2.1. Окончание доказательства теоремы 1.

a. В работе [5, Theorem 1.5] построен пример такого центрально существенного кольца A , что факторкольцо $A/J(A)$ не является PI -кольцом. В частности, кольцо $A/J(A)$ некоммутативно. Теперь утверждение следует из леммы 2, b.

b. Пусть $\mathbb{F}$ — поле и $\mathcal{A}$ — подалгебра $\mathbb{F}$ -алгебры всех матриц размера 7×7 , состоящей из матриц A вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b & c & d & e & f \\ 0 & \alpha & 0 & b & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Пусть для $A' \in \mathcal{A}$ имеем $a' = a + 1$, а остальные компоненты совпадают с соответствующими компонентами матрицы A . Тогда $AA' \neq A'A$, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Таким образом, алгебра $\mathcal{A}$ некоммутативна. Нетрудно видеть, что в $Z(\mathcal{A})$ лежат матрицы C вида

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & c & d & e & f \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Пусть $A \in \mathcal{A}$, причем $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Выберем матрицу $B \in Z(\mathcal{A})$ с $d = a$, $e = b$ и нулями на остальных местах. Тогда $0 \neq AB \in Z(\mathcal{A})$. Следовательно, $\mathcal{A}$ — центрально существенная алгебра.

Рассмотрим правый идеал I в $\mathcal{A}$, состоящий из матриц вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что I не является идеалом в $\mathcal{A}$. Кроме того, I — замкнутый правый идеал. В самом деле, идеал в $\mathcal{A}$, имеющий только элемент c в качестве ненулевой компоненты, есть $\cap$ -дополнение к I .

В то же время замкнутый левый идеал J в $\mathcal{A}$, элементами которого являются матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

не является идеалом. Идеал, имеющий только элемент c в качестве ненулевой компоненты, является $\cap$ -дополнением также и для J .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Centrally essential group algebras// J. Algebra. — 2018. — 512, № 15. — P. 109–118.
2. *Марков В. Т., Туганбаев А. А.* Центральные существенные кольца// Дискр. мат. — 2018. — 30, № 2. — С. 55–61.
3. *Huh C., Jang S.-H., Kim C.-O., Lee Y.* Rings whose maximal one-sided ideals are two-sided// Bull. Korean Math. Soc. — 2002. — 39, № 3. — P. 411–422.
4. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Rings essential over their centers// Commun. Algebra. — 2019. — 47, № 4. — P. 1642–1649.
5. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Constructions of centrally essential rings// Commun. Algebra. — 2020. — 48, № 1. — P. 198–203.

Любимцев Олег Владимирович

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

E-mail: oleg_lyubimcev@mail.ru

Туганбаев Аскар Аканович

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: tuganbaev@gmail.com