ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 219 (2023). С. 60–130
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-219-60-130

УДК 512.5

ЦЕНТРАЛЬНО СУЩЕСТВЕННЫЕ КОЛЬЦА И ПОЛУКОЛЬЦА

© 2023 г. **А. А. ТУГАНБАЕВ**

Памяти Виктора Тимофеевича Маркова

Аннотация. В данном обзоре систематически изучаются кольца и полукольца, которые либо коммутативны, либо в которых для любого нецентрального элемента a существуют такие ненулевые центральные элементы x и y, что $ax = y$.

***Ключевые слова*:** кольцо, ассоциативное кольцо, коммутативное кольцо, центрально существенное кольцо, групповая алгебра, модуль, идеал.

CENTRALLY ESSENTIAL RINGS AND SEMIRINGS

© 2023 **A. A. TUGANBAEV**

Abstract. In this survey, we systematically examine rings and semirings that are either commutative or satisfy the following condition: for any noncentral element a, there exist nonzero central elements x and y such that $ax = y$.

***Keywords and phrases*:** ring, associative ring, commutative ring, centrally essential ring, group algebra, module, ideal.

***AMS Subject Classification*:** 16R99, 20K30

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 61
1. Полупервичные, локальные, совершенные и полуартиновы кольца 64
1.1. Общие свойства 64
1.2. Полупервичные и несингулярные кольца 66
1.3. Локальные и полусовершенные кольца 68
1.4. Совершенные и полуартиновы кольца 69
2. Градуированные кольца и внешние алгебры 71
2.1. Градуированные кольца 71
2.2. Внешние алгебры над полями 72
2.3. Внешние алгебры над кольцами 73
3. Конструкции колец 76
3.1. Кольца многочленов, рядов и частных 76
3.2. Групповые кольца 77
3.3. Кольца частных, групповые и полугрупповые кольца 82
3.4. Конструкция одного ЦС кольца 88
3.5. ЦС кольцо R с некоммутативным $R/J(R)$ 90
3.6. Локальные подалгебры треугольных алгебр 91
3.7. Кольца эндоморфизмов абелевых групп 96

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 22-11-00052.
Автор благодарен А. Н. Абызову и О. В. Любимцеву за участие в редактировании рукописи.

4. Дистрибутивные и цепные кольца 101
4.1. Цепные артиновы кольца 101
4.2. Цепные нётеровы кольца 105
4.3. Кольца с плоскими идеалами 109
4.4. Дистрибутивные нётеровы кольца 111
5. Центрально существенные полукольца 114
5.1. Общие сведения 114
5.2. Примеры, конструкции и замечания 115
6. Неассоциативные кольца 118
6.1. Виды центральной существенности 118
6.2. Приведенные и полупервичные кольца 120
6.3. Процесс Кэли—Диксона 122
6.4. Процесс Кэли—Диксона и центральная существенность 125
6.5. Алгебры кватернионов и октонионов 126
Список литературы 128

Введение

Во введении и главах 1—5 слово *кольцо* означает *ассоциативное кольцо*. По умолчанию предполагается, что кольцо обладает ненулевой единицей; случай не обязательно унитальных колец оговаривается особо. В главе 6 слово *кольцо* означает *не обязательно ассоциативное кольцо*.

Не обязательно унитальное кольцо A называется *центрально существенным* или *ЦС кольцом*, если либо A коммутативно, либо для любого нецентрального элемента $a \in A$ существуют такие ненулевые центральные элементы x и y, что $ax = y$.

Ясно, что любое коммутативное кольцо является центрально существенным. Унитальное кольцо A с центром $Z(A)$ центрально существенно в точности тогда, когда $Z(A)$-модуль A — существенное расширение $Z(A)$-модуля $Z(A)$.

Глядя на определение центрально существенного кольца A, может показаться, что такое кольцо, возможно, коммутативно. Действительно, A обладает многими свойствами коммутативных колец; перечислим некоторые из них.

1. Все идемпотенты кольца A центральны (см. 1.1.4 ниже).
2. Если кольцо A полупервично, то кольцо A коммутативно (см. теорему 1.2.2 ниже).
3. Если A — центрально существенное локальное кольцо, то кольцо $A/J(A)$ — поле и поэтому коммутативно; см. 1.3.2.
4. Если A — полуартиново справа или слева, центрально существенное кольцо, то фактор-кольцо $A/J(A)$ коммутативно; см. теорему 1.4.5.

Однако центрально существенное кольцо A может быть весьма далеким от коммутативного кольца. Например:

1. факторкольцо $A/J(A)$ кольца A по первичному радикалу может не быть центрально существенным и, в частности, полупервичное кольцо $A/J(A)$ может не быть коммутативным (см. теорему 3.5.3);
2. факторкольца кольца A по идеалам, порожденным центральными идемпотентами, не обязательно центрально существенны (см. пример 2.2.5);
3. факторкольца кольца A не обязательно центрально существенны (см. два предыдущих пункта);
4. существуют конечные некоммутативные центрально существенные групповые алгебры; пример 1 ниже;
5. существуют конечные некоммутативные центрально существенные внешние алгебры (см. пример 2 ниже);

6. существуют такие абелевы группы G без кручения конечного ранга, что их кольца эндоморфизмов являются некоммутативными центрально существенными кольцами (см. теорему 3.7.13, с).

Пример 1. Пусть F — поле порядка 2 и $G = Q_8$ — группа кватернионов порядка 8, т. е. G — группа с двумя образующими a, b и определяющими соотношениями $a^4 = 1$, $a^2 = b^2$ и $aba^{-1} = b^{-1}$; см. [29, Sec. 4.4]. Тогда групповая алгебра FG — некоммутативное конечное локальное центрально существенное кольцо, состоящее из 256 элементов (это следует из предложения 3.2.4 ниже).

Приведем некоторые необходимые понятия. Для кольца A обозначим через $Z(A)$ (или $C(A)$), $J(A)$, $N(A)$ и $K(A)$ центр, радикал Джекобсона, первичный радикал и радикал Кёте (т. е. сумму всех ниль-идеалов, которая является наибольшим ниль-идеалом) соответственно. Мы также положим $[a, b] = ab - ba$ для любых двух элементов a, b кольца A. Для группы или полугруппы X через $Z(X)$ (или $C(X)$) обозначается ее центр.

Пример 2. Приведем еще один пример некоммутативного конечного центрально существенного кольца. Пусть F — поле из трех элементов, V — векторное F-пространство с базисом e_1, e_2, e_3, и пусть $\Lambda(V)$ — внешняя алгебра (см. 2.2.1) для V. Так как $e_1 \wedge e_1 = e_2 \wedge e_2 = e_3 \wedge e_3 = 0$ и любое произведение образующих равно $\pm$произведению образующих с возрастающими индексами, $\Lambda(V)$ — конечная 8-мерная F-алгебра с базисом

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\},$$
$$|\Lambda(V)| = 3^8, \quad e_k \wedge e_i \wedge e_j = -e_i \wedge e_k \wedge e_j = e_i \wedge e_j \wedge e_k.$$

Поэтому, если

$$x = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1^1 e_1 + \alpha_1^2 e_2 + \alpha_1^3 e_3 + \alpha_2^1 e_1 \wedge e_2 + \alpha_2^2 e_1 \wedge e_3 + \alpha_2^3 e_2 \wedge e_3 + \alpha_3 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,$$

то

$$[e_1, x] = 2\alpha_1^2 e_1 \wedge e_2 + 2\alpha_1^3 e_1 \wedge e_3,$$
$$[e_2, x] = -2\alpha_1^1 e_1 \wedge e_2 + 2\alpha_1^3 e_2 \wedge e_3,$$
$$[e_3, x] = -2\alpha_1^1 e_1 \wedge e_3 - 2\alpha_1^2 e_2 \wedge e_3.$$

Поэтому x лежит в центре $Z(\Lambda(V))$ алгебры $\Lambda(V)$ в точности тогда, когда $\alpha_1^1 = \alpha_1^2 = \alpha_1^3 = 0$, откуда центр алгебры $\Lambda(V)$ имеет размерность 5. При этом, если $\alpha_1^1 \neq 0$, то

$$x \wedge (e_2 \wedge e_3) = \alpha_0 e_2 \wedge e_3 + \alpha_1^1 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \in Z(\Lambda(V)) \setminus \{0\}.$$

Кроме того, $e_2 \wedge e_3 \in Z(\Lambda(V))$. Аналогично рассуждаем, если $\alpha_1^2 \neq 0$ или $\alpha_1^3 \neq 0$. Поэтому $\Lambda(V)$ — конечное центрально существенное некоммутативное кольцо.

Пример 3. Этот пример, утверждение 1 и его доказательство принадлежат рецензенту статьи [47], любезно предоставившему примеры некоммутативных центрально существенных колец, возникающих из конструкции, описанной в [33].

Предложение 1. *Если B — такой идеал кольца A, что $B \subseteq Z(A)$ и A/B — поле, то A — центрально существенное кольцо.*

Доказательство. Допустим, что A некоммутативно и a — нецентральный элемент в A. Если $aB \neq 0$ то ясно, что $Z(A) \cap aZ(A) \neq 0$. Допустим противное, т. е. $aB = 0$. Так как $a \notin B$ и A/B — поле, то элемент a обратим по модулю B, т. е. $sa = 1 - x$ для некоторых $s \in A$ и $x \in B$. Для любого $y \in B$ имеем $0 = say = y - xy$, откуда $xB = B = xA$, x — центральный идемпотент, и A имеет пирсовское разложение $A = Ax \oplus A(1 - x)$, где оба слагаемых $Ax = B$ и $A(1 - x) \cong A/B$ коммутативны. Поэтому A коммутативно. Это противоречит выбору A, и 1 верно.

Остается рассмотреть простейший случай конструкции, приведенной в [33, Proposition 7] (мы сохраняем обозначения этой статьи). Пусть $F = \mathbb{Q}(x, y)$ — поле рациональных функций. Рассмотрим две частные производные $d_1 = \partial/\partial x$ и $d_2 = \partial/\partial x$. Тогда кольцо $A = T(F, F)$ матриц

$$\left\{ \begin{pmatrix} f & d_1(f) & g \\ 0 & f & d_2(f) \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} : f, g \in F \right\}$$

и его идеал

$$B = \hat{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : g \in F \right\}$$

удовлетворяют условиям утверждения 1. □

Приведем некоторые определения.

Для модуля M *цоколем* $\operatorname{Soc} M$ называется сумма всех простых подмодулей в M; если M не содержит простых подмодулей, то $\operatorname{Soc} M = 0$ по определению. Модуль M называется *конечномерным* (в смысле Голди), если M не содержит подмодуля, который является бесконечной прямой суммой ненулевых подмодулей. Модуль M называется *нетеровым* (соотв., *артиновым*), если M не содержит бесконечную строго возрастающую (соотв., строго убывающую) цепь подмодулей. Прямые слагаемые свободных модулей называются *проективными* модулями. Модуль M называется *наследственным*, если все подмодули модуля M проективны. Модуль M называется *дистрибутивным* (соотв., *цепным*), если решетка подмодулей модуля M дистрибутивна (соотв., является цепью). Напомним, что модуль X называется *существенным расширением* подмодуля Y модуля X, если $Y \cap Z \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля Z в X. В этом случае Y называется *существенным подмодулем* модуля X. Подмодуль Y модуля X называется *замкнутым* (в X), если $Y = Y'$ для любого подмодуля Y' модуля X, являющегося существенным расширением модуля Y.

Кольцо A называется *областью*, если A не имеет ненулевых делителей нуля. Коммутативная область A называется *дедекиндовой* областью, если A — коммутативная наследственная нётерова область. Если A — кольцо, то собственный идеал B кольца A называется *вполне первичным*, если факторкольцо A/B — область. Кольцо A называется *инвариантным справа* (соотв., *инвариантным слева*), если все правые (соотв., левые) идеалы кольца A являются идеалами. Кольцо R называется *полупервичным* (соотв., *первичным*), если R не имеет нильпотентных ненулевых идеалов (соотв., произведение любых двух ненулевых идеалов кольца R не равно нулю). Кольцо R называется *арифметическим*, если решетка его двусторонних идеалов дистрибутивна, т. е. $X \cap (Y + Z) = X \cap Y + X \cap Z$ для любых трех идеалов X, Y, Z кольца R. Ясно, что коммутативное кольцо дистрибутивно справа (соотв., слева) в точности тогда, когда кольцо арифметично. Элемент r кольца R называется *левым неделителем нуля* или *регулярным справа* элементом, если из соотношения $rx = 0$ следует соотношение $x = 0$ для любого $x \in R$. Заметим, что односторонние делители нуля являются двусторонними делителями нуля в центрально существенном кольце; см. 1.1.2, а. Кольцо R имеет *правое (соотв., левое) классическое кольцо частных* $Q_{cl}(R_r)$ (соотв., $Q_{cl}(R_l)$) в точности тогда, когда для любых таких двух элементов $a, b \in R$, что b — неделитель нуля, существуют такие элементы $c, d \in R$, что d — неделитель нуля и $bc = ad$ (соотв., $cb = da$). Если кольца $Q_{cl}(R_r)$ и $Q_{cl}(R_l)$ существуют, то они изоморфны друг другу над R. В этом случае говорят, что существует двустороннее кольцо частных $Q_{cl}(R)$.

Для кольца R и подмножества S в R обозначим через $\ell_R(S)$ *левый аннулятор* $\{r \in R \mid rS = 0\}$ множества S. Правый аннулятор $r_R(S)$ определяется аналогично. Для правого (соотв., левого) R-модуля M его вполне инвариантный подмодуль, образованный всеми элементами, аннуляторы которых являются существенными правыми (соотв., левыми) идеалами в R, называется *сингулярным подмодулем* для M и обозначается через $\operatorname{Sing} M$. При $M = R_R$ (соотв., $M = {}_R R$) идеал $\operatorname{Sing} M$ называется *правым* (соотв., *левым*) *сингулярным идеалом* кольца R.

Необходимая информация по теории колец содержится в [11, 31, 37, 38, 63, 69]. Информацию об абелевых группах см. в [25] и [36].

1. Полупервичные, локальные, совершенные и полуартиновы кольца

В главе 1 слово *кольцо* означает *ассоциативное кольцо*. По умолчанию предполагается, что кольцо обладает ненулевой единицей; случай не обязательно унитальных колец оговаривается особо.

1.1. Общие свойства.

1.1.1. Замечание. Если A — кольцо, в котором множество B всех левых делителей нуля является идеалом, то B — вполне первичный идеал.

Доказательство. Пусть $a, b \in A$ и $ab \in B$. Тогда существует такой элемент $x \in A \setminus \{0\}$, что $abx = 0$. Если $bx = 0$, то $b \in B$. В противном случае из соотношения $a(bx) = 0$ следует, что $a \in B$. □

1.1.2. Неделители нуля в ЦС кольцах. Пусть A — центрально существенное кольцо.

(a) Каждый левый (соотв., правый) неделитель нуля a кольца A — правый (соотв., левый) неделитель нуля кольца A.
(b) Кольцо A равномерно[1] слева в точности тогда, когда A равномерно справа.
(c) Если кольцо A равномерно справа и $B = \operatorname{Sing} A_A$, то B — множество всех (левых или правых) делителей нуля кольца A и B — вполне первичный идеал кольца A.
(d) Если кольцо A имеет собственный идеал B, содержащий все левые делители нуля кольца A, то факторкольцо A/B коммутативно.
(e) Если идеал B кольца A содержит все центральные делители нуля кольца A, то $\ell.\operatorname{Ann}_A(B) \subseteq Z(A)$.

Доказательство. (a) Рассмотрим только случай, где a — левый неделитель нуля. Можно считать, что a — центральный элемент кольца A. Допустим противное. Тогда $ba = 0$ для некоторого ненулевого элемента b кольца A. Так как $b \neq 0$, то существуют такие ненулевые центральные элементы x, y кольца A, что $bx = y \neq 0$. Тогда $ya = bxa = bax = 0$. Получено противоречие.

(b) Допустим, что кольцо A равномерно справа и a_1, a_2 — ненулевые элементы кольца A. Существуют такие ненулевые центральные элементы x_1, x_2, y_1, y_2 кольца A, что $a_1x_1 = y_1$, $a_2x_2 = y_2$. Тогда

$$Aa_1 \cap Aa_2 \supseteq Ax_1a_1 \cap Ax_2a_2 = a_1x_1A \cap a_2x_2A = y_1A \cap y_2A \neq 0.$$

(c) По определению правого сингулярного идеала все его элементы являются левыми делителями нуля. Наоборот, пусть a — левый или правый делитель нуля кольца A. Тогда $r(a) \neq 0$ в силу первого утверждения леммы; в равномерном справа кольце это означает, что $r(a)$ — существенный правый идеал, т. е. $a \in B$. Теперь используем замечание 1.1.1.

(d) Пусть $a, b \in A \setminus B$. Существуют такие ненулевые центральные элементы $x, y \in A$, что $bx = y$. Тогда $[a, b]x = [a, bx] = 0$, т. е. $[a, b]$ — левый делитель нуля. Поэтому $[a, b] \in B$.

(e) Пусть $r \in \ell.\operatorname{Ann}_A(B)$. Существуют такие ненулевые центральные элементы x, y кольца A, что $rx = y$. Ясно, что $x \notin B$, откуда x не является делителем нуля. Поэтому для каждого элемента $a \in A$ из соотношений $0 = [a, y] = [a, rx] = [a, r]x$ следует, что $[a, r] = 0$. □

1.1.3. Замкнутые правые идеалы. Пусть кольцо A центрально существенно и B — его правый идеал.

(a) Если правый идеал B не является существенным (это так, например, если B — собственный замкнутый правый идеал), то существует такой ненулевой центральный элемент y кольца A, что $B \cap yA = 0$ и, следовательно, $yB = By = 0$. В частности, все элементы правого идеала B являются делителями нуля.
(b) Существует центрально существенная конечномерная алгебра над полем, которая имеет замкнутый правый идеал, не являющийся идеалом.

[1] Модуль M называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение.

Доказательство. (a) Так как B не является существенным, то $B \cap dA = 0$ для некоторого ненулевого $d \in A$. Поскольку A центрально существенно, то $dx = y$ для некоторых ненулевых центральных элементов $x, y \in A$. Тогда $B \cap yA = 0$.

(b) См. пример 3.6.8. □

1.1.4. Центральные идемпотенты. Если не обязательно унитальное кольцо A центрально существенно, то каждый идемпотент $e \in A$ лежит в центре $Z(A)$.

Доказательство. Можно считать, что A не коммутативно. Пусть $a \in A$. Надо доказать, что $ae = ea = eae$. Сначала мы докажем соотношение $e(a-ae) = 0$. Допустим противное, $e(a-ae) \neq 0$. Так как кольцо A центрально существенно, то найдутся такие $x, y \in Z(A)$, что

$$xe(a - ae) = y = ey = ye \neq 0.$$

Тогда

$$0 \neq y = ye = xe(a - ae)e = x(eae - eae) = 0.$$

Получено противоречие. Поэтому $e(a - ae) = 0$. Аналогично имеем $(a - ea)e = 0$. Поэтому идемпотент e централен. □

1.1.5. (см. [43]). Пусть кольцо A центрально существенное (не обязательно унитально), $e = e^2 \in A$, $a, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in A$ и

$$\begin{cases} x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = e, \\ x_1aey_1 + \ldots + x_naey_n = 0. \end{cases}.$$

Тогда $ae = 0$.

Доказательство. Допустим, что $ae \neq 0$. Если элемент ae централен, то

$$ae = ae^2 = ae(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n) = x_1aey_1 + \ldots + x_naey_n = 0,$$

и получаем противоречие.

Теперь допустим, что элемент ae не централен. Так как кольцо A центрально существенно и $ae \neq 0$, то существуют такие ненулевые центральные элементы $x, y \in A$, что $xae = y$. Заметим, что $y = ye$. Поэтому

$$0 \neq y = ye = y(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n) = x(x_1yey_1 + \ldots + x_naey_n) = 0,$$

и получаем противоречие. Поэтому $ae = 0$. □

1.1.6. Максимальные правые идеалы. Если A — центрально существенное кольцо с $1 \neq 0$ и M — максимальный правый идеал кольца A, то либо M — идеал, либо существует ненулевой центральный элемент

$$x \in \left(\bigcap_{n \geqslant 1} M^n \right).$$

Доказательство. Допустим противное. Тогда существуют такие ненулевые элементы $m \in M$ и $a \in A$, что $am \notin M$. Так как M — максимальный правый идеал, то существуют такие элементы $b \in A$ и $m' \in M$, что $1 = amb + m'$. Поскольку кольцо A центрально существенно, то существуют такие ненулевые центральные элементы $x, y \in A$, что $ax = y$. Тогда

$$x = (amb + m')x = (ax)mb + m'x = mby + m'x \in M,$$

причем $(ax)mb \in M^2$ и $m'x \in M^2$. Поэтому $x = (ax)mb + m'x \in M^2$, причем $(ax)mb, m'x \in M^3$. Тогда $x \in M^3$. Повторяя аналогичные рассуждения, получаем, что

$$0 \neq x \in \left(\bigcap_{n \geqslant 1} M^n \right).$$

□

1.1.7. Предложение. *Пусть R — кольцо и A — такое подкольцо в R, что существует базис модуля R_A, содержащийся в $Z(R)$. Если кольцо A центрально существенно, то кольцо R также центрально существенно.*

Доказательство. Пусть B — базис модуля R_A и $B \subseteq Z(R)$. Каждый элемент $r \in R \setminus \{0\}$ имеет единственное разложение вида

$$r = \sum_{i=1}^{n} b_i s_i, \quad \text{где} \quad b_1 \dots b_n \in B \quad \text{и} \quad s_1 \dots s_n \in R \setminus \{0\}. \tag{1.1.7.1}$$

Определим функцию $k\colon R \to \mathbb{Z}$, приравнивая $k(r)$ числу коэффициентов s_i в приведенном выше разложении (1.1.7.1), принадлежащих $Z(A)$ при $r \neq 0$ и $k(0) = 0$. Ясно, что $r \in Z(A)$ в точности тогда, когда $k(r) = 0$. Теперь пусть $x \in R \setminus \{0\}$. Во множестве $xZ(A) \setminus \{0\}$ возьмем такой элемент r, что целое число $k(r)$ минимально. Покажем, что $k(r) = 0$. Допустим противное. Тогда можно считать, что $s_1 \in Z(A)$ в (1.1.7.1). Так как кольцо A центрально существенно, то существуют такие ненулевые центральные элементы $x, y \in Z(A)$, что $xs_1 = y$. Тогда $xr \in xZ(A)$, $xr \neq 0$ и $k(xr) < k(r)$; это противоречит выбору элемента r. Получаем, что $0 \neq r \in xZ(A) \cap Z(R) \subseteq xZ(R) \cap Z(R)$. □

1.1.8. Предложение. *Пусть F — поле и R — центрально существенная F-алгебра. Тогда для любой коммутативной F-алгебры A алгебра $A \otimes_F R$ центрально существенна.*

Доказательство. Если B — F-базис коммутативной алгебры A, то $\{b \otimes 1 \mid b \in B\}$ — базис свободного модуля $(A \otimes R)_R$, удовлетворяющий условиям предложения 1.1.7. □

1.1.9. Замечание. Если A — центрально существенное кольцо с центром $C = Z(A)$, то каждый его правый идеал B является существенным расширением идеала

$$M = \bigoplus_{i \in I} c_i A, \quad c_i \in C,$$

порожденного центральными элементами.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ — непустое множество всех идеалов кольца A, лежащих в B и являющихся прямой суммой главных идеалов, порожденных центральным элементом. Зададим на $\mathcal{M}$ частичный порядок так, что $M_1 \leqslant M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1 \oplus X$, $X \in \mathcal{M}$. По лемме Цорна $\mathcal{M}$ содержит максимальный элемент M. Допустим, что B_A не является существенным расширением M_A. Тогда существует такой ненулевой элемент $b \in B$, что $M \cap bA = 0$. Так как A — цс кольцо, то $bc = d$ для некоторых ненулевых центральных элементов $c, d \in A$. Тогда $M \cap dA = 0$ и $M \oplus dA$ — элемент множества $\mathcal{M}$, который строго больше максимального элемента M. Получено противоречие. □

1.1.10. Замечание. Непосредственно проверяется, что любое фильтрованное произведение центрально существенных колец — центрально существенное кольцо. В частности, ультрастепень центрально существенного кольца — центрально существенное кольцо.

1.1.11. Открытый вопрос. Верно ли, что любое тензорное произведение центрально существенных алгебр центрально существенно?

1.2. Полупервичные и несингулярные кольца. Напомним, что кольцо A называется *полупервичным*, если A не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. Кольцо A с ненулевой 1 *несингулярно справа*, если правый идеал $r_A(a)$ любого ненулевого $a \in A$ не является существенным.

1.2.1. Лемма. *Пусть A — центрально существенное кольцо с центром $C = Z(A)$ и a — ненулевой элемент кольца A. Если $a^n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, то существует такой ненулевой центральный элемент y кольца A, что $y \in (aC) \cap (Ca)$, $(AyA)^n = 0$ и $(yC)^n = 0$. Следовательно, если хотя бы одно из колец A, C полупервично, то A не имеет ненулевых нильпотентных элементов.*

Доказательство. Так как $a \neq 0$ и кольцо A центрально существенно, то $ax = xa = y$ для некоторых ненулевых центральных элементов x и y кольца A. Тогда

$$(AyA)^n = y^n A^n = (ax)^n A^n = a^n x^n A^n = 0.$$

□

1.2.2. Теорема (см. [47, Theorem 1.3(a)]). *Пусть A — центрально существенное кольцо. Если хотя бы одно из колец A и $Z(A)$ полупервично, то A — коммутативное кольцо без ненулевых нильпотентных элементов.*

Доказательство. По лемме 1.2.1 кольцо A не имеет ненулевых нильпотентных элементов. Допустим, что кольцо A не коммутативно. Тогда $ab - ba \neq 0$ для некоторых $a, b \in A$. Пусть $C = Z(A)$ — центр кольца A и $E = \{c \in C \mid ac \in C\}$. Имеем, что E — идеал кольца C. Возьмем любой элемент $d \in C$ с условием $dE = 0$. Если $xd \neq 0$, то $xdz \in C \setminus \{0\}$ для некоторого $z \in C$. Поэтому $dz \in E$, откуда $d(dz) = 0$ и $(dz)^2 = 0$. Таким образом, $dz = 0$ и $xdz = 0$; получено противоречие. Поэтому $xd = 0$, откуда $d \in E$. Поэтому $d^2 = 0$ и $d = 0$. Тогда получаем, что $\mathrm{Ann}_C(E) = 0$. Для любого $i \in E$ имеем $xi = ix \in C$, откуда

$$[x, y]i = (xy - yx)i = x(yi) - y(xi) = xiy - xiy = 0$$

и $[x, y]E = 0$. Но $c_1[x, y] = c_2$ для некоторых $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$, откуда $c_2 E = 0$ и поэтому $\mathrm{Ann}_C(E) \neq 0$; получено противоречие. Поэтому кольцо A коммутативно. □

1.2.3. Замечание. В связи с теоремой 1.2.2 заметим, что кольцо A с полупервичным центром $Z(A)$ не обязательно коммутативно. Соответствующий пример — это кольцо A всех 2×2 матриц над $\mathbb{R}$; центр кольца A состоит из скалярных матриц.

1.2.4. Следствие. *Если кольцо A центрально существенно и несингулярно справа, то A коммутативно и без ненулевых нильпотентных элементов.*

Доказательство. В силу теоремы 1.2.2 достаточно доказать, что A — кольцо без ненулевых нильпотентных элементов. Допустим противное. Существует такой ненулевой элемент a кольца A, что $a^2 = 0$. Так как A центрально существенно, то существуют такие ненулевые центральные элементы $x, y \in A$, что $ax = y$. Из леммы Цорна следует существование такого правого идеала B кольца A, что $B \cap yA = 0$ и правый идеал $B \oplus yA$ является существенным. Так как $yB = By \subseteq B \cap yA = 0$ и $y^2 = a^2 x^2 = 0$, имеем $y(B \oplus yA) = 0$. Так как правый идеал $B \oplus yA$ является существенным, $y = 0$; получено противоречие. □

В связи с теоремой 1.2.2 мы докажем следующее предложение.

1.2.5. Предложение (см. [43]). *Если A — не обязательно унитальное центрально существенное кольцо и его центр является полупервичным кольцом, то кольцо A коммутативно.*

Доказательство. Допустим, что кольцо A не коммутативно, т. е. существуют такие элементы $a, b \in A$, что $ab - ba \neq 0$. Так как кольцо A центрально существенно, то существуют такие ненулевые центральные элементы x и y, что $(ab - ba)x = y$. Заметим, что $ay \neq 0$; в противном случае

$$y^2 = (ab - ba)xy = ((ay)b - b(ay))x = 0,$$

что невозможно, так как $y \neq 0$.

Если $ay \notin Z(A)$, то существуют такие ненулевые центральные элементы $z, t \in A$, что $ayz = t$. Рассмотрим множество $W = \{w \in Z(A) \mid aw \in Z(A)\}$. Ясно, что $yz \in W$. Теперь допустим, что $yW = 0$. Тогда $y(yz) = 0$, $(yz)^2 = 0$ и $yz = 0$; получено противоречие. Поэтому $yw \neq 0$ для некоторого $w \in W$. Однако

$$yw = (ab - ba)yw = ((wa)b - b(wa))x = 0,$$

и также получено противоречие.

Таким образом, имеем $0 \neq ay \in Z(A)$.

Допустим, что $at \in Z(A)$. Тогда $ayb \neq 0$; в противном случае

$$y^2 = (ayb - bay)x = -bayx = aybx = 0.$$

Кроме того, $(ab)y = (ba)y$. Поэтому $(ab - ba)y = 0$. Однако $y^2 = (ab - ba)xy = 0$; получено противоречие. Таким образом, кольцо R коммутативно. □

1.2.6. Замечание. Если A — кольцо и факторкольцо $A/J(A)$ центрально существенно, то все максимальные правые идеалы кольца A являются идеалами.

Доказательство. Так как $A/J(A)$ — центрально существенное полупервичное кольцо, то по теореме 1.2.2 кольцо $A/J(A)$ коммутативно. В частности, все максимальные правые идеалы кольца $A/J(A)$ являются идеалами. Тогда все максимальные правые идеалы кольца A являются идеалами. □

1.3. Локальные и полусовершенные кольца. Пусть A кольцо с радикалом Джекобсона $J(A)$. Кольцо A называется *локальным*, если факторкольцо $A/J(A)$ — тело. Кольцо A называется *полусовершенным*, если факторкольцо $A/J(A)$ изоморфно конечному прямому произведению колец матриц над телами и каждый идемпотент факторкольца $A/J(A)$ является образом идемпотента $e \in A$ при естественном эпиморфизме $A \to A/J(A)$.

1.3.1. Замечание. Ясно, что любое конечное прямое произведение локальных колец является полусовершенным кольцом. Кроме того, все идемпотенты любого центрально существенного кольца центральны в силу 1.1.4. Отсюда следует, что центрально существенные полусовершенные кольца совпадают с конечными прямыми произведениями центрально существенных локальных колец, и их изучение сводится к изучению центрально существенных локальных колец.

1.3.2. Теорема. *Пусть A — центрально существенное локальное кольцо с радикалом Джекобсона $J(A)$. Тогда факторкольцо $A/J(A)$ является полем (в частности, коммутативно) и $M \cap Z(A) \neq 0$ для каждого минимального правого идеала M.*

Доказательство. Пусть $a, b \in A$ и $ab - ba \notin J(A)$. Элемент $ab - ba$ обратим, так как A локально. Так как $a \neq 0$ и A центрально существенно, то $ax = y$ для некоторых ненулевых $x, y \in Z(A)$. Тогда

$$x = x(ab - ba)(ab - ba)^{-1} = (yb - by)(ab - ba)^{-1} = 0;$$

получено противоречие. Поэтому $ab - ba \in J(A)$ и кольцо $A/J(A)$ коммутативно.

Теперь допустим, что $M \cap Z(A) = 0$ для некоторого минимального правого идеала M кольца A. Пусть m — ненулевой элемент из M. По предположению существуют такие ненулевые центральные элементы x и y кольца A, что $mx = y$. Так как $x \notin J(A)$ (в противном случае $mx = 0$), то элемент x обратим в A и $m = x^{-1}y \in Z(A)$; получено противоречие. □

1.3.3. Теорема. *Пусть A — центрально существенное полусовершенное кольцо с центром $C = Z(A)$. Тогда $A/J(A)$ — конечное прямое произведение полей. В частности, кольцо $A/J(A)$ коммутативно. Кроме того, A — конечное прямое произведение центрально существенных локальных колец и $\mathrm{Soc}(A_C) \subseteq C$.*

Доказательство. По определению полусовершенного кольца $A/J(A)$ — прямая сумма простых артиновых колец, каждое из которых изоморфно кольцу матриц над телом. Пусть $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ — полная система неразложимых ортогональных идемпотентов кольца $\bar{A} = A/J(A)$. Тогда существует такая полная система неразложимых ортогональных идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$ в A, что $e_i + J(A) = \bar{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$. В силу 1.1.4 все идемпотенты $e_1, \ldots, e_n$ центральны. Поэтому

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i e_i$$

— разложение кольца A в прямую сумму локальных центрально существенных колец. Следовательно, все кольца $A_i/J(A_i)$ коммутативны в силу теоремы 1.3.2. Непосредственно проверяется,

что все кольца $A_i = Ae_i$ центрально существенны; поэтому тело $A_i/J(A_i)$ коммутативно. Тогда кольцо

$$R/J(R) = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i/J(R_i)$$

тоже коммутативно.

Из изложенного выше следует, что без ограничения общности можно считать кольцо A локальным. Заметим, что $J(C) = C \cap J(A)$ и C — локальное кольцо.

Теперь пусть s — ненулевой элемент из $\operatorname{Soc}(R_C)$. Существуют такие ненулевые центральные элементы x, y, что $sx = y$. Ясно, что $x \notin J(R)$, так как $J(C)\operatorname{Soc} A_C = 0$. Следовательно, x — обратимый элемент и $s = x^{-1}y \in C$. □

1.3.4. Замечание. Из изложенного выше следует, что если A — центрально существенное полусовершенное кольцо, то $\operatorname{Soc}_A A = \operatorname{Soc} A_A$.

1.4. Совершенные и полуартиновы кольца. Пусть A — кольцо с радикалом Джекобсона $J(A)$.

Кольцо A называется *совершенным слева*, если A полусовершенно и радикал $J(R)$ T-*нильпотентен слева*, т. е. для любой последовательности $x_1, x_2, \ldots$ элементов из $J(A)$ существует такой индекс n, что $x_1x_2 \ldots x_n = 0$. Совершенные справа кольца определяются аналогично.

Кольцо A называется *полулокальным*, если факторкольцо $A/J(A)$ изоморфно конечному прямому произведению колец матриц над телами.

Модуль M называется *полуартиновым*, если либо $M = 0$, либо каждый ненулевой фактормодуль модуля M — существенное расширение полупростого модуля.

1.4.1. Теорема. *Пусть A — совершенное справа или слева кольцо с центром $C = Z(A)$.*

(a) *Кольцо A центрально существенно в точности тогда, когда $\operatorname{Soc} A_C \subseteq C$ и все идемпотенты кольца A центральны.*

(b) *Если все идемпотенты кольца A центральны, факторкольцо $A/J(A)$ коммутативно, $\operatorname{Soc} A_C = \operatorname{Soc} A_A$ и $M \cap C \neq 0$ для каждого минимального правого идеала M, то кольцо A центрально существенно.*

Доказательство. (a) Если A центрально существенно, то $\operatorname{Soc} A_C \subseteq C$ и все идемпотенты кольца A центральны в силу 1.1.4 и теоремы 1.3.3.

Наоборот, пусть $\operatorname{Soc} A_C \subseteq C$ и все идемпотенты кольца A центральны. Так как все идемпотенты центральны, то можно считать, что A — локальное кольцо. Тогда $J(C) = C \cap J(A)$ и $C/J(C)$ — поле.

Пусть x — ненулевой элемент кольца A. Если $J(C)x = 0$, то $x \in \operatorname{Soc} A_C$; поэтому $x \in C$. В противном случае существует такой элемент $c_1 \in J(C)$, что $c_1x \neq 0$. Если $J(C)c_1x = 0$, то $c_1x \in \operatorname{Soc} A_C$ и $c_1x \in C$; в противном случае возьмем такой элемент $c_2 \in J(C)$, что $c_2c_1x \neq 0$, и так далее. Так как радикал $J(A)$ совершенного справа или слева кольца A является T-нильпотентным справа или слева и элементы c_i центральны, этот процесс остановится на некотором конечном шаге.

(b) В силу (a) достаточно доказать соотношение $\operatorname{Soc} A_C \subseteq C$, эквивалентное тому, что $M \subseteq C$ для любого минимального правого идеала M. По предположению $M \cap C \neq 0$ и по предположению кольцо $A/J(A)$ коммутативно; поэтому имеем $ab - ba \in J(A)$ для всех $a, b \in A$. Для каждого $m \in M \cap C$ имеем $m(ab - ba) = 0$. С другой стороны, так как $m \in C$, то

$$(ma)b = mba = b(ma), \quad ma \in C.$$

Кроме того, $ma \in M$. Следовательно, $M \cap C$ — ненулевой правый идеал кольца A. Так как M — минимальный правый идеал, $M \cap C = M$ и $M \subset C$. Поэтому $\operatorname{Soc} A_C = \operatorname{Soc} A_A \subseteq C$. □

1.4.2. Замечание. В теореме 1.4.1 нельзя опустить условие, что R совершенно справа или слева, так как каждая некоммутативная локальная область (например, кольцо формальных степенных рядов от одной переменной над телом гамильтоновых кватернионов) удовлетворяет всем оставшимся условиям этой теоремы, но это кольцо не центрально существенно.

1.4.3. Лемма. *Пусть A — полупервичное кольцо и $S = \operatorname{Soc} A_A$ — правый цоколь. Если S — существенный правый идеал кольца A и $st = ts$ для всех $s, t \in S$, то кольцо A коммутативно.*

Доказательство. Докажем следующее свойство 1.4.3.1 нашего кольца A:

$$\begin{array}{l}\text{если } e = e^2 \in A \text{ и } eA \text{ — минимальный правый идеал,}\\ \text{то идемпотент } e \text{ централен.}\end{array} \tag{1.4.3.1}$$

Действительно, пусть $a \in A$. Так как S — идеал, то $ae \in S$. По условию

$$eae = e \cdot ae = ae \cdot e = ae.$$

Аналогично, $ea = eae = ae$ и идемпотент e централен.

Докажем, что $ab - ba = 0$ для любых элементов $a, b \in A$. Допустим, что $ab - ba \neq 0$. Хорошо известно, что каждый минимальный правый идеал полупервичного кольца порождается идемпотентом; см., например, [38, Sec. 3.4]. Так как S — существенный правый идеал и порождается в силу сказанного выше идемпотентами, то $S \cap (ab - ba)A \neq 0$ и $e(ab - ba) \neq 0$ для некоторого идемпотента $e \in A$. Тогда $eab \neq eba$ и $(ea)(eb) = (eb)(ea)$ по условию.

В силу свойства 1.4.3.1 идемпотент e централен. Тогда

$$eab = eeab = eaeb = ebea = eba;$$

получено противоречие. Поэтому A коммутативно. □

1.4.4. Лемма. *Пусть A — центрально существенное кольцо и пусть P — такой полупервичный ниль-идеал кольца A, что правый цоколь S/R кольца A/P — существенный правый идеал кольца A/P. Тогда кольцо A/P коммутативно.*

Доказательство. Мы используем следующие хорошо известные факты (см., например, [38, Secs. 3.4, 3.6]):

(a) В любом полупервичном кольце R множество всех минимальных правых идеалов совпадает с множеством всех минимальных левых идеалов и это множество совпадает с множеством всех таких правых идеалов eR, что $e = e^2$ и eRe — тело; кроме того, $\operatorname{Soc} R_R = \operatorname{Soc}_R R$.

(b) Если R — кольцо и P — ниль-идеал кольца R, то каждый идемпотент $\overline{e}$ кольца R/P имеет вид $e + P$, где $e = e^2 \in R$.

Пусть $h\colon A \to A/P$ — естественный эпиморфизм. Для каждого подмножества X в A будем писать $\overline{X}$ вместо $h(X)$. В силу (a) существует такой идеал S кольца A, что $P \subset S$ и $\overline{S} = \operatorname{Soc}_{\overline{A}} \overline{A} = \operatorname{Soc} \overline{A}_{\overline{A}}$.

Сначала покажем, что идеал $\overline{S}$ коммутативен. В силу (a) и (b) любой минимальный левый идеал V кольца $\overline{A}$ порождается некоторым примитивным идемпотентом $\overline{e}$, который имеет вид $\overline{e} = e + P$ для некоторого примитивного идемпотента e кольца A. По 1.1.4 идемпотент e централен. Поэтому V — идеал в $\overline{A}$, eA и $(1-e)A$ — идеалы в A и $A = eA \oplus (1-e)A$. Поэтому кольцо eA центрально существенно. Кроме того, $\overline{e}\overline{A}\overline{e} = \overline{e}\overline{A} = V$ и $V = (eA + P)/P \cong eA/(P \cap eA)$. Поэтому $J(eA) \subseteq P \cap eA$. Но P — ниль-идеал, откуда $P \cap eA \subseteq J(eA)$ и $P \cap eA = J(eA)$. По теореме 1.3.2 кольцо V коммутативно. Поэтому $\operatorname{Soc}(\overline{A})$ — коммутативное кольцо, как прямая сумма коммутативных колец. Кроме того, $\operatorname{Soc}(\overline{A})$ — существенный правый идеал полупервичного кольца $\overline{A}$. Тогда $\overline{A}$ коммутативно по лемме 1.4.3. □

1.4.5. Теорема. *Если A — центрально существенное, полуартиново слева или справа кольцо, то $A/J(A)$ — коммутативное регулярное (по фон Нейману) кольцо.*

Доказательство. Пусть A — центрально существенное полуартиново справа или слева кольцо и $\overline{A} = A/J(A)$. Так как A — полуартиново справа или слева кольцо, то $J(A)$ — ниль-идеал в силу [54, Proposition 3.2]. По лемме 1.4.4 кольцо $A/J(A)$ коммутативно. Каждое коммутативное полуартиново полупримитивное кольцо регулярно по фон Нейману в силу [54, Theorem 3.1]. □

2. Градуированные кольца и внешние алгебры

Результаты подразделов 2.1 и 2.2 основываются на [4].

2.1. Градуированные кольца.

2.1.1. Градуированность и однородные элементы. Пусть $(S,+)$ — полугруппа. Кольцо A называется *S-градуированным*, если A — прямая сумма аддитивных подгрупп A_s, $s\in S$, и $A_sA_t\subseteq A_{s+t}$ для любых элементов $s,t\in S$.

Для любого $s\in S$ элементы подгруппы A_s называются *однородными* элементами степени s.

Если $S=\mathbb{N}\cup\{0\}$, то S-градуированные кольца называются *градуированными* кольцами. Непосредственно проверяется, что единица градуированного кольца содержится в подгруппе A_0. На произвольном градуированном кольце

$$A=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}A_n$$

можно определить $\mathbb{Z}_2$-градуировку:

$$A=A_{(0)}\oplus A_{(1)},\quad \text{где}\quad A_{(i)}=\bigoplus_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}A_{2k+i},\quad i\in\{0,1\}.$$

2.1.2. Обобщенно антикоммутативные и однородно точные кольца. Говорят, что градуированное кольцо

$$A=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}A_n$$

обобщенно антикоммутативно, если для любых целых чисел $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и произвольных элементов $x\in A_m$ и $y\in A_n$ выполняется соотношение $yx=(-1)^{mn}xy$.

Если градуированное кольцо

$$A=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}A_n$$

удовлетворяет условию

$$\forall m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\quad A_{m+n}\neq 0\Rightarrow A_m\neq 0\ \&\ \forall x\in A_m\setminus\{0\},\quad xA_n\neq 0, \tag{2.1.2.1}$$

то будем говорить, что R — *однородно точное* кольцо.

2.1.3. Центр градуированного кольца. В любом градуированном кольце

$$A=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}A_n$$

выполняется соотношение:

$$Z(A)=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}(A_n\cap Z(A)).$$

Замечание. Если S — коммутативная полугруппа с сокращениями, то приведенное ниже доказательство остается верным для каждого S-градуированного кольца.

Доказательство. Включение

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}(A_n\cap Z(A))\subseteq Z(A)$$

очевидно.

Пусть $x=x_0+x_1+\dots x_n\in Z(A)$, где $x_i\in A_i$, $i=0,1,\dots,n$. Если $y\in A_m$ для некоторого $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, то $0=[x,y]=[x_0,y]+\dots+[x_n,y]$ и слагаемые последней суммы содержатся в различных прямых слагаемых $A_m,A_{m+1},\dots,A_{m+n}$. Поэтому $[x_i,y]=0$ для любого однородного элемента y и всех $i=0,1,\dots,n$. Тогда $x_i\in Z(A)$, так как любой элемент кольца является суммой однородных элементов. □

2.1.4. Пусть

$$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} A_n$$

— градуированное обобщенно антикоммутативное однородно точное кольцо, которое не имеет аддитивно 2-периодических элементов. Если существует такое нечетное положительное целое число n, что $A_n \neq 0$ и $A_{n+1} = 0$, то $Z(A) = A_{(0)} + A_n$. В противном случае $Z(A) = A_{(0)}$.

Доказательство. Из соотношения обобщенной антикоммутативности следует, что $A_{(0)} \subseteq Z(A)$. Следующее свойство следует из (2.1.2.1): если такое целое число n существует, то $A_m = 0$ для $m > n$ и $A_m \neq 0$ для $0 \leqslant m \leqslant n$, кроме того, если $x \in A_n$ и $y = y_0 + z \in A$, где $y_0 \in A_0$ и $z \in \bigoplus_{m>0} A_m$, то $[x, y] = [x, y_0] = 0$, т. е. $A_n \subseteq Z(A)$. Наоборот, пусть $x \in Z(A)$. В силу 2.1.3 можно считать, что x — однородный элемент нечетной степени i. Пусть $x \neq 0$ и $A_{i+1} \neq 0$. Тогда из (2.1.2.1) следует, что существует такой элемент $y \in A_1$, что $xy \neq 0$. Получаем, что $0 = [x, y] = 2xy$; получено противоречие. Таким образом, либо $x = 0$, либо $x \neq 0$, но $A_{i+1} = 0$, т. е. $i = n$. □

2.1.5. Теорема. *Пусть*

$$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} A_n$$

— градуированное обобщенно антикоммутативное однородно точное кольцо без аддитивно 2*-периодических элементов. Кольцо A центрально существенно в точности тогда, когда либо $A = A_0$, либо существует такое нечетное положительное целое число n, что $A_n \neq 0$ и $A_{n+1} = 0$.*

Доказательство. Пусть A — центрально существенное кольцо, $C = Z(A)$ и $A \neq A_0$. В силу (2.1.2.1) имеем $A_1 \neq 0$. Возьмем элемент $x \in A_1 \setminus \{0\}$ и допустим, что такое целое число n не существует. В силу 2.1.3 имеем $C = A_{(0)}$ и $xC \subseteq A_{(1)}$, откуда $xC \cap C \subseteq A_{(1)} \cap A_{(0)} = 0$; получено противоречие.

Наоборот, если $A = A_0$, то $C = A$, так как кольцо A_0 коммутативно. Допустим, что существует такое нечетное положительное целое число n, что $A_n \neq 0$ и $A_{n+1} = 0$. Пусть $0 \neq x \in A \setminus C$. Имеем $x = x_0 + \ldots + x_n$, где $x_i \in A_i$, и возьмем такое наименьшее нечетное положительное целое число m, что $x_m \neq 0$. Ясно, что $1 \leqslant m \leqslant n$. Положим $k = n - m$ и возьмем такой элемент $y \in A_k$, что $x_m y \neq 0$. Ясно, что $y \in C$. Кроме того, xy является суммой однородных элементов четной степени и элемента $x_m y$ нечетной степени n. Поэтому $xy \in C$ в силу 2.1.3 и $xy \neq 0$. □

2.2. Внешние алгебры над полями.

2.2.1. Пусть F — поле характеристики 0 или $p \neq 2$, $V = F^n$ — векторное пространство над F размерности $n > 0$, и пусть $\Lambda(V)$ — внешняя алгебра пространства V [11, § III.5], которая определяется как унитальная F-алгебра относительно операции умножения $\wedge$ с образующими $e_1, \ldots, e_n$ и определяющими соотношения $e_i \wedge e_j + e_j \wedge e_i = 0$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Алгебра $\Lambda(V)$ имеет естественную градуировку:

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \Lambda^p(V),$$

где $\Lambda^p(V)$ для $1 \leqslant p \leqslant n$, — векторное пространство с базисом

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} : 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n\},$$

$\Lambda^0(V) = F$ и $\Lambda^p(V) = 0$ для $p > n$.

Хорошо известно, что внешние алгебры являются обобщенно антикоммутативными.

2.2.2. Градуированная алгебра $R = \Lambda(V)$ является однородно точным кольцом.

Доказательство. Пусть $p, q \in \{0, \ldots, n\}$ и $p + q \leqslant n$. Если $pq = 0$, то условие (2.1.2.1) выполняется. Теперь пусть $0 < p < n$ и $0 \neq x \in R_p$. Возьмем базисный элемент $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$, который имеет ненулевой коэффициент в представлении x. Так как $p + q \leqslant n$, то существуют такие индексы $j_1, \ldots, j_q \in \{1, \ldots, n\}$, что $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant n$ и $\{i_1, \ldots, i_p\} \cap \{j_1, \ldots, j_q\} = \varnothing$. Положим $y = e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_q}$ и заметим, что базисный элемент $\pm e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \wedge e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_q}$ пространства $\Lambda^{p+q}(V)$ имеет ненулевой коэффициент в представлении элемента xy, так как произведения оставшихся базисных элементов пространства $\Lambda^p(V)$ на элемент y либо равны 0, либо равны $\pm$другим базисным элементам пространства $\Lambda^{p+q}(V)$. □

2.2.3. Теорема. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем F характеристики 0 или $p \neq 2$. Внешняя алгебра $\Lambda(V)$ пространства V является центрально существенным кольцом в точности тогда, когда V имеет нечетную размерность.*

Теорема 2.2.3 следует из 2.2.2 и 2.1.4.

2.2.4. Если F — конечное поле нечетной характеристики и $\dim V$ — нечетное положительное целое число, превышающее 1, то $\Lambda(V)$ — центрально существенное некоммутативное конечное кольцо. Итак, если F — конечное поле порядка 3 и $\Lambda(V)$ — 8-мерная F-алгебра с базисом

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\},$$

то $\Lambda(V)$ — центрально существенное некоммутативное конечное кольцо порядка 3^8.

2.2.5. Пример. Если R — центрально существенное кольцо и B — собственный идеал кольца R, порожденный некоторым бесконечным множеством центральных идемпотентов и факторкольцо R/B не имеет нетривиальных идемпотентов, то кольцо R/B не обязательно центрально существенно.

Доказательство. Пусть F — поле из трех элементов, $A = \Lambda(F^3)$ — внешняя алгебра трехмерного векторного F-пространства F^3 и пусть $S = \Lambda(F^2)$ — внешняя алгебра двумерного векторного F-пространства F^2, рассматриваемого как подалгебра алгебры A. Рассмотрим прямое произведение $P = A^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, \ldots) \mid a_i \in A\}$ счетного множества копий кольца A и его подкольцо R, состоящее из всех финально постоянных последовательностей $(a_1, a_2, \ldots) \in P$, которые стабилизируются на элементах алгебры S на конечном шаге, зависящем от последовательности.

Пусть e_i — центральный идемпотент, который имеет единицу поля F на i-й позиции и нули на оставшихся позициях. Обозначим через B идеал кольца R, порожденный всеми идемпотентами $\{e_i\}$. Из теоремы 2.2.3 следует, что R — центрально существенное кольцо и факторкольцо R/B изоморфно кольцу S, которое не центрально существенно и не имеет нетривиальных идемпотентов. □

2.3. Внешние алгебры над кольцами. Результаты данного подраздела основываются на статье [47].

2.3.1. Пусть A — не обязательно коммутативное кольцо с центром $C = Z(A)$ и A^n — конечно порожденный свободный модуль ранга n. Определим алгебру $\Lambda(A^n)$ модуля A^n. А именно $\Lambda(A^n) = A \otimes_C \Lambda(C^n)$, где $\Lambda(C^n)$ — внешняя алгебра свободного модуля C^n над коммутативным кольцом C; см. [11, § III.5].

Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис модуля C^n. Отождествим $1 \otimes x$ с x для всех $x \in \Lambda(C^n)$ и получим, что множество

$$B_n = \{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s} \mid 0 \leqslant s \leqslant n,\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n\}$$

— базис A-модуля $\Lambda(A^n)$ (считаем, что произведение равно 1 для $s = 0$). Ясно, что кольцо $R = \Lambda(A^n)$ имеет естественную градуировку $R = \bigoplus_{s \geqslant 0} R_s$, где $R_0 = A$,

$$R_s = \bigoplus_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n} A e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}$$

для $1 \leqslant s \leqslant n$, и $R_s = 0$ для $s > n$.

2.3.2. Теорема. *Для положительного целого числа n и кольца A с центром $C = Z(A)$ кольцо $\Lambda(A^n)$ центрально существенно в точности тогда, когда A центрально существенно и выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

(a) *n — нечетное целое число.*

(b) *Идеал $\mathrm{Ann}_A(2)$ — существенный подмодуль модуля A_C.*

Доказательство. Положим $R = \Lambda(A^n)$. Пусть R центрально существенно.

Пусть $a \in A \setminus \{0\}$ и $a' = ae_1 \wedge \ldots \wedge e_n$. Тогда $0 \neq a' \in R$. Поэтому существует такой элемент $c \in Z(R)$, что $0 \neq ca' \in Z(R)$. Имеем $c = c_0 + c'$, где $c_0 \in A$, и $c' \in \bigoplus_{s>0} R_s$. Непосредственно проверяется, что $c_0 \in Z(A) = Z(R) \cap R_0$. Также ясно, что $ca' = c_0a' = c_0ae_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, откуда $c_0a \neq 0$. Для каждого $b \in A$, имеем

$$0 = [b, c_0ae_1 \wedge \ldots \wedge e_n] = [b, c_0a]e_1 \wedge \ldots \wedge e_n,$$

откуда $c_0a \in Z(A)$, т. е. A — центрально существенное кольцо.

Допустим, что идеал $\mathrm{Ann}_A(2)$ не является существенным подмодулем модуля A_C и n — четное целое число.

Возьмем такой элемент $a \in A$, что $a \neq 0$ и $Ca \cap \mathrm{Ann}_A(2) = 0$. Рассмотрим элемент $x = ae_2 \wedge \ldots \wedge e_n$.

Пусть $c \in Z(R)$ и $0 \neq cx \in Z(R)$. Имеем $c = c_0 + c_1e_1 + c'$, где c' — линейная комбинация элементов базиса B_n, которые равны 1 и e_1. Ясно, что $c_0, c_1 \in C$ и $cx = c_0ae_2 \wedge \ldots \wedge e_n + c_1ae_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, где оба слагаемых содержатся в центре кольца R.

Докажем, что $c_0a = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} 0 &= [e_1, c_0ae_2 \wedge \ldots \wedge e_n] = \\ &= c_0ae_1 \wedge \ldots \wedge e_n - c_0ae_2 \wedge \ldots \wedge e_n \wedge e_1 = \\ &= c_0a(1 - (-1)^{n-1})e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = 2c_0ae_1 \wedge \ldots \wedge e_n, \end{aligned}$$

откуда $c_0a \in \mathrm{Ann}_A(2) \cap Ca = 0$ в силу выбора a. Тогда $c_1a \neq 0$ и $c_1e_1 \in Z(R)$. Но $c_1 \in C$, $0 = [c_1e_1, e_2] = 2c_1e_1 \wedge e_2$. Тогда $c_1a \in Ca \cap \mathrm{Ann}_A(2) = 0$. Получено противоречие.

Теперь допустим, что A центрально существенно и выполняется хотя бы одно из указанных выше условий (a) или (b).

Пусть выполняется (a). Положим $N = \mathrm{Ann}_C(2) = C \cap \mathrm{Ann}_R(2)$. Заметим, что N — существенный подмодуль в A_C. Рассмотрим произвольный ненулевой элемент $x \in R$. Имеем

$$x = \sum_{s=0}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n} a_{i_1,\ldots,i_s} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s},$$

где коэффициенты $a_{i_1,\ldots,i_s}$ содержатся в A. Можно домножить x на элементы $C \subseteq Z(R)$ и получить ситуацию, где все коэффициенты из представления x содержатся в N. Действительно, если некоторый коэффициент $a_{i_1,\ldots,i_s}$ не содержится в N, то существует такой элемент $c \in C$, что $0 \neq ca_{i_1,\ldots,i_s} \in N$, т. е. при умножении на c число коэффициентов, содержащихся в N, уменьшается. Остается заметить, что $x \in Z(R)$, если все коэффициенты их представления x лежат в N. Действительно, $[x, a] = 0$ для любого $a \in A$, так как $N \subseteq Z(A)$ и

$$[x, e_i] = \sum_{s=0}^{n} \sum_{i_1 < \ldots < i_s} a_{i_1,\ldots,i_s} [e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}, e_i].$$

Заметим, что если число s четно или $i \in \{i_1, \ldots, i_s\}$, то $[e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}, e_i] = 0$. В противном случае

$$[e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}, e_i] = \alpha e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s} \wedge e_i,$$

где $\alpha \in \{0, 2\}$, т. е. мы снова имеем $[a_{i_1,\ldots,i_s} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}, e_i] = 0$. Так как элементы кольца A и $e_1, \ldots, e_n$ порождают кольцо R, имеем $x \in Z(R)$, что и требовалось.

Теперь допустим, что выполняется условие (b). Рассмотрим произвольный ненулевой элемент $x \in R$. Повторяя рассуждения из предыдущего случая, можно использовать умножение на элементы из C для получения такой ситуации, что все коэффициенты x относительно базиса B_n содержатся в C.

Возьмем такое наименьшее нечетное k, что элемент $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ базиса B_n содержится в представлении x с ненулевым коэффициентом a (если это невозможно, то $x \in Z(R)$). Пусть

$$m = n - k, \quad \{j_1, \ldots, j_q\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}.$$

Ясно, что целое число m четное, откуда $c = e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_m} \in Z(R)$. Тогда непосредственно проверяется, что $cx = \pm ae_1 \wedge \ldots \wedge e_n + x'$, где x' — линейная комбинация элементов базиса B_n с четной степенью s и коэффициентами в C. Поэтому повторим рассуждения из предыдущего случая и получим, что $x' \in Z(R)$. Наконец, непосредственно проверяется, что $ae_1 \wedge \ldots \wedge e_n \in Z(R)$. Утверждение доказано. □

2.3.3. Лемма. *Если A — кольцо конечной характеристики s и $C = Z(A)$, то следующие условия эквивалентны*:

(a) *Идеал $\mathrm{Ann}_A(2)$ — существенный подмодуль модуля A_C.*
(b) *$s = 2^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. (a)⇒(b). Допустим противное. Тогда существует нечетное простое целое число p, делящее s. Ненулевой идеал $\mathrm{Ann}_A(p)$ кольца A имеет нулевое пересечение с идеалом $\mathrm{Ann}_A(2)$. Поэтому идеал $\mathrm{Ann}_A(2)$ не является существенным подмодулем модуля A_C. Получено противоречие.

(b)⇒(a). Допустим противное. Тогда существует. Так как $s = 2^m$, имеем, что для каждого $a \in A \setminus \{0\}$ выполняется соотношение $\operatorname{ord} a = 2^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $0 \neq 2^{k-1}a \in Ca \cap \mathrm{Ann}_A(2)$. Поэтому идеал $\mathrm{Ann}_A(2)$ — существенный подмодуль модуля A_C. □

Если A — кольцо конечной характеристики или A не имеет делителей нуля, то формулировка теоремы 2.3.2 может быть упрощена; см. теорему 2.3.4.

2.3.4. Теорема. *Пусть A — кольцо с центром $C = Z(A)$ и n положительное целое число.*

Кольцо $\Lambda(A^n)$ центрально существенно в точности тогда, когда A центрально существенно и выполняется хотя бы одно из следующих условий.

1. *Если A — кольцо конечной характеристики s (это так, если кольцо A конечно), то кольцо $\Lambda(A^n)$ центрально существенно в точности тогда, когда кольцо A центрально существенно и выполняется хотя бы одно из следующих условий.*
   (a) *n — нечетное целое число.*
   (b) *$s = 2^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.*
2. *Если A — кольцо без делителей нуля, то кольцо $\Lambda(A^n)$ центрально существенно в точности тогда, когда кольцо A центрально существенно и выполняется хотя бы одно из следующих условий.*
   (a) *n — нечетное целое число.*
   (b) *A — кольцо характеристики 2.*

Доказательство. Положим $R = \Lambda(A^n)$.

Утверждение 1 следует из теоремы 2.3.2 и леммы 2.3.3.

Докажем 2. Если A — кольцо характеристики 2 или n — нечетное целое число, то R — центрально существенное кольцо в силу утверждения 1.

Теперь допустим, что A — кольцо без делителей нуля и кольцо R центрально существенно. В силу теоремы 2.3.2 кольцо A центрально существенно и достаточно рассмотреть случай, где n — четное целое число и идеал $\mathrm{Ann}_A(2)$ — существенный подмодуль модуля A_C. Так как A — кольцо без делителей нуля, $\mathrm{Ann}_A(2) = A$. Поэтому A — кольцо характеристики 2. □

3. Конструкции колец

3.1. Кольца многочленов, рядов и частных. Результаты подраздела 3.1 основываются на [51].

Для произвольного конечного подмножества S моноида G и любого кольца A обозначим через Σ_S элемент $\sum_{x\in S} x$ моноидного кольца AG. Для любого элемента $r = \sum_{g\in G} a_g \cdot g \in AG$ будем говорить, что множество $\{g \in G \mid a_g \neq 0\}$ — *носитель* элемента r и обозначим это множество через $\operatorname{supp}(r)$.

3.1.1. Моноидные кольца. Если A — центрально существенное кольцо и G — коммутативный моноид, то моноидное кольцо $R = AG$ центрально существенно.

Доказательство. Для любого ненулевого элемента $r = \sum_{g\in G} r_g \cdot g \in R$ пусть

$$k(r) = |\{g \in G \mid r_g \in Z(A)\}|.$$

Ясно, что $k(r) \leqslant |\operatorname{supp}(r)| < \infty$. Индукцией по k мы докажем, что для $k(r) = k$ существуют такие ненулевые центральные элементы x и y, что $rx = y$.

Если $k = 0$ то $r_g \in Z(A)$ для всех $g \in G$ и поэтому $r \in Z(R)$.

В противном случае, если $k > 0$ и $k(r) = k$, то можно взять элемент $h \in G$ с $r_h \in Z(A)$. Так как кольцо A центрально существенно, существуют ненулевые центральные элементы x и y с $xr_h = y$. Ясно, что $0 \neq xr = \sum\limits_{g\in G} xr_g \cdot g$ и $k(xr) < k(r)$. По предположению индукции существуют такие ненулевые центральные элементы u и v кольца R, что $uxr = v$. Так как $ux \in Z(R)$, то доказательство завершено. □

Следующее утверждение является следствием из 3.1.1.

3.1.2. Кольца многочленов. Для любого центрально существенного кольца A кольцо многочленов $A[x]$ и кольцо многочленов Лорана $A[x, x^{-1}]$ центрально существенны.

3.1.3. Центральные кольца частных. Пусть A — центрально существенное кольцо, Q — кольцо частных кольца A относительно некоторой центральной мультипликативной системы S, состоящей из неделителей нуля, и пусть $0 \neq s^{-1}a = as^{-1} \in Q$, $s \in S$. По предположению существуют такие ненулевые центральные элементы $x, y \in A$, что $ax = y$. Тогда $0 \neq as^{-1}x = s^{-1}y$ — центральный элемент кольца Q и кольцо Q центрально существенно. Аналогично доказывается, что если Q — центрально существенное кольцо, то A — центрально существенное кольцо.

3.1.4. Замечание. Так как кольцо формальных рядов Лорана $A((x))$ является кольцом частных кольца формальных степенных рядов $A[[x]]$ относительно центральной мультипликативной системы $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, из 3.1.3 следует, что кольцо $A((x))$ центрально существенно в точности тогда, когда кольцо $A[[x]]$ центрально существенно.

3.1.5. Предложение. *Если R — конечномерная центрально существенная алгебра, то кольцо формальных степенных рядов $R[[x]]$ центрально существенно.*

Доказательство. Достаточно доказать, что кольцо $R[[x]]$ изоморфно $F[[x]] \otimes R$. Сначала мы докажем инъективность естественного гомоморфизма $\varphi\colon F[[x]] \otimes R \to R[[x]]$, определенного соотношением $\varphi(f(x) \otimes r) = f(x)r$ для каждого $f(x) \in F[[x]]$ и $r \in R$. Действительно, каждый элемент алгебры $F[[x]] \otimes R$ может быть записан в виде

$$r = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \otimes r_i,$$

где $f_1(x), \ldots, f_n(x) \in F[[x]]$, $r_1, \ldots, r_n$ — линейно независимые элементы алгебры R (например, $\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ может быть подмножеством некоторого фиксированного конечного или бесконечного базиса для R). Полагая

$$f_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \alpha_{ij}$$

для некоторых $\alpha_{ij} \in F$, имеем, что

$$\varphi(r) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} x^j \alpha_{ij}\Big) r_i = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} r_i\Big).$$

Поэтому, если $\varphi(r) = 0$, то для всех $j \geqslant 0$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} r_i = 0,$$

откуда $\alpha_{ij} = 0$ и $f_i(x) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$; следовательно, $r = 0$.

Если R — конечномерная алгебра с базисом $r_1, \ldots, r_n$, то для любого ряда

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j t_j$$

с коэффициентами $t_j \in R$ имеем

$$t_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} r_i,$$

откуда

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} r_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} x^j \alpha_{ij}\Big) r_i \in \varphi(F[[x]] \otimes R).$$

□

3.1.6. Теорема. *Если R — конечномерная центрально существенная алгебра, то следующие условия эквивалентны*:

(a) *Кольцо R центрально существенно.*
(b) *Кольцо степенных рядов $R[[x]]$ центрально существенно.*
(c) *Кольцо рядов Лорана $R((x))$ центрально существенно.*

Доказательство. Импликация (a)⇒(b) следует из предложения 3.1.5.

Импликация (b)⇒(a) проверяется непосредственно.

Эквивалентность (b)⇒(c) следует из замечания 3.1.4. □

3.2. Групповые кольца. Результаты подраздела 3.2 основываются на статье [51].

Пусть R — кольцо и G — группа. Положим $(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$ для любых элементов x, y группы G; аддитивные коммутаторы и мультипликативные коммутаторы обозначаются по-разному, так как элементы группы также рассматриваются как элементы группового кольца. Для любого элемента g группы G обозначим через g^G класс сопряженных элементов, который содержит g. Для группы G *верхний центральный ряд* группы G — это цепь подгрупп $\{1\} = Z_0(G) \subseteq Z_1(G) \subseteq \ldots$, где $Z_i(G)/Z_{i-1}(G)$ — центр группы $G/Z_{i-1}(G)$, $i \geqslant 1$. Обозначим через $NC(G)$ *класс нильпотентности* группы G, т. е. наименьшее положительное целое число n с $Z_n(G) = G$ (если оно существует).

Группа G называется *FC-группой*, если все классы сопряженных элементов в G являются конечными.

3.2.1. Предложение. *Пусть A — кольцо и G — группа. Если групповое кольцо $R = AG$ центрально существенно, то A также — центрально существенное кольцо и группа G — FC-группа.*

Доказательство. Пусть $0 \neq a \in A$. Так как $A \subseteq R$ и R центрально существенно, то существует такой элемент $c \in Z(R)$, что $0 \neq ca \in Z(R)$. Имеем $c = \sum_{g\in G} c_g \cdot g$ и $ca = \sum_{g\in G} c_g a \cdot g$. Из соотношений $0 = [c, b] = \sum_{g\in G}[c_g, b] \cdot g$ для любого $b \in A$ следует, что $c_g \in Z(A)$ для всех $g \in G$. Аналогично, имеем $c_g a \in Z(A)$ для любого $g \in G$. Так как существует хотя бы один элемент $g \in G$ с $c_g a \neq 0$, мы получаем наше утверждение о кольце A.

Теперь пусть g — произвольный элемент группы G. Хорошо известно (см., например, [58, Lemma 4.1.1]), что $Z(AG)$ — свободный $Z(A)$-модуль с базисом

$$\{\Sigma_K \mid K \text{ — конечный класс сопряженных элементов в } G\}. \tag{3.2.1.1}$$

В частности,

$$r \in Z(AG) \Rightarrow |g^G| < \infty \text{ для любого } g \in \operatorname{supp}(r). \tag{3.2.1.2}$$

Так как AG центрально существенно, то $0 \neq cg = d$ для некоторых $c, d \in Z(AG)$. Сравнивая коэффициенты в левой и правой частях равенства $cg = d$, получаем, что для любого $y \in \operatorname{supp}(d)$ существует такой элемент $x \in \operatorname{supp}(c)$, что $xg = y$. Для любого $h \in G$ имеем $hgh^{-1} = (hxh^{-1})^{-1}hyh^{-1}$, откуда $g^G \subseteq (x^{-1})^G \cdot y^G$. Так как $|(x^{-1})^G| = |x^G|$, то $|g^G| \leqslant |x^G| \cdot |y^G| < \infty$ в силу (3.2.1.2). □

3.2.2. Лемма. *Пусть G — группа, F — поле характеристики $p > 0$, и пусть q — простое целое число, не равное p. Если кольцо FG центрально существенно, то каждая q-подгруппа в G — нормальная коммутативная подгруппа.*

Доказательство. Сначала пусть H — конечная q-подгруппа группы G. Тогда $|H| = n = q^k$ — ненулевой элемент поля F и элемент $e_H = \frac{1}{n}\Sigma_H$ — идемпотент кольца FG. По 1.1.4 e_H — центральный идемпотент. Следовательно,

$$ge_Hg^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{h\in H} ghg^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{h\in H} h$$

для любого $g \in G$. Сравнивая коэффициенты в обеих частях последнего соотношения, мы видим, что $ghg^{-1} \in H$, т. е. подгруппа H нормальна.

Пусть F_0 — простое подполе поля F. Рассмотрим конечное кольцо F_0H. По теореме Машке оно изоморфно некоторому конечному прямому произведению колец матриц над телами; кроме того, любое конечное тело является полем по теореме Веддерберна. Допустим, что группа H не коммутативна. Тогда одно из слагаемых кольца F_0H — кольцо матриц порядка $k > 1$ над некоторым полем; это невозможно, так как такое кольцо матриц содержит нецентральный идемпотент.

Теперь пусть H — произвольная q-подгруппа в G. Возьмем любой элемент $h \in H$ и произвольный элемент $g \in G$. Так как h порождает циклическую q-подгруппу $H_0 = \langle h\rangle$, то $ghg^{-1} \in H_0 \subseteq H$ для любого $g \in G$, т. е. подгруппа H нормальна.

Если $x, y \in H$, то подгруппа $H_1 = \langle x, y\rangle$ конечна в силу предложения 3.2.1 и следующей леммы Дицмана: если $x_1, \ldots, x_n$ — элементы конечного порядка произвольной группы G и каждый из элементов $x_1, \ldots, x_n$ имеет только конечное число сопряженных элементов, то существует конечная нормальная подгруппа N группы G, содержащая $x_1, \ldots, x_n$ (см. [38, Lemma C, Appendixes]).

В силу первой части доказательства подгруппа H_1 коммутативна, поэтому $xy = yx$. □

В случае конечных групп имеем более сильное утверждение, которое сводит изучение центрально существенных групповых алгебр конечных групп к изучению центрально существенных групповых алгебр конечных p-групп.

3.2.3. Предложение. *Пусть $|G| = n < \infty$ и F — поле характеристики $p > 0$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(a) *Кольцо FG центрально существенно.*

(b) *$G = P \times H$, где P — единственная силовская p-подгруппа группы G, группа H коммутативна, и кольцо FP центрально существенно.*

Доказательство. Пусть FG центрально существенно. По лемме 3.2.2 каждая силовская q-подгруппа для $q \neq p$ нормальна в G, и она коммутативна; следовательно, произведение H всех таких подгрупп — коммутативная нормальная подгруппа. Пусть $m = |H|$. Заметим, что $(m, p) = 1$, откуда элемент m обратимый в F.

Докажем, что силовская p-подгруппа P нормальна в G.

Рассмотрим следующее линейное отображение $f\colon R \to R$:

$$f(r) = \frac{1}{m}\sum_{h\in H} hrh^{-1}.$$

Ясно, что $f(1) = 1$ и $f(yry^{-1}) = f(r)$ для любого $y \in H$, так как левая и правая части соотношения содержат одинаковые слагаемые. Теперь допустим, что $xy \neq yx$ для некоторых $x \in P$ и $y \in H$. Положим $r = x - yxy^{-1}$. Непосредственно проверяется, что $r \neq 0$, но $f(r) = f(x) - f(yxy^{-1}) = 0$; это противоречит 1.1.5. Таким образом, элементы из P и H коммутируют, $G = PH$ и $P \cap H = \{1\}$; следовательно, $G = P \times H$. Рассматривая FG как групповое кольцо $(FP)H$, получаем из предложения 3.2.1, что FP центрально существенно.

Обратное утверждение непосредственно следует из 3.1.1 и изоморфизма $FG \cong (FP)H$. □

3.2.4. Предложение. *Пусть G — конечная p-группа и F — поле характеристики p. Если $NC(G) \leqslant 2$, то кольцо FG центрально существенно.*

Доказательство. Напомним, что для любой подгруппы H в G через ωH обозначается правый идеал кольца FG, порожденный множеством $\{1 - h \mid h \in H\}$, также напомним, что этот правый идеал является идеалом в точности тогда, когда подгруппа H нормальна. Хорошо известно (см., например, [58, Lemma 3.1.6]), что в нашем случае идеал ωG нильпотентен.

Пусть $0 \neq x \in FG$. Рассмотрим все произведения $x(1-z)$, где $z \in Z = Z(G)$. Если хотя бы одно из них (скажем, $x_1 = x(1-z_1)$) ненулевое, то рассмотрим произведение $x_1(1-z)$ и так далее. Этот процесс прекратится на некотором шаге, т. е. существует такое целое число $k \geqslant 0$, что $x_k \neq 0$, но $x_k \omega Z = 0$ (допустим, что $x_0 = x$). Тогда $x_k \in FG\Sigma_Z$ (см. [58, Lemma 3.1.2]). Заметим, что $FG\Sigma_Z \subseteq Z(FG)$. Действительно, если $g, h \in G$, то

$$[g, h\Sigma_Z] = [g, h]\Sigma_Z = gh(1 - h^{-1}g^{-1}hg)\Sigma_Z = 0,$$

так как $h^{-1}g^{-1}hg \in G' \subseteq Z$. Таким образом, полагая $c = (1-z_1)\dots(1-z_k)$ (или $c = 1$ для $k = 0$), мы получаем $c \in Z(FG)$ и $xc = x_k \in Z(FG) \setminus \{0\}$, что и требовалось. □

3.2.5. Лемма. *Пусть F — поле характеристики p и пусть G — конечная p-группа, удовлетворяющая следующему условию*:

$$\begin{aligned} &\textit{для любого элемента } g \in G \setminus Z(G) \textit{ существует такая} \\ &\textit{нетривиальная подгруппа } H \subseteq Z(G), \textit{ что } Hg \subseteq g^G. \end{aligned} \tag{3.2.5.1}$$

Если $NC(G) > 2$, то кольцо $R = FG$ не центрально существенно.

Доказательство. Пусть $K = g^G$ — такой класс сопряженных элементов группы G, что $|K| > 1$, и пусть H — подгруппа, удовлетворяющая условию (3.2.5.1). Заметим, что $Hg' \subseteq K$ для любого $g' \in K$, так как $g' = a^{-1}ga$ для некоторых $a \in G$ и $Hg' = Ha^{-1}ga = a^{-1}Hga \subseteq a^{-1}Ka = K$. Пусть $Hx_1, \dots, Hx_t$ — все различные смежные классы для G относительно H, содержащиеся в K. Тогда K — дизъюнктное объединение этих смежных классов, откуда

$$\Sigma_K = \sum_{i=1}^{t} \Sigma_{Hx_i}.$$

Теперь заметим, что $(\Sigma_Z)h = \Sigma_Z$ для любого $h \in H$, так как $H \subseteq Z$; поэтому $\Sigma_Z \cdot \Sigma_H = |H|\Sigma_Z = 0$. Тогда получаем, что

$$\Sigma_Z\Sigma_K = \sum_{i=1}^{t} \Sigma_Z \cdot \Sigma H \cdot x_i = 0. \tag{3.2.5.2}$$

Далее, если $NC(G) > 2$, то существует элемент $g \in G \setminus Z_2(G)$. Это означает, что существует такой элемент $a \in G$, что $(g, a) \in Z$. Рассмотрим элемент $x = g\Sigma_Z \neq 0$. Имеем

$$[a, x] = [a, g\Sigma_Z] = (ag - ga)\Sigma_Z = ag(1 - (g, a))\Sigma_Z \neq 0,$$

так как $1 - (g, a) \in \omega Z$. Следовательно, $x \in C = Z(R)$. С использованием базиса 3.2.1 произвольный элемент $c \in C$ может быть представлен в виде $c = c_0 + c_1$, где $c_0 \in FZ$,

$$c_1 = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i \Sigma_{K_i}, \quad K_1, \dots, K_s$$

— классы сопряженных элементов группы G, $|K_i| > 1$ и $\alpha_i \in F$ для всех $i = 1, \dots, s$. Допустим, что $xc \in Z(R)$. В силу (3.2.5.2) имеем $xc_1 = 0$, откуда $xc = xc_0$. Так как $(\Sigma_Z)z = \Sigma_Z$ для любого $z \in Z$, мы получаем, что $xc_0 = \alpha x$ для некоторого $\alpha \in F$. Если $\alpha \neq 0$, то $x \in C$; получено противоречие. Получаем, что $xC \cap C = 0$. □

3.2.6. Лемма. *Если централизатор $C_G(Z_2(G))$ подгруппы $Z_2(G)$ группы G лежит в $Z_2(G)$, то G удовлетворяет условию* (3.2.5.1) *леммы* 3.2.5.

Доказательство. Пусть g — элемент из $G \setminus Z(G)$. Допустим, что существует такой элемент $a \in G$, что

$$(g, a) \in Z(G)\{1\}. \tag{3.2.6.1}$$

Пусть $z = (g, a)$. Тогда $gz = a^{-1}ga \in g^G$, откуда $gz^k = a^{-k}ga^k \in g^G$ для любого $k \geqslant 1$. Поэтому подгруппа H, порожденная z, удовлетворяет условию (3.2.5.1).

Теперь рассмотрим два случая. Если $g \in Z_2(G) \setminus Z(G)$, то существует такой элемент $a \in G$, что $(g, a) \neq 1$. Но по определению $Z_2(G)$ получаем $(g, a) \in Z(G)$, откуда (3.2.6.1) верно.

Остается случай $g \in Z_2(G)$. Тогда $g \in Z(Z_2(G))$, откуда существует такой элемент $a \in Z_2(G)$, что $z = (g, a) \neq 1$. Но снова $z \in Z_1(G)$, так как $a \in Z_2(G)$ и получаем (3.2.6.1). □

3.2.7. Замечание (А. Ю. Ольшанский)**.** Существует другая серия групп, удовлетворяющих условиям леммы 3.2.6. А именно, пусть p — простое целое число и G — свободная 3-порожденная группа многообразия, определенного тождествами $x^p = 1$ и $(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$. Тогда G/G' — элементарная абелева p-группа; поэтому G' — подгруппа Фраттини группы G. Если $g \in G'$, то можно включить gG' в систему свободных образующих группы G/G'; следовательно, элемент g может быть включен в систему, состоящую из трех образующих группы G. Так как группа G конечна, то эта система образующих свободна. Поэтому если $g \in C_G(G')$, то G удовлетворяет тождеству $(x_1, x_2, x_3) = 1$; это невозможно, так как группа G может быть гомоморфно отображена на группу верхних унитреугольных матриц порядка 4 над $GF(p)$, которая не удовлетворяет этому тождеству. Поэтому $Z_2(G) \supseteq G' \supseteq C_G(G') \supseteq C_G(Z_2(G))$.

3.2.8. Предложение. *Если F — поле характеристики $p > 0$, то существует такая группа G порядка p^5, что групповая алгебра FG не центрально существенна.*

Доказательство. Построим группы, которые удовлетворяют условиям леммы 3.2.6. Рассмотрим случаи $p = 2$ и $p \neq 2$ по отдельности.

Пусть $p = 2$. Рассмотрим прямое произведение N группы кватернионов $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ и циклической группы $\langle a \rangle$ порядка 2 с образующим a и автоморфизм α группы N, определенный на образующих соотношениями $\alpha(i) = j$, $\alpha(j) = i$, $\alpha(a) = (-1)a$. Положим $\Gamma = \langle \alpha \rangle$. Имеем полупрямое произведение $G = N \rtimes \Gamma$, чьи элементы рассматриваются как произведения $x\gamma$, где $x \in N$ и $\gamma \in \langle \alpha \rangle$, а операция определена соотношением $x\gamma x'\gamma' = x\gamma(x')\gamma\gamma'$. Элементы вида $x \cdot 1$ естественно отождествляются с элементами $x \in N$ и элементы вида $1 \cdot \gamma$ отождествляются с элементами $\gamma \in \Gamma$. Непосредственно проверяется, что $Z_1(G) = \langle -1 \rangle$, $Z_2(G) = \langle k, a \rangle = C_G(Z_2(G))$.

Теперь допустим, что $p > 2$. Рассмотрим полупрямое произведение $N = A \rtimes \Gamma$ элементарной абелевой группы A порядка p^3 с образующими a, b, c и циклической группы $\Gamma = \langle \gamma \rangle$, где γ — автоморфизм группы A, определенный на образующих соотношениями

$$\gamma(a) = a, \quad \gamma(b) = b, \quad \gamma(c) = bc.$$

Непосредственно проверяется, что $|N| = p^4$ и любой элемент группы N может быть единственным образом представлен в виде произведения $a^k b^l c^m \gamma^r$, где $k, l, m, r \in \{0, \dots, p-1\}$. Докажем, что отображение $\beta\colon \{a, b, c, \gamma\} \to N$, определенное соотношениями

$$\beta(a) = a, \quad \beta(b) = b, \quad \beta(c) = ac, \quad \beta(\gamma) = abc\gamma,$$

может быть продолжено до автоморфизма $\hat{\beta}$ группы N. Действительно, для любых $k, l, m, r \in \mathbb{Z}$ положим

$$\hat{\beta}(a^k b^l c^m \gamma^r) = a^k b^l a^m c^m a^r b^r (c\gamma)^r = a^{k+m+r} b^{l+r(r+1)/2} c^{m+r} \gamma^r.$$

Это определение корректно, так как $p|(r(r+1)/2)$, если $p|r$. Непосредственно проверяется, что для любого $k,l,m,r,k',l',m',r' \in \{0,\dots,p-1\}$ соотношения

$$a^k b^l c^m \gamma^r \cdot a^{k'} b^{l'} c^{m'} \gamma^{r'} = a^{k+k'} b^{l+l'+rm'} c^{m+m'} \gamma^{r+r'}$$

выполняются. Следовательно,

$$\hat{\beta}(a^k b^l c^m \gamma^r \cdot a^{k'} b^{l'} c^{m'} \gamma^{r'}) = a^{k+k'+m+m'+r+r'} b^{l+l'+rm'+(r+r')(r+r'+1)/2} c^{m+m'+r+r'} \gamma^{r+r'}.$$

С другой стороны,

$$\hat{\beta}(a^k b^l c^m \gamma^r) \cdot \hat{\beta}(a^{k'} b^{l'} c^{m'} \gamma^{r'}) = (a^{k+m+r} b^{l+r(r+1)/2} c^{m+r} \gamma^r) \cdot (a^{k'+m'+r'} b^{l'+r'(r'+1)/2} c^{m'+r'} \gamma^{r'}) =$$
$$= a^{k+m+r+k'+m'+r'} b^{l+r(r+1)/2+l'+r'(r'+1)/2+r(m'+r')} c^{m+r+m'+r'} \gamma^{r+r'}.$$

Остается заметить, что имеем следующее тождество:

$$l + \frac{r(r+1)}{2} + l' + \frac{r'(r'+1)}{2} + r(m'+r') = l + l' + rm' + rr' + \frac{r^2 + r + r'^2 + r'}{2} =$$
$$= l + l' + rm' + \frac{r^2 + 2rr' + r'^2 + r + r'}{2} == l + l' + rm' + \frac{(r+r')(r+r'+1)}{2}.$$

Теперь положим $G = N \rtimes \langle \beta \rangle$. Непосредственно проверяется, что $Z_1(G) = \langle a, b \rangle$ и $Z_2(G) = \langle a, b, c \rangle = C_G(Z_2(G))$. □

3.2.9. Теорема. *Пусть F — поле характеристики $p > 0$.*

(a) *Если G — произвольная конечная группа, то групповая алгебра FG — центрально существенное кольцо в точности тогда, когда $G = P \times H$, где P — единственная силовская p-подгруппа группы G, группа H коммутативна, и кольцо FP центрально существенно.*

(b) *Если G — конечная p-группа и класс нильпотентности[1] группы G не превышает 2, то групповая алгебра FG — центрально существенное кольцо.*

(c) *Существует такая группа G порядка p^5, что групповая алгебра FG центрально существенна.*

Доказательство. Теорема 3.2.9 следует из предложения 3.2.3, предложения 3.2.4 и предложения 3.2.8. □

3.2.10. Замечания. (a) Следующий критерий полупервичности группового кольца хорошо известен: кольцо AG полупервично если и только если кольцо A полупервично и порядки конечных нормальных подгрупп группы G не являются делителями нуля в A; см., например, предложение 8 в [38, Appendix]).

(b) Если A — такое полупервичное кольцо, что его аддитивная группа не имеет кручения и G — произвольная группа, то групповое кольцо AG центрально существенно в точности тогда, когда кольцо A и группа G коммутативны. Действительно, по теореме 1.2.2 любое центрально существенное полупервичное кольцо коммутативно. Поэтому замечание b следует из замечания a.

(c) В связи с теоремой 3.2.9 заметим, что для произвольного поля F нулевой характеристики и каждой группы G групповая алгебра FG центрально существенна в точности тогда, когда алгебра FG коммутативна; см. замечание b. Поэтому при изучении центрально существенных групповых алгебр над полями интересен только случай полей положительной характеристики.

(d) В связи с теоремой 3.2.9, с заметим, что групповое кольцо конечной p-группы класса нильпотентности 3 может быть как центрально существенным, так и не центрально существенным. Точнее, мы использовали компьютерную алгебраическую систему GAP [26] для проверки того, что для любой группы порядка 16 и класса нильпотентности 3 ее групповая алгебра над полем $GF(2)$ центрально существенна.

[1] Хорошо известно, что каждая конечная p-группа нильпотентна, см., например, [29, Theorem 10.3.4].

(e) Существует такая конечная 2-группа G, что групповая алгебра $R = FG$ над полем F из двух элементов центрально существенна и содержит такой элемент x, что $x^2 = 0$, но $xRx \neq 0$.

Доказательство. Пусть $G = D_4$ — группа диэдра порядка 8, задаваемая образующими a, b и определяющими соотношениями $a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1$. Нетрудно проверить, что

$$G = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}, \quad G' = Z(G) = \langle a^2 \rangle.$$

Поэтому групповая алгебра FG центрально существенна. В то же время

$$(1 + b)^2 = 1 + b^2 = 1 + 1 = 0,$$

причем

$$(1 + b)a(1 + b) = a + ba + ab + bab = 1 + a^3 + ab + a^3b \neq 0. \qquad \square$$

3.3. Кольца частных, групповые и полугрупповые кольца. Основные результаты данного подраздела доказаны в [41, 44].

Кольца частных и групповые кольца.

3.3.1. Обозначения. Для фиксированной группы G обозначим через $P(G)$ и G_p периодическую часть G и множество элементов группы G, порядки которых являются степенями простого целого числа p соответственно, $Z(G)$ — центр группы G, K — поле характеристики $p > 0$, и KG — групповую алгебру группы G над K.

3.3.2. Замечание. В 3.2.10, с доказано, что если K — поле нулевой характеристики, то центрально существенная групповая алгебра KG коммутативна для любой группы G. Пусть R — коммутативное кольцо, G — группа без кручения и групповое кольцо RG центрально существенно. Тогда кольцо RG коммутативно. Действительно, по предложению 3.2.1 кольцо R также центрально существенно и все классы сопряженных элементов в G конечны. По [58, Lemma 4.1.6] группа G абелева, групповое кольцо RG коммутативно и, следовательно, RG имеет коммутативное классическое кольцо частных.

3.3.3. Замечание. Если группа G не имеет элементов порядка p, то центрально существенная групповая алгебра KG коммутативна.

Доказательство. Из [58, Theorem 4.2.13] следует, что KG — полупервичная алгебра. Следовательно, центрально существенная полупервичная алгебра KG коммутативна по теореме 1.2.2. $\square$

3.3.4. Предложение. *Пусть R — кольцо. Если для любого неделителя нуля b существует такой неделитель нуля x, что $bx = y \in Z(R)$ (соотв., $xb = y \in Z(R)$), то R имеет классическое правое (соотв., левое) кольцо частных.*

Доказательство. Пусть $a, b \in R$, b — неделитель нуля в R. Тогда $b(xa) = a(bx) = ay$. Поэтому кольцо R удовлетворяет правому условию Ope, $(ax)b = a(xb) = (xb)a$, и кольцо R удовлетворяет левому условию Ope. $\square$

3.3.5. Следствие. *Любая центрально существенная групповая алгебра имеет двустороннее классическое кольцо частных.*

Доказательство. Поскольку группа G является FC-группой, то из [58, Lemma 4.4.4] следует, что для любого неделителя нуля b существует такой неделитель нуля $x \in KG$, что $xb = y \in Z(KG)$ $(bx = y \in Z(KG))$ и y — неделитель нуля в KG. $\square$

3.3.6. Замечание. Следствие 3.3.5 также следует из [32], поскольку все классы сопряженных элементов в G являются конечными.

3.3.7. Пример. Пусть K — поле. Рассмотрим кольцо $\mathcal{R}$ всех 3×3 матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} k & a & b \\ 0 & k & a \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

где $k \in K$, a и b содержатся в кольце многочленов $K\langle x, y\rangle$ от двух некоммутирующих переменных x и y над полем K с соотношениями $xk = kx$ и $ky = yk$, где $k \in K$, и $yx - xy = x$; см., например [2].

Заметим, что кольцо $\mathcal{R}$ некоммутативно. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & xy \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & yx \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$Z(\mathcal{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} k & k' & h \\ 0 & k & k' \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} : k, k' \in K;\ h \in K\langle x, y\rangle \right\}.$$

Кроме того, если $f \in K\langle x, y\rangle$, то

$$\begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Z(\mathcal{R}).$$

Следовательно, $\mathcal{R}$ — центрально существенное кольцо. Для любой регулярной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} k & a & b \\ 0 & k & a \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

существует такая регулярная матрица

$$A' = \begin{pmatrix} k' & a' & 0 \\ 0 & k' & a' \\ 0 & 0 & k' \end{pmatrix},$$

где $k' \neq 0$, $a' = \frac{1}{k}(k'' - ak')$ для некоторого $0 \neq k'' \in K$, что $AA' \in Z(\mathcal{R})$. Из предложения 3.3.4 следует, что $\mathcal{R}$ — некоммутативное центрально существенное кольцо, которое имеет двустороннее классическое кольцо частных.

3.3.8. Предложение. *Пусть R — центрально существенное кольцо и α — неделитель нуля в $Z(R)$. Тогда α — неделитель нуля в R.*

Доказательство. Пусть $\alpha\beta = 0$ для некоторого $0 \neq \beta \in R$. Тогда $\beta \notin Z(R)$ и существуют такие элементы $c, d \in Z(R)$, что $0 \neq \beta c = d$. Поскольку α — неделитель нуля в $Z(R)$, имеем, что $\alpha d \neq 0$ и $\alpha\beta c \neq 0$. Получено противоречие. □

3.3.9. Предложение. *Пусть R — центрально существенное кольцо и R имеет классическое кольцо частных. Тогда $Q_{cl}(Z(R)) \subseteq Z(Q_{cl}(R))$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in Z(R)$ — неделитель нуля в $Z(R)$. Из предложения 3.3.8 следует, что α — неделитель нуля в R. Следовательно, существует $\alpha^{-1} \in Q_{cl}(R)$. Проверим, что $\alpha^{-1} \in Z(Q_{cl}(R))$.

Пусть $\beta = \gamma\delta^{-1} \in Q_{cl}(R)$. Поскольку $\alpha\gamma = \gamma\alpha$, имеем, что $\gamma = \alpha^{-1}\gamma\alpha$ в кольце $Q_{cl}(R)$. Тогда

$$(\gamma\delta^{-1})\alpha^{-1} = \gamma(\alpha\delta)^{-1} = \gamma(\delta\alpha)^{-1} = \gamma\alpha^{-1}\delta^{-1} = \alpha^{-1}\gamma\alpha\alpha^{-1}\delta^{-1} = \alpha^{-1}(\gamma\delta^{-1}).$$

Поэтому $\alpha^{-1} \in Z(Q_{cl}(R))$. Если $\alpha \in Z(R)$ — делитель нуля, то из соотношений $\alpha\delta = \delta\alpha$ и $\alpha = \delta^{-1}\alpha\delta$ следует, что

$$\alpha(\gamma\delta^{-1}) = (\gamma\alpha)\delta^{-1} = \gamma\delta^{-1}\alpha\delta\delta^{-1} = (\gamma\delta^{-1})\alpha.$$

Поэтому $Q_{cl}(Z(R)) \subseteq Z(Q_{cl}(R))$. Левосторонний аналог проверяется аналогично. □

3.3.10. Теорема. *Каждая центрально существенная групповая алгебра над любым полем имеет двустороннее классическое кольцо частных. Кроме того, групповая алгебра над полем является центрально существенной в точности тогда, когда она имеет классическое правое кольцо частных, которое является центрально существенным кольцом.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из следствия 3.3.5. Пусть $0 \neq as^{-1} \in Q_{cl}(KG)$, где $a, s \in KG$ и s — неделитель нуля. Поскольку G — FC-группа, то из [58, Lemma 4.4.4] следует, что существует такой неделитель нуля $\gamma \in KG$, что $s\gamma = t \in Z(KG)$ и t — неделитель нуля в KG. Поэтому имеем, что $s^{-1} = \gamma t^{-1}$, в кольце $Q_{cl}(KG)$. По предположению для ненулевого элемента $a\gamma \in KG$ существуют такие ненулевые элементы $c, d \in Z(KG)$, что $(a\gamma)c = d$. По предложению 3.3.9 (также см. [58, Theorem 4.4.5]) любой элемент из $Z(KG)$ централен в $Q_{cl}(KG)$, т. е. $c, d, t^{-1} \in Z(Q_{cl}(KG))$. Тогда

$$0 \neq (as^{-1})c = (a\gamma t^{-1})c = (a\gamma c)t^{-1} = dt^{-1} \in Z(Q_{cl}(KG)).$$

Наоборот, пусть $0 \neq r \in KG$. По предположению существуют такие элементы $t, s \in Z(Q_{cl}(KG))$, что $0 \neq rt = s$. Поскольку $Z(Q_{cl}(KG)) = Q_{cl}(Z(KG))$, имеем, что $t = cd^{-1}$ и $s = mn^{-1}$ для некоторых $c, d, m, n \in Z(KG)$. Тогда из соотношения $rcd^{-1} = rt = s = mn^{-1}$ получаем $rc = mn^{-1}d$ и

$$r(cn) = (rc)n = md \in Z(KG).$$

Кроме того, $md \neq 0$, поскольку d — неделитель нуля в KG. □

3.3.11. Замечания. Пусть G — группа,

$$\Delta(G) = \{x \in G : |G : C_G(x)| < \infty\}$$

(т. е. $\Delta(G)$ — FC-подгруппа в G), и пусть

$$\Delta^+(G) = \{x \in \Delta(G) : o(x) < \infty\}.$$

Хорошо известно, что $\Delta(G)$ и $\Delta^+(G)$ являются характеристическими подгруппами в G; см. подробности в [58]. Если группа $\Delta^+(G)$ конечна, то кольцо $Q_{cl}(K\Delta(G))$ существует и является квазифробениусовым кольцом; в частности, оно совпадает с максимальным кольцом частных $Q_{\max}(K\Delta(G))$; см. [14]. Из этих фактов и теоремы 3.3.10 вытекает следующее замечание.

1. Если подгруппа $\Delta^+(G)$ группы G конечна, то следующие условия эквивалентны.
   (a) KG — центрально существенное кольцо.
   (b) $Q_{cl}(KG)$ — центрально существенное кольцо.
   (c) $Q_{\max}(KG)$ — центрально существенное кольцо.
2. Кольцо A называется *кольцом с большим центром*, если любой ненулевой идеал кольца A имеет ненулевое пересечение с центром кольца A. В [3, Theorem 2] доказано, что если R — кольцо с большим центром, то $Q_{\max}(Z(R)) \subseteq Z(Q_{\max}(R))$. Поскольку ясно, что любое центрально существенное кольцо является кольцом с большим центром, утверждение предложения 3.3.9 остается также верным для максимальных колец частных.

Кольца частных и полугрупповые кольца. В этом подразделе F обозначает поле, S — полугруппу, FS — полугрупповую алгебру полугруппы S над полем F. Центр полугруппы S и полугрупповой алгебры FS обозначаются через $Z(S)$ и $Z(FS)$ соответственно. Если $a = \sum \alpha_s s \in FS$, то $\operatorname{supp}(a) = \{s \in S \mid \alpha_s \neq 0\}$.

3.3.12. Замечания.

(a) Полугруппа S называется *полугруппой с левым сокращением*, если для любых $a, b, c \in S$ из $ca = cb$ следует $a = b$. Двойственно определяется *полугруппа с правым сокращением*. Полугруппа с левым и правым сокращением называется *полугруппой с сокращением*. Хорошо известно, что периодическая полугруппа с сокращением является группой; см., например, [16]. Полугруппа с сокращением вкладывается в группу правых частных в точности тогда, когда непусто пересечение любых двух главных правых идеалов полугруппы S, т. е. $sS \cap tS \neq \varnothing$ для всех $s, t \in S$ (правое условие Оре). Если S удовлетворяет и левому условию Оре, определяемом симметрично, то группа $G_S = SS^{-1} = S^{-1}S$ называется *группой частных*

полугруппы S. Любой элемент группы G_S записывается как в виде $a^{-1}b$, так и в виде cd^{-1}; $a, b, c, d \in S$.

(b) Напомним, что в замечаниях 3.3.11 рассказывается о подгруппе $\Delta(G)$ группы G и ее свойствах.

(c) Пусть S — полугруппа с сокращением и $s \in S$. Если для некоторого $x \in S$ существует такой $t \in S$, что $xs = tx$, то элемент t определен однозначно и обозначается s^x. Тогда $\Delta(S)$ — множество элементов $s \in S$, для которых элементы s^x определены для всех $x \in S$ и множество $\{s^x \mid x \in S\}$ конечно. Если $s \in \Delta(S)$, то полагают $D_S(s) = \{s^x \mid x \in S\}$. Ясно, что если S вкладывается в группу частных G_S, то для $s \in \Delta(S)$ множество $D_S(s)$ вкладывается во множество сопряженных элементов для s в G_S. Если S — полугруппа с сокращением, то $Z(FS)$ является F-подпространством в FS, порожденное элементами вида

$$\sum_{t \in D_S(s)} t,$$

где $s \in \Delta(S)$; см. [56, Theorem 9.10].

3.3.13. Предложение. *Пусть S — полугруппа с сокращением. Если полугрупповая алгебра FS является центрально существенным кольцом, то $S = \Delta(S)$.*

Доказательство. По условию для $s \in S$ имеем $0 \neq cs = d$ для некоторых $c, d \in Z(FS)$. Тогда для любого $y \in \operatorname{supp}(d)$ найдется такой $x \in \operatorname{supp}(c)$, что $xs = y$. Из [56, Proposition 9.2(iii)] следует, что $x, y \in \Delta(S)$. Кроме того, $\Delta(S)$ является правым и левым множеством Ope в S и $G_{\Delta(S)} = \Delta(S)^{-1}\Delta(S) = \Delta(S)\Delta(S)^{-1}$ — FC-группа; см. [56, Corollary 9.6, Proposition 9.8(iii)]. Следовательно, $s = x^{-1}y$, где $x^{-1} \in \Delta(S)^{-1}$, $y \in \Delta(S)$. Для любого $t \in S$ имеем $x^t \in \Delta(S)$. Таким образом, из $tx = x^t t$ следует $(x^t)^{-1}t = tx^{-1}$, т. е. $(x^t)^{-1} = (x^{-1})^t$ в группе $G_{\Delta(S)}$. Тогда элемент $s^t = (x^{-1}y)^t = (x^{-1})^t y^t$ существует для любого $t \in S$; см. [56, Basic property (a), p. 108]. Далее,

$$\{s^t \mid t \in S\} = \{(x^{-1}y)^t \mid t \in S\} = \{(x^{-1})^t \mid t \in S\} \cdot \{y^t \mid t \in S\} = \{(x^t)^{-1} \mid t \in S\} \cdot \{y^t \mid t \in S\}.$$

Первое множество конечно, так как конечно множество $\{x^t \mid t \in S\}$. Из $y \in \Delta(S)$ следует конечность второго множества. Таким образом, множество $D_S(s)$ конечно и $s \in \Delta(S)$. □

3.3.14. Следствие. *Если FS — центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы S с сокращением, то S имеет группу частных G_S.*

Доказательство. По предложению 3.3.13 имеем $S = \Delta(S)$. Так как $\Delta(S)$ является правым и левым множеством Ope, то S имеет группу частных G_S. □

В силу следствия 3.3.14 при изучении центрально существенных полугрупповых алгебр полугрупп с сокращением достаточно ограничиться рассмотрением полугрупп S, которые имеют группу частных G_S.

3.3.15. Следствие. *Пусть F — поле и $\operatorname{char} F = 0$. Тогда любая центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы с сокращением над F коммутативна.*

Доказательство. Алгебра FS полупервична в точности тогда, когда полупервична алгебра FG_S; см. [56, Theorem 7.19]. Хорошо известно, что групповая алгебра над полем характеристики 0 полупервична; см., например, [58, Theorem 4.2.12]. По теореме 1.2.2 все центрально существенные полупервичные кольца коммутативны. □

3.3.16. Пример. Рассмотрим подкольцо $\mathcal{R}$ в кольце $M_7(F)$ всех матриц порядка 7 над полем F характеристики 0, состоящее из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b & c & d & e & f \\ 0 & \alpha & 0 & b & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathcal{R}$ — некоммутативное центрально существенное кольцо в силу примера 3.6.8 ниже. Если S — мультипликативная полугруппа алгебры $\mathcal{R}$, то $\mathcal{R} \cong F_0S$, где F_0S — сжатая полугрупповая алгебра полугруппы S над полем F. Так как $FS \cong F \oplus F_0S$ (см., например, [56, Corollary 4.9]), то FS — центрально существенная полугрупповая алгебра как прямая сумма центрально существенных алгебр.

3.3.17. Теорема. (a) *Пусть S — полугруппа с сокращением и F — поле. Полугрупповая алгебра FS над полем F является центрально существенной тогда и только тогда, когда существует группа частных G_S полугруппы S и групповая алгебра FG_S группы G_S является центрально существенной групповой алгеброй.*

(b) *Существуют некоммутативные центрально существенные полугрупповые алгебры над полями нулевой характеристики (при этом известно, что центрально существенные групповые алгебры над полями характеристики 0 коммутативны).*

Доказательство. (a) Пусть FS — центрально существенное кольцо и $0 \neq a \in FG_S$,

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i,$$

где $\alpha_i \in F$, $g_i \in G_S$. Известно, что $G_S = SZ(S)^{-1}$; см. [56, Proposition 9.8(iv)]. Тогда

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i t_i^{-1}$$

для некоторых $s_i \in S$, $t_i \in Z(S)$, $i = 1, \dots, n$. Положим

$$a' = \alpha_1 s_1 t_2 \dots t_n + \dots + \alpha_n s_n t_1 \dots t_{n-1} \in FS.$$

Заметим, что $a' \neq 0$. Для этого достаточно проверить, что $s_1 t_2 \dots t_n, \dots, s_n t_1 \dots t_{n-1}$ — различные элементы в FS. Действительно, если

$$s_i t_1 \dots \widehat{t_i} \dots t_n = s_j t_1 \dots \widehat{t_j} \dots t_n, \quad i \neq j,$$

то умножив это равенство на $(t_1 \dots t_n)^{-1}$, получим $s_i t_i^{-1} = s_j t_j^{-1}$, т.е. $g_i = g_j$; противоречие. По условию $0 \neq a'c' = d'$ для некоторых $c', d' \in Z(FS)$. Тогда $0 \neq ac'' = d'$, где $c'' = t_1 \dots t_n c'$ и d' — центральные элементы в FS, которые остаются центральными в FG_S; см. [56, Corollary 9.11(i)].

Обратно, пусть $0 \neq a \in FS$, $a = \sum \alpha_i s_i$, где $\alpha_i \in F$, $s_i \in S$. По условию $0 \neq ac = d$ для некоторых $c, d \in Z(FG_S)$,

$$c = \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i, \quad d = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j h_j,$$

где $g_i, h_j \in G_S$. Пусть $g_i = x_i y_i^{-1}$, $h_j = z_j t_j^{-1}$ и $x_i, z_j \in S$, $y_i, t_j \in Z(S)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Обозначим $y = y_1 \dots y_n$, $t = t_1 \dots t_m$. Положим $c' = cyt \in Z(FS)$. Тогда

$$ac' = (ac)yt = dyt \in Z(FS).$$

Осталось проверить, что $ac' \neq 0$. Имеем:

$$dyt = \gamma_1 z_1 y t_2 \dots t_m + \dots + \gamma_m z_m y t_1 \dots t_{m-1}.$$

Если $i \neq j$ и $z_i y t_1 \dots \widehat{t_i} \dots t_m = z_j y t_1 \dots \widehat{t_j} \dots t_m$, то $z_i t_i^{-1} = z_j t_j^{-1}$ и $g_i = g_j$, что приводит к противоречию.

Утверждение (b) следует из примера 3.3.16. □

3.3.18. Пример. Пусть $S = \langle x, y, z \mid z \in Z(S),\ z^2 = e,\ xy = zyx \rangle$. Непосредственно проверяется, что S — полугруппа с сокращением, имеющая группу частных

$$G_S = \langle x, y, z \mid z \in Z(G_S),\ z^2 = e,\ x^{-1}y^{-1}xy = z \rangle.$$

Так как z — центральная инволюция, $x^2, y^2 \in Z(G_S)$, то единственный нетривиальный коммутатор в G_S есть $x^{-1}y^{-1}xy$. Поэтому коммутант $G'_S = \langle z \rangle$. Имеем $Z(G_S) = \langle x^2, y^2, z \rangle$. Пусть $H = G'_S = \{e, z\}$, $\operatorname{char} F = 2$ и $\hat{H} = e + z$. Проверим, что для $0 \neq \alpha \in FG_S$ выполнено $\alpha\hat{H} = \beta \in Z(FG_S)$. Действительно,

$$\text{если} \quad \alpha = \sum_{g \in \operatorname{supp}(\alpha)} a_g g, \quad \text{то} \quad \beta = \sum_{g \in \operatorname{supp}(\alpha)} a_g g\hat{H}.$$

Тогда для любого $x \in G_S$, $g \in \operatorname{supp}(\alpha)$ получим

$$[x, g\hat{H}] = [x, g]\hat{H} = xg(1 - g^{-1}x^{-1}gx)\hat{H} = 0,$$

так как $g^{-1}x^{-1}gx \in G' \subseteq Z(G_S)$. Если $\alpha\hat{H} = 0$, то $\alpha \in FG_S\hat{H}$ (см. [58, Lemma 3.1.2]). В этом случае $\alpha \in Z(FG_S)$. Следовательно, групповая алгебра FG_S центрально существенна. По теореме 3.3.17 полугрупповая алгебра FS также является центрально существенной.

3.3.19. Пример. Пусть $S = \langle x, y, z \mid z \in Z(S),\ xy = zyx \rangle$. Полугруппа S имеет группу частных G_S, которая является свободной нильпотентной группой класса нильпотентности 2; см. [56, Example 21]. Известно, что если группа не содержит элементов порядка p, то центрально существенная групповая алгебра коммутативна; см. [41, Proposition 1]. Значит, групповая алгебра FG_S не является центрально существенной. По теореме 3.3.17 полугрупповая алгебра FS также не является центрально существенной.

3.3.20. Лемма. *Пусть FS — центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы S с сокращением. Тогда для каждого регулярного элемента $b \in FS$ существует такой регулярный элемент $z \in FS$, что $bz \in Z(FS)$.*

Доказательство. Из [58, Lemma 4.4.4] следует, что найдется такой регулярный элемент $x \in FG_S$, что $bx = y \in Z(FG_S)$. Если

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i t_i^{-1},$$

где $\alpha_i \in F$, $s_i \in FS$, $t_i \in Z(FS)$, $i = 1, 2, \dots, n$, то элемент $z = xt_1 \dots t_n$ регулярен в FS и $bz \in Z(FS)$. □

3.3.21. Предложение. *Если FS — центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы S с сокращением, то FS имеет классическое кольцо частных.*

Доказательство. Утверждение следует из предложения 3.3.4, леммы 3.3.20 и того, что верны их левосторонние аналоги. □

Следующая теорема распространяет теорему 3.3.10 на полугрупповые алгебры полугрупп с сокращением.

3.3.22. Теорема. *Полугрупповая алгебра полугруппы с сокращением является центрально существенной в точности тогда, когда она обладает классическим правым кольцом частных, которое является центрально существенным кольцом.*

Доказательство. Пусть FS — центрально существенное кольцо и $0 \neq as^{-1} \in Q_{cl}(FS)$, где s регулярен в FS. Пусть регулярный элемент $\gamma \in FS$ таков, что $s\gamma = t \in Z(FS)$. Тогда $s^{-1} = \gamma t^{-1}$

в кольце $Q_{cl}(FS)$. По условию для элемента $a\gamma \in FS$ существуют такие ненулевые элементы $c, d \in Z(FS)$, что $0 \neq (a\gamma)c = d \in Z(FS)$. Тогда

$$(as^{-1})c = (a\gamma t^{-1})c = (a\gamma c)t^{-1} = dt^{-1} \neq 0,$$

где $dt^{-1} \in Z(Q_{cl}(FS))$. Следовательно, $Q_{cl}(FS)$ — центрально существенное кольцо.

Обратно, пусть $0 \neq s \in FS$. По условию найдутся такие элементы $t, r \in Z(Q_{cl}(FS))$, что $0 \neq st = r$. Заметим, что $Z(Q_{cl}(FS)) \subseteq Q_{cl}(Z(FS))$; сравни [58, Theorem 4.4.5]. Действительно, пусть $\rho \in Z(Q_{cl}(FS))$, $\rho = \alpha\beta^{-1}$, где $\alpha, \beta \in FS$ и β регулярен. Тогда $\alpha\beta = \beta\alpha$ и $\alpha\beta^{-1} = \beta^{-1}\alpha$. По лемме 3.3.20 существует такой регулярный элемент $\gamma \in FS$, что $\beta\gamma \in Z(FS)$. Обозначив $\epsilon = \beta\gamma$, $\eta = \alpha\gamma$, получим:

$$\eta\epsilon^{-1} = \alpha\gamma\gamma^{-1}\beta^{-1} = \alpha\beta^{-1} = \rho.$$

При этом $\epsilon, \eta \in Z(Q_{cl}(FS))$. С учетом сказанного, имеем $t = cd^{-1}$, $r = mn^{-1}$ для некоторых $c, d, m, n \in Z(FS)$. Тогда

$$s(cn) = (sc)n = (mn^{-1}d)n = md \in Z(FS),$$

и $md \neq 0$, так как d регулярен в FS. □

3.3.23. Открытые вопросы.

1. Остается ли верным утверждение замечания 3.3.11, 1, если подгруппа $\Delta^+(G)$ группы G бесконечна?
2. Верно ли, что каждое центрально существенное кольцо имеет классическое правое кольцо частных?
3. Верно ли, что центрально существенное кольцо с правым классическим кольцом частных также имеет левое классическое кольцо частных?

3.4. Конструкция одного ЦС кольца. Основные результаты раздела доказаны в [48].

3.4.1. Кольца с полиномиальным тождеством. Пусть X — счетное множество и $F = \mathbb{Z}\langle X\rangle$ — свободное кольцо с множеством свободных образующих X. *Классическое тождество* по Роуэну — тождество с целыми коэффициентами, т. е. элемент свободного кольца F, лежащий в ядре любого гомоморфизма из F в кольцо R. Классическое тождество называется *полиномимальным тождеством*, если оно мультилинейно и имеет 1 одним из своих коэффициентов; кольцо с полиномиальным тождеством называется *PI кольцом*[1].

3.4.2. Кольца, алгебраические или целые над центром. Пусть R — кольцо с центром $C = Z(A)$. Элемент $r \in R$ называется *алгебраическим* (соотв., *целым*) над центром, если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие $c_0, \dots c_n \in C$, что c_n — неделитель нуля в R (соотв., обратимый элемент в R) и

$$c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \ldots + c_1 r + c_0 = 0. \tag{3.4.2.1}$$

Обозначим через $n_1(r)$ (соотв., $n_2(r)$) наименьшее целое число n, удовлетворяющее этому условию. Кольцо R называется *алгебраическим* (соотв., *целым*) над своим центром, если любой элемент $r \in R$ алгебраичен (соотв., цел) над его центром. Положим $m_1(R) = \max\{n_1(r) \mid r \in R\}$ и $m_2(R) = \max\{n_2(r) \mid r \in R\}$; возможно, что $m_1(R) = \infty$, $m_2(R) = \infty$.

Конечные кольца и конечномерные алгебры над полями являются примерами таких колец R, что $m_1(R) = m_2(R) < \infty$.

3.4.3. Пример (кольцо, алгебраическое над своим центром и не являющееся целым над ним)**.** Пусть

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & z \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Q},\ z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ясно, что центр кольца R имеет вид $\mathbb{Z}E$, где E — единичная матрица.

[1] См. [62, Definitions 1.1.12, 1.1.17]

Заметим, что кольцо R не цело над своим центром. Действительно, если

$$r = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то из соотношения

$$r^n + c_{n-1}r^{n-1} + \ldots + c_0 E = 0,$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $c_0, \ldots c_{n-1} \in \mathbb{Z}$, вытекают соотношения $c_0 = 0$ и

$$-\frac{1}{2^n} = \frac{c_{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{c_1}{2},$$

что невозможно. С другой стороны, если

$$r = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & z \end{pmatrix} \in R,$$

то $na \in \mathbb{Z}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{trace}(nr) = na + nz$ и $\det(nr) = na \cdot nz$ — целые числа. Поэтому nr — корень многочлена $x^2 - \operatorname{trace}(nr)x + \det(nr) \in \mathbb{Z}[x]$ по теореме Гамильтона—Кэли.

Заметим, что классы центрально существенных колец, PI колец и колец, являющихся алгебраическими или целыми над своим центром, строго содержат все коммутативные кольца.

Основным результатом данного подраздела является теорема 3.4.5. Для доказательства теоремы 3.4.5 нам потребуется следующий известный результат.

3.4.4. Теорема (см. [58, Theorem 5.3.9(ii)]). *Пусть F — поле характеристики $p > 0$. Если групповая алгебра FG удовлетворяет полиномиальному тождеству степени d, то существует такая подгруппа H в G, что $[G : H] \cdot |H'| < g(d)$, где $g(d)$ — некоторая функция целого числа d.*

3.4.5. Теорема. *Для любого простого целого числа p и каждого поля F характеристики p существует центрально существенная F-алгебра, которая не является PI кольцом и не является алгебраической над своим центром.*

Доказательство. Зафиксируем простое целое число p и поле F характеристики p. Обозначим через $Z(G)$ центр группы G.

Для любого положительного целого числа n мы построим группу $G = G(n)$ как указано ниже. Пусть $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$, $C = \langle c \rangle$ — такие три циклические группы, что $|A| = |B| = |C| = p^n$. Рассмотрим автоморфизм $\alpha \in \operatorname{Aut}(B \times C)$, определенный на образующих соотношениями $\alpha(b) = bc$ и $\alpha(c) = c$. Ясно, что α^n — тождественный автоморфизм; откуда имеем такой гомоморфизм $\varphi\colon A \to \operatorname{Aut}(B \times C)$, что $\varphi(a) = \alpha$. Этот гомоморфизм соответствует полупрямому произведению $G = (B \times C) \leftthreetimes A$, которое может рассматриваться как группа, порожденная элементами a, b, c, которые удовлетворяют соотношениям $a^{p^n} = a^{p^n} = c^{p^n} = 1$, $bc = cb$, $ac = ca$ и $aba^{-1} = bc$. Из этих соотношений следует, что $c \in Z(G)$. Непосредственно проверяется, что для любых целых чисел x, y, z, x', y', z' имеем

$$[b^y c^z a^x, b^{y'} c^{z'} a^{x'}] = b^y a^x b^{y'} a^{x'} a^{-x} b^{-y} a^{-x'} b^{-y'} =$$
$$= b^y (a^x b^{y'} a^{-x})(a^{x'} b^{-y} a^{-x'}) b^{-y'} = b^y (b^{y'} c^{xy'})(b^{-y} c^{-yx'}) b^{-y'} = c^{xy'-yx'}. \quad (3.4.5.1)$$

Таким образом, $Z(G) = G' = \langle c \rangle$ и G — группа класса нильпотентности 2.

Теперь пусть H — любая подгруппа группы G. Докажем, что

$$[G : H] \cdot |H'| \geqslant p^n. \quad (3.4.5.2)$$

Заметим, что $[G : HZ(G)] \leqslant [G : H]$ и $(HZ(G))' = H'$; следовательно, достаточно доказать неравенство (3.4.5.2) в случае, где $H \supseteq Z(G)$. Положим $\bar{G} = G/Z(G)$ и обозначим через $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{H}$ образы a, b, H при каноническом гомоморфизме G на группу $\bar{G}$. Мы также положим $\bar{B} = \langle \bar{b} \rangle$. Имеем $[G : H] = [\bar{G} : \bar{H}]$. Из стандартного изоморфизма $(\bar{H}\bar{B})/\bar{B} \cong \bar{H}/(\bar{H} \cap \bar{B})$ следует, что $\bar{H}/(\bar{H} \cap \bar{B})$ — циклическая группа, изоморфная некоторой подгруппе группы $\langle \bar{a} \rangle$. Группа $\bar{H} \cap \bar{B}$

также циклическая; следовательно, группа $\bar{H}$ порождается двумя элементами вида $\bar{b}^{p^m}$ и $\bar{a}^{p^k}\bar{b}^l$ для некоторых неотрицательных целых чисел k, l, m. Таким образом,

$$[\bar{G}:\bar{H}] = [\bar{G}:\bar{H}\bar{B}][\bar{H}\bar{B}:\bar{H}] = [\langle\bar{a}\rangle:\langle\bar{a}^{p^k}\rangle][\langle\bar{b}\rangle:\langle\bar{b}^{p^m}\rangle] = p^k p^m = p^{m+k}.$$

Если $m+k \geqslant n$, то выполняется неравенство (3.4.5.2). Если $m+k < n$, то в силу (3.4.5.1) и того, что элементы $a^{p^k}b^l$ и b^{p^m} содержатся в подгруппе H, то $[a^{p^k}b^l, b^{p^m}] = c^{p^{m+k}} \in H'$; поэтому $|H'| \geqslant |\langle c^{p^{m+k}}\rangle| = p^{n-m-k}$ и имеем

$$[G:H]\cdot|H'| \geqslant p^{m+k}\cdot p^{n-m-k} = p^n,$$

т. е. (3.4.5.2) также выполняется в этом случае.

Теперь достаточно взять прямое произведение групповых алгебр $FG(n)$, $n \in \mathbb{N}$, как кольцо R. Заметим, что прямое произведение любого множества колец центрально существенно в точности тогда, когда каждый сомножитель — центрально существенное кольцо. Поэтому кольцо R центрально существенно по теореме 3.2.9, b. Однако, если алгебра R удовлетворяет некоторому полиномиальному тождеству степени d, то для любого $n \in \mathbb{N}$ неравенство $p^n < g(d)$ следует из (3.4.5.2) и теоремы 3.4.4; это невозможно.

Теперь мы докажем, что построенное кольцо не является алгебраическим над его центром.

Хорошо известно (см., например, [62, Proposition 1.1.47] или [75, Lemma 5.2.6]), что если $m_1(R) = m < \infty$, то R удовлетворяет полиномиальному тождеству степени $d(m) = \frac{m(m+1)}{2} + m$.

Заметим, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует такое целое число n_m, что $p^{n_m} > g(d(m))$; кроме того, можно выбрать такие целые числа $n_1, n_2, \ldots$, что эти целые числа образуют возрастающую последовательность. По определению $d(m)$ существует элемент $r'_m \in FG(n_m)$, который не удовлетворяет любому соотношению вида (3.4.2.1) степени m. Теперь мы рассмотрим элемент

$$r = \prod_{n=1}^{\infty} r_n \in \prod_{n=1}^{\infty} FG(n),$$

где $r_n \in FG(n)$, $r_n = r'_m$, если $n = n_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и $r_n = 0$ в противном случае. Ясно, что если r удовлетворяет некоторому соотношению вида (3.4.2.1) степени m, то каждый элемент r_n удовлетворяет соотношению той же степени; это невозможно в силу выбора элемента r'_m. □

3.5. ЦС кольцо R с некоммутативным $R/J(R)$.

3.5.1. Предложение. *Пусть $\{R_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — произвольное множество колец,*

$$R = \prod_{\alpha\in A} R_\alpha,$$

и пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ принадлежит свободному кольцу $\mathbb{Z}\langle X\rangle$ со счетным множеством свободных образующих. Если для любого $m \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много таких индексов $\alpha \in A$, что кольцо R_α не удовлетворяют тождеству $f(x_1,\ldots,x_n)^m$, то кольцо $R/K(R)$ не удовлетворяют тождеству $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Доказательство. По предположению для любого $m \in \mathbb{N}$ существует такой индекс $\alpha = \alpha_m \in A$, что $f(r_1^{(m)},\ldots,r_n^{(m)})^m \neq 0$ для некоторого $r_1^{(m)},\ldots,r_n^{(m)} \in R_\alpha$ и все индексы α_m, $m \in \mathbb{N}$, могут быть выбраны попарно различными.

Для любого $i = 1,\ldots,n$ положим

$$s_i = \prod_{\alpha\in A} s_\alpha^{(i)},$$

где

$$s_\alpha^{(i)} = \begin{cases} r_i^{(m)}, & \text{для } \alpha = \alpha_m \text{ для некоторого } m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.5.1.1}$$

Тогда

$$f(s_1,\ldots,s_n) = \prod_{\alpha\in A} f(s_\alpha^{(1)},\ldots,s_\alpha^{(n)}).$$

Из (3.5.1.1) следует, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует такой индекс $\alpha \in A$, что $f(s_\alpha^{(1)}, \ldots, s_\alpha^{(n)})^m \neq 0$; поэтому $f(s_1, \ldots, s_n)^m \neq 0$ и, следовательно, $f(s_1, \ldots, s_n) \notin K(R)$. □

3.5.2. Предложение. *При условиях предложения 3.5.1 кольцо $R[t]/J(R[t])$ не удовлетворяет тождеству $f(x_1, \ldots, x_n)$.*

Доказательство. Для доказательства можно использовать теорему Амицура [10], в силу которой для произвольного кольца R имеем, что $J(R[t]) = I[t]$ для некоторого ниль-идеала I кольца R, откуда $J(R[t]) \subseteq K(R)[t]$. Однако для наших целей достаточно использовать следующее элементарное замечание: если $r \in J(R[t]) \cap R$, то элемент $1 - rt$ обратим. Запишем $(1 - rt)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_m t^m) = 1$ и сравним коэффициенты при степенях t. Получаем, что $a_0 = 1$, $a_i = r^i$ для $i = 1, \ldots, m$ и $r^{m+1} = 0$, т. е. r — нильпотентный элемент. Поэтому $R \cap J(R[t]) \subseteq K(R)$. Однако кольцо $R/K(R)$ не удовлетворяют тождеству $f(x_1, \ldots, x_n)$, Поэтому кольцо $R[t]/J(R[t])$ не удовлетворяет этому тождеству. □

3.5.3. Теорема. *Существует такое центрально существенное кольцо R, что кольцо $R/J(R)$ не является PI кольцом. Следовательно, кольцо $R/N(R)$ также не является PI кольцом (в частности, кольца $R/J(R)$ и $R/N(R)$ некоммутативны).*

Доказательство. Воспользуемся последовательностью колец из леммы 3.4.5.

Заметим, что прямое произведение любого множества колец центрально существенно в точности тогда, когда каждый из прямых сомножителей произведения — центрально существенное кольцо. Поэтому кольцо $R = \prod_{n \in \mathbb{N}} FG(n)$ центрально существенно в силу первого утверждения леммы 3.4.5.

Для любого полиномиального тождества $f(x_1, \ldots, x_n)$ степени d и каждого целого числа $m \in \mathbb{N}$ существует такое бесконечное множество чисел $k \in \mathbb{N}$, что тождество $f(x_1, \ldots, x_n)^m$ не выполняется в кольце $FG(k)$. Если кольцо $FG(k)$ удовлетворяет тождеству $f(x_1, \ldots, x_n)^m$, то оно также удовлетворяет полиномиальному тождеству степени dm, полученному линеаризацией этого тождества. В силу второго утверждения леммы 3.4.5 это невозможно для бесконечных множеств целых чисел k. Из предложения 3.5.2 следует, что $R[t]/J(R[t])$ не является PI кольцом.

Остается заметить, что кольцо многочленов от одной переменной над центрально существенным кольцом центрально существенно по замечанию 3.2.10, с. □

3.6. Локальные подалгебры треугольных алгебр. Данный подраздел основывается на статье [43]. В данном подразделе мы рассматриваем не обязательно унитальные кольца и изучаем локальные центрально существенные подалгебры алгебры $T_n(\mathbb{F})$ всех верхних треугольных матриц, где $\mathbb{F}$ — поле характеристики $\neq 2$. Такие подалгебры представляют интерес, поскольку при $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ они являются алгебрами квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения конечного ранга n. Алгебры квазиэндоморфизмов всех таких групп являются локальными матричными подалгебрами алгебры $M_n(\mathbb{Q})$ всех матриц порядка n над полем $\mathbb{Q}$; см., например, [36, Chapter I, § 5].

Заметим, что алгебра $\mathbb{Q}E$ — алгебра квазиэндоморфизмов сильно неразложимой абелевой группы без кручения простого ранга p в точности тогда, когда $\mathbb{Q}E$ изоморфна локальной подалгебре алгебры $T_p(\mathbb{Q})$. Действительно, $\mathbb{Q}E/J(\mathbb{Q}E) \cong \mathbb{Q}$ в этом случае; см. [21, Theorem 1.4.12], где $J(\mathbb{Q}E)$ — радикал Джекобсона, который нильпотентен, так как $\mathbb{Q}E$ артиново. Из теоремы Веддерберна—Мальцева[1] следует, что $\mathbb{Q}E \cong \mathbb{Q}E_p \oplus J(\mathbb{Q}E)$, где E_p — единичная матрица. Известно, что каждая нильпотентная подалгебра матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ над произвольным полем $\mathbb{F}$ преобразуется сопряжением в ниль-треугольную подалгебру; см. [68, Chapter 2, Theorem 6]. Так как диагональные матрицы локальной алгебры матриц имеют одинаковые элементы на главной диагонали, они преобразуются в себя при сопряжении. Следовательно, алгебры квазиэндоморфизмов таких абелевых групп реализуются как матричные подалгебры в точности тогда, когда эти подалгебры сопряжены с некоторой локальной подалгеброй алгебры $T_p(\mathbb{Q})$. Необходимую информацию об абелевых группах можно найти в [25] и [36].

[1] См., для примера, [19, Theorem 6.2.1].

Пусть $\mathbb{F}$ — поле и $\mathcal{A}$ — конечномерная алгебра над $\mathbb{F}$. Для ниль-алгебры $\mathcal{A}$ максимальный индекс нильпотентности $\nu(\mathcal{A})$ ее элементов называется *ниль-индексом*. Если $\mathcal{A}^k = (0)$ и $\mathcal{A}^{k-1} \neq (0)$, то k — *индекс нильпотентности* алгебры $\mathcal{A}$ и эта алгебра называется алгеброй *индекса нильпотентности* k.

Далее, $\mathcal{A}$ обозначает локальную подалгебру алгебры $T_n(\mathbb{F})$ и $N_n(\mathbb{F})$ обозначает подалгебру нильпотентных матриц в $\mathcal{A}$ (т. е. алгебру строго верхних треугольных матриц). Заметим, что любая матрица $A \in \mathcal{A}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Через E_{ij} обозначается матричная единица, т. е. матрица с 1 на позиции (i, j) и нулями на оставшихся позициях; E_k обозначает единичную $k \times k$ матрицу. Линейная оболочка подмножества S линейного пространства обозначается через $\langle S \rangle$.

3.6.1. Предложение. *Пусть $\mathcal{A}$ — локальная подалгебра алгебры $T_n(\mathbb{F})$ с радикалом Джекобсона $J(\mathcal{A})$. Алгебра $\mathcal{A}$ центрально существенна в точности тогда, когда $J(\mathcal{A})$ — центрально существенная алгебра.*

Доказательство. Пусть имеется матрица $A \in J(\mathcal{A})$ с $A \notin Z(J(\mathcal{A}))$. Так как $\mathcal{A}$ — центрально существенная алгебра, то существует такая матрица $B \in Z(\mathcal{A})$, что $0 \neq AB = C \in Z(\mathcal{A})$. Так как $J(\mathcal{A})$ — идеал, $C \in Z(J(\mathcal{A}))$. Если $B \notin J(\mathcal{A})$, то $A = CB^{-1} \in Z(J(\mathcal{A}))$; это противоречит выбору матрицы A.

Наоборот, пусть $\mathcal{A} = \mathbb{F}E_n \oplus J(\mathcal{A})$. Так как $\mathbb{F}E_n \subset Z(\mathcal{A})$,

$$Z(J(\mathcal{A})) \subset Z(\mathcal{A}). \tag{3.6.1.1}$$

Если $0 \neq A \in \mathcal{A}$ и $A \in Z(\mathcal{A})$, то $0 \neq AE_n \in Z(\mathcal{A})$. Пусть $A \notin Z(\mathcal{A})$ и $A \in J(\mathcal{A})$. Тогда существует такая матрица $B \in Z(J(\mathcal{A}))$, что $0 \neq AB = C \in Z(J(\mathcal{A}))$. Из соотношения (3.6.1.1) следует, что $B \in Z(\mathcal{A})$ и $C \in Z(\mathcal{A})$.

Пусть $A \notin J(\mathcal{A})$. Тогда $A = A' + A''$, где $0 \neq A' \in \mathbb{F}E_n$, $A'' \in J(\mathcal{A})$. Если $A'' = 0$, то $A \in Z(\mathcal{A})$. В противном случае $0 \neq A''B \in Z(J(\mathcal{A}))$ для некоторой $B \in Z(J(\mathcal{A}))$. Тогда

$$AB = A'B + A''B = BA' + BA'' = BA.$$

Так как $A'B, A''B \in Z(J(\mathcal{A}))$, имеем $AB \in Z(J(\mathcal{A})) \subset Z(\mathcal{A})$. Заметим, что $AB \neq 0$, так как матрица A обратима. □

Из предложения 3.6.1 следует, что проблема построения локальных центрально существенных подалгебр алгебры $T_n(\mathbb{F})$ эквивалентна проблеме построения центрально существенных подалгебр алгебры $N_n(\mathbb{F})$.

Пусть $\mathcal{A}$ — подалгебра алгебры $N_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности n. Допустим, что $\nu(\mathcal{A}) = n$. Существует такая матрица $A \in \mathcal{A}$, что $A^{n-1} \neq 0$. Преобразуем A к жордановой форме,

$$A = E_{12} + E_{23} + \ldots + E_{(n-1)n},$$

и перейдем к соответствующей сопряженной подалгебре $\mathcal{A}_c$. Обозначим через $\mathrm{Cen}(A)$ централизатор матрицы A в $\mathcal{A}_c$. Так как минимальный многочлен матрицы A совпадает с его характеристическим многочленом, то $\mathrm{Cen}(A) = \mathbb{F}[A]$, где $\mathbb{F}[A]$ — кольцо всех матриц, которые могут быть представлены в виде $f(A)$, $f(x) \in \mathbb{F}[x]$; см. [68, Chapter 1, Theorem 5]. Для $B \in \mathrm{Cen}(A)$ имеем

$$B = f(A) = \alpha_0 E_n + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_{n-1} A^{n-1}.$$

Кроме того, $\alpha_0 = 0$, так как матрица B нильпотентна.

3.6.2. Замечание. Если $Z(\mathcal{A}_c) = \mathrm{Cen}(A)$, то алгебра $\mathcal{A}_c$ коммутативна.

Доказательство. Действительно, если $A' \notin \mathrm{Cen}(A)$, то $AA' \neq A'A$. Однако $A \in \mathrm{Cen}(A) = Z(\mathcal{A}_c)$. Получено противоречие. □

3.6.3. Замечание. Пусть $\mathcal{A}_c$ — центрально существенная алгебра и $Z(\mathcal{A}_c) = \langle A^{n-1} \rangle$. Тогда алгебра $\mathcal{A}_c$ коммутативна.

Доказательство. Действительно, если $\mathcal{A}_c$ не коммутативна, то для матрицы $A' \notin Z(\mathcal{A}_c)$ имеем $BA' = 0$ для любой матрицы $B \in Z(\mathcal{A}_c)$. □

3.6.4. Замечание. Если $\mathbb{F}$ — поле характеристики $\neq 2$, то каждая центрально существенная подалгебра алгебры $N_3(\mathbb{F})$ коммутативна.

Доказательство. Каждая матрица $A \in N_3(\mathbb{F})$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{A}$ — некоммутативная центрально существенная подалгебра алгебры $N_3(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности 3. Тогда $\nu(\mathcal{A}) = 3$. Пусть матрица $A \in \mathcal{A}$ имеет индекс нильпотентности 3. Преобразуем A к жордановой форме: $A = E_{12} + E_{23}$. Теперь, если $B \in \mathrm{Cen}(A)$, то $B = \alpha_1 A + \alpha_2 A^2$. Заметим, что $Z(\mathcal{A}_c) \subseteq \mathrm{Cen}(A)$; кроме того, $\nu(Z(\mathcal{A}_c)) = 3$ по замечанию 3.6.3. Однако $Z(\mathcal{A}_c) = \mathrm{Cen}(A)$ и алгебра $\mathcal{A}_c$ коммутативна по замечанию 3.6.2. Получено противоречие. □

3.6.5. Замечание. Из замечания 3.6.4 следует, что все центрально существенные кольца эндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 3 коммутативны.

3.6.6. Предложение. *Любая центрально существенная подалгебра $\mathcal{A}$ алгебры $N_4(\mathbb{F})$ коммутативна.*

Доказательство. Если алгебра $\mathcal{A}$ имеет индекс нильпотентности 2, то она коммутативна. Пусть индекс нильпотентности алгебры $\mathcal{A}$ равен 3. Тогда $\nu(\mathcal{A}) = 3$, т. е. $\mathcal{A}$ содержит такую матрицу A, что $A^2 \neq 0$. Действительно, допустим противное, $A^2 = 0$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Если $A \notin Z(\mathcal{A})$, то $0 \neq AB \in Z(\mathcal{A})$ для некоторой матрицы $B \in Z(\mathcal{A})$. Тогда

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 = 2AB = 0.$$

Поэтому $AB = 0$. Получено противоречие.

Преобразуем матрицу A к жордановой форме,

$$A = E_{12} + E_{23}.$$

В соответствующей сопряженной подалгебре $\mathcal{A}_c$ централизатор $\mathrm{Cen}(A)$ состоит из матриц B вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix}; \tag{3.6.6.1}$$

см. [68, Chapter 3, § 1]. Кроме того, если $C \in Z(\mathrm{Cen}(A))$, то имеем

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6.6.2}$$

Пусть $Z(\mathcal{A}_c)$ имеет индекс нильпотентности 3. Тогда можно взять матрицу из $Z(\mathcal{A}_c)$ в качестве матрицы A; см. [68, Chapter 1, Proposition 5, Corollary]. В этом случае все матрицы из $\mathcal{A}_c$ содержатся в $\mathrm{Cen}(A)$. Тогда $\mathcal{A}_c$ состоит из матриц вида (3.6.6.1) и матриц из $Z(\mathcal{A}_c)$ вида (3.6.6.2). Если $B = (b_{ij}) \notin Z(\mathcal{A}_c)$ и $b_{12} = 0$, то $BC = 0$ для всех $C \in Z(\mathcal{A}_c)$. Тогда $\mathcal{A}_c$ не является центрально существенной алгеброй. Пусть $b_{12} \neq 0$ и $BD \neq DB$ для некоторой матрицы $D = (d_{ij}) \in \mathcal{A}_c$. Пусть $d_{12} = \lambda b_{12}$ и $F = \lambda B - D$, $F = (f_{ij})$. Тогда $f_{12} = 0$ и $F \notin Z(\mathcal{A}_c)$. Получено противоречие.

Пусть $Z(\mathcal{A}_c)$ имеет индекс нильпотентности 2. Тогда для $C \in Z(\mathcal{A}_c)$ мы получаем

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из соотношения $AC = CA$ для $A \in \mathcal{A}_c$ следует, что

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

Однако $AC = 0$ для любой матрицы $C \in Z(\mathcal{A}_c)$. Следовательно, если $\mathcal{A}_c$ — центрально существенная алгебра, то $\mathcal{A}_c$ коммутативна.

Пусть индекс нильпотентности алгебры $\mathcal{A}$ равен 4. Также, как и выше доказывается, что алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна, если $A^3 = 0$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Предположим, что $A^3 \neq 0$ для некоторой матрицы $A \in \mathcal{A}$. Преобразуем A к жордановой форме,

$$A = E_{12} + E_{23} + E_{34},$$

и перейдем к соответствующей сопряженной подалгебре $\mathcal{A}_c$. Для матрицы $B \in \mathrm{Cen}(A)$ имеем

$$B = \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{F}$. Из замечаний 3.6.2 и 3.6.3 следует, что $Z(\mathcal{A}_c) \neq \mathrm{Cen}(A)$ и $Z(\mathcal{A}_c) \neq \langle A^3 \rangle$, если алгебра $\mathcal{A}_c$ не коммутативна. Тогда любая матрица $C \in Z(\mathcal{A}_c)$ имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & c_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathcal{A}_c$ — центрально существенная алгебра, имеем, что для ненулевой матрицы $D \notin Z(\mathcal{A}_c)$ существует такая матрица $C \in Z(\mathcal{A}_c)$, что $0 \neq DC \in Z(\mathcal{A}_c)$. Так как матрица D нильпотентна, то $\operatorname{trace} D = 0$. Кроме того, $\mathcal{A}_c$ локальна; поэтому все элементы на главной диагонали матрицы D равны нулю. В этом случае непосредственно проверяется, что

$$D = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 0 & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 0 & 0 & 0 & d_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $d_{12} = 0$ и $D \notin Z(\mathcal{A}_c)$, то $DC = 0$ для любой матрицы $C \in Z(\mathcal{A}_c)$; получено противоречие. Пусть $d_{12} \neq 0$ и $DF \neq FD$ для некоторой матрицы $F = (f_{ij}) \in \mathcal{A}_c$. Найдем такой элемент $\lambda \in \mathbb{F}$, что $f_{12} = \lambda d_{12}$. Положим $G = \lambda D - F$, $G = (g_{ij})$. Тогда

$$FG = F(\lambda D - F) = \lambda FD - F^2, \quad GF = (\lambda D - F)F = \lambda DF - F^2.$$

Поэтому $G \notin Z(\mathcal{A}_c)$ и $g_{12} = 0$. Из полученного противоречия следует, что алгебра $\mathcal{A}_c$ коммутативна. □

3.6.7. Замечание. В теореме 2.2.3 доказано, что внешняя алгебра $\Lambda(V)$ над полем $\mathbb{F}$ характеристики $\neq 2$ — центрально существенная алгебра в точности тогда, когда размерность пространства V нечетна. Рассматривая регулярное матричное представление алгебры $\Lambda(V)$, мы получаем, что для нечетного положительного целого числа $n > 1$ существует некоммутативное центрально существенная подалгебра алгебры $N_{2^n}(\mathbb{F})$; также см. пример 3.7.11 ниже. Поэтому минимальный порядок матриц некоммутативной центрально существенной внешней алгебры равен 8.

Напомним, что для правого идеала I кольца R любой правый идеал J в R, максимальный относительно свойства $I \cap J = 0$, называется $\cap$-*дополнением* к I.

3.6.8. Пример. Существует некоммутативная центрально существенная алгебра 7×7 матриц, которая имеет замкнутый правый идеал, не являющийся идеалом.

Рассмотрим подалгебру $\mathcal{A}$ в $N_7(\mathbb{F})$, состоящей из матриц A вида

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d & e & f\\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & d\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть для $A'\in\mathcal{A}$ имеем $a'=a+1$, а остальные компоненты совпадают с соответствующими компонентами матрицы A. Тогда $AA'\neq A'A$, если $a\neq 0$ и $b\neq 0$. Таким образом, алгебра $\mathcal{A}$ некоммутативна. Нетрудно видеть, что в $Z(\mathcal{A})$ лежат матрицы C вида

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c & d & e & f\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $0\neq A\notin Z(\mathcal{A})$, то $0\neq AC\in Z(\mathcal{A})$ для некоторой матрицы $C\in Z(\mathcal{A})$. Следовательно, $\mathcal{A}$ — центрально существенная алгебра.

Рассмотрим правый идеал I в $\mathcal{A}$, состоящий из матриц вида

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & f\\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что I не является идеалом в $\mathcal{A}$. Кроме того, I — замкнутый правый идеал. В самом деле, идеал в $\mathcal{A}$, имеющий только элемент c в качестве ненулевой компоненты, есть $\cap$-дополнение к I.

В то же время замкнутый левый идеал J в $\mathcal{A}$, элементами которого являются матрицы

$$D=\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & f\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

не является идеалом. Идеал, имеющий только элемент c в качестве ненулевой компоненты, является $\cap$-дополнением также и для J.

3.6.9. Теорема. *Для любого поля $\mathbb{F}$ характеристики $\neq 2$ и произвольного положительного целого числа $n\geqslant 7$ существует локальная некоммутативная центрально существенная подалгебра алгебры $T_n(\mathbb{F})$ верхних треугольных $n\times n$ матриц.*

Доказательство. В $N_n(\mathbb{F})$ мы рассмотрим подалгебру $\mathcal{A}$ матриц A вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \dots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{13} & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что алгебра $\mathcal{A}$ не коммутативна; также см. пример 3.6.8. Если $B \in Z(\mathcal{A})$, то

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_{14} & b_{15} & \dots & b_{1n-2} & b_{1n-1} & b_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{1n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{1n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для $A = (a_{ij}) \notin Z(\mathcal{A})$ имеем $a_{12} \neq 0$, $a_{13} \neq 0$. Пусть $B = (b_{ij}) \in Z(\mathcal{A})$ и $b_{1n-2} = a_{12}$, $b_{1n-1} = a_{13}$. Тогда $0 \neq AB \in Z(\mathcal{A})$. Действительно, пусть $AB = C = (c_{ij})$, $BA = D = (d_{ij})$. Тогда $c_{ij} = d_{ij} = 0$ для всех $i \neq 1$, $j \neq n$. Кроме того, $c_{1n} = d_{1n} = a_{12}^2 + a_{13}^2$. Поэтому $\mathcal{A}$ — центрально существенная алгебра. □

3.7. Кольца эндоморфизмов абелевых групп. В данном подразделе мы изучаем абелевы группы A с центрально существенными кольцами эндоморфизмов $\operatorname{End} A$. Раздел основывается на статье [39].

Обозначим через $\operatorname{End} A$ кольцо эндоморфизмов абелевой группы A. Если $A = \bigoplus_{p \in P} A_p$ — разложение периодической абелевой группы A в прямую сумму p-компонент, то $\operatorname{supp} A = \{p \in P \mid A_p \neq 0\}$. Мы используем следующие обозначения: $\mathbb{Z}_{p^k}$ (соотв., Z_{p^k}) — кольцо вычетов (соотв., аддитивная группа по модулю p^k); $\mathbb{Q}$ (соотв., Q) — кольцо (соотв., аддитивная группа) рациональных чисел; Z_{p^∞} — квазициклическая абелева p-группа; $\hat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо p-адических целых чисел.

Абелева группа A называется *делимой*, если $nA = A$ для любого положительного целого числа n. Абелева группа называется *редуцированной*, если она не содержит ненулевых делимых подгрупп и *нередуцированной* в противном случае.

Подгруппа B абелевой группы A называется *чистой*, если уравнение $nx = b \in B$, которое имеет решение в группе A, также имеет решение в B.

3.7.1. Замечание. Пусть A — абелева группа, которая является либо периодической группой, либо нередуцированной группой, и пусть кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End} A$ центрально существенно. Ниже мы докажем, что кольцо $\operatorname{End} A$ коммутативно. Поэтому при изучении абелевых групп с некоммутативными центрально существенными кольцами эндоморфизмов только редуцированные группы без кручения и редуцированные смешанные группы представляют интерес.

В теореме 3.7.13, с ниже приведен пример абелевой группы без кручения конечного ранга с центрально существенным некоммутативным кольцом эндоморфизмов. В примере 3.7.15 ниже мы приводим дополнительные примеры некоммутативных центрально существенных колец эндоморфизмов некоторых абелевых групп без кручения бесконечного ранга.

Пусть A — абелева группа без кручения. *Псевдоцоколь* $\operatorname{PSoc} A$ группы A — это чистая подгруппа группы A, порожденная всеми ее минимальными чистыми вполне инвариантными подгруппами.

3.7.2. Лемма. *Пусть A — модуль и $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ — прямое разложение модуля A. Кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End} A$ центрально существенно в точности тогда, когда для каждого $i \in I$ все кольца $\operatorname{End} A_i$ центрально существенны и все A_i — вполне инвариантные подмодули в A.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{End} A = E$ — центрально существенное кольцо. Если A_i не является вполне инвариантным подмодулем для некоторого $i \in I$, то существует такой индекс $j \in I$, $j \neq i$, что $\operatorname{Hom}(A_i, A_j) = e_j E e_i \neq 0$, где e_i и e_j — проекции из модуля A на подмодули A_i и A_j соответственно. Кроме того,

$$e_i \cdot e_j E e_i = 0 \neq e_j E e_i = e_j E e_i \cdot e_i,$$

т. е. идемпотент e_i не централен; это противоречит 1.1.4.

Если A_i — вполне инвариантный подмодуль в A, $i \in I$, то $\operatorname{End} A \cong \operatorname{End} A_i \times \operatorname{End} \overline{A}_i$, где $\overline{A}_i$ — дополнительное прямое слагаемое для A_i. Ясно, что если кольцо $\operatorname{End} A_i$ не центрально существенно, то и $\operatorname{End} A$ не центрально существенно.

Допустим, что для любого $i \in I$ кольцо $\operatorname{End} A_i$ центрально существенно и A_i — вполне инвариантный подмодуль в A. Тогда $\operatorname{End} A \cong \prod_{i \in I} \operatorname{End} A_i$ и все кольца $\operatorname{End} A_i$ центрально существенны. Ясно, что $\operatorname{End} A$ тоже центрально существенно. □

3.7.3. Лемма. *Кольцо эндоморфизмов делимой абелевой группы A центрально существенно в точности тогда, когда $A \cong Q$ или $A \cong \oplus_p Z_{p^\infty}$ для различных простых чисел p.*

Доказательство. Пусть $A = F(A) \oplus T(A)$, где $0 \neq F(A)$ — часть без кручения и $0 \neq T(A)$ — периодическая часть группы A. Тогда подгруппа $F(A)$ в A не вполне инвариантна (см. [25, Theorem 7.2.3]) и, по лемме 3.7.2, кольцо $\operatorname{End} A$ не центрально существенно. Гипотетически, $F(A)$ или $T(A)$ — прямая сумма групп $\mathbb{Z}_p^\infty$ или $\mathbb{Q}$. Ясно, что если в первом случае число слагаемых больше 1, то $End(A)$ имеет нецентральный идемпотент. Та же ситуация имеет место, если группа имеет разложение в прямую сумму квазициклических групп не для различных простых p. □

Пусть $A = \bigoplus_{p \in P} A_p$ — разложение периодической абелевой группы A в прямую сумму ее примарных компонент. Из леммы 3.7.2 следует, что $\operatorname{End} A$ — центрально существенное кольцо в точности тогда, когда каждое кольцо $\operatorname{End} A_p$ центрально существенно.

3.7.4. Лемма. *Кольцо эндоморфизмов примарной абелевой группы A_p центрально существенно в точности тогда, когда $A_p \cong Z_{p^k}$ или $A_p \cong Z_{p^\infty}$.*

Доказательство. Если группа A_p не является неразложимой, то она имеет коциклическое прямое слагаемое; см. [25, Corollary 5.2.3]. Учитывая [25, Theorem 7.1.7, Example 7.1.3 и Theorem 7.2.3], видим, что это слагаемое и дополнительные к нему слагаемые вполне инвариантны в A. Следовательно, $A_p \cong Z_{p^k}$ или $A_p \cong Z_{p^\infty}$. Обратное очевидно, так как кольца $\mathbb{Z}_{p^k}$ и $\hat{\mathbb{Z}}_p$ коммутативны. □

3.7.5. Теорема. *Пусть $A = D(A) \oplus R(A)$ — нередуцированная абелева группа, где $0 \neq D(A)$ и $0 \neq R(A)$ — делимая и редуцированная части группы A соответственно. Кольцо эндоморфизмов группы A центрально существенно в точности тогда, когда $A = D(A) \oplus R(A)$, где $R(A) = \bigoplus_{p \in P'} Z_{p^k}$ и $D(A) \cong Q$ или $D(A) \cong \bigoplus_{p \in P''} Z_{p^\infty}$; P', P'' — подмножества различных простых чисел с условием $P' \cap P'' = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{End} A$ — центрально существенное кольцо. Проверим, что $D(A)$ и $R(A)$ — вполне инвариантные подгруппы в A. Действительно, хорошо известно, что $\operatorname{Hom}(D(A), R(A)) = 0$. Если $R(A)$ — группа без кручения, то $\operatorname{Hom}(R(A), D(A)) \neq 0$ (см. [25, Theorem 7.2.3]); это противоречит лемме 3.7.2. Также ясно, что $\operatorname{Hom}(R(A), D(A)) \neq 0$, если $R(A)$, $D(A)$ — периодические группы и $\operatorname{supp} R(A) \cap \operatorname{supp} D(A) \neq \varnothing$. Из леммы 3.7.4 следует, что $R(A)$ — прямая сумма его циклических p-компонент и из леммы 3.7.3 следует, что $D(A) \cong Q$ или $D(A) \cong \bigoplus_{p \in P} Z_{p^\infty}$.

Обратное утверждение следует из лемм 3.7.2—3.7.4. □

3.7.6. Следствие. *Кольцо эндоморфизмов нередуцированной абелевой группы центрально существенно в точности тогда, когда кольцо коммутативно. Иными словами, только редуцированные абелевы группы могут иметь некоммутативные центрально существенные кольца эндоморфизмов.*

Доказательство. Действительно, из теоремы 3.7.5 следует, что центрально существенное кольцо эндоморфизмов произвольной нередуцированной абелевой группы является прямым произведением колец, которыми могут быть только кольца $\mathbb{Z}_{p^k}$, $\mathbb{Q}$ и $\hat{\mathbb{Z}}_p$. □

3.7.7. Квазиразложения и сильная неразложимость. Пусть A и B — две абелевы группы без кручения. Говорят, что A *квазисодержится* в B, если $nA \subseteq B$ для некоторого положительного целого числа n. Если A квазисодержится в B и B квазисодержится в A (т. е. если $nA \subseteq B$ и $mB \subseteq A$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$), то говорят, что A *квазиравна* B (пишут $A \doteq B$). Квазиравенство $A \doteq \bigoplus_{i\in I} A_i$ называется *квазиразложением* (или *квазипрямым разложением*) абелевой группы A; эти подгруппы A_i называются *квазислагаемыми* группы A. Если группа A не имеет нетривиальных квазиразложений, то A называется *сильно неразложимой*. Кольцо $\mathbb{Q}\otimes\operatorname{End} A$ называется *кольцом квазиэндоморфизмов* группы A; обозначим его через $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$; подробности см. в [36, Chapter I, § 5]. Элементы кольца $\mathbb{Q} \otimes \operatorname{End} A$ называются *квазиэндоморфизмами* группы A. Заметим, что

$$\mathbb{Q}\operatorname{End} A = \{\alpha \in \operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(Q \otimes A) \mid (\exists n \in \mathbb{N})(n\alpha \in \operatorname{End} A)\}.$$

Хорошо известно [36, Proposition 5.2], что соответствие

$$A \doteq e_1A \oplus \ldots \oplus e_kA \to \mathbb{Q}\operatorname{End} A = \mathbb{Q}\operatorname{End} Ae_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}\operatorname{End} Ae_k$$

между конечными квазиразложениями группы без кручения A и конечными разложениями кольца $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$ в прямую сумму левых идеалов, где $\{e_i \mid i = 1, \ldots, k\}$ — полная ортогональная система идемпотентов кольца $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$, взаимно однозначно.

3.7.8. Предложение. *Кольцо эндоморфизмов E абелевой группы без кручения A центрально существенно в точности тогда, когда кольцо квазиэндоморфизмов $\mathbb{Q}E$ группы A центрально существенно.*

Доказательство. Пусть $0 \neq \tilde{a} \in \mathbb{Q}E$. Для некоторого $n \in \mathbb{N}$ имеем $n\tilde{a} = a \in E$ и существуют $x, y \in Z(E)$ с $ax = y \neq 0$. В этом случае $\tilde{a}\tilde{x} = \tilde{y}$, где $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = \frac{1}{n} \cdot y \in Z(\mathbb{Q}E)$, т. е. $\mathbb{Q}E$ — центрально существенное кольцо.

Наоборот, для каждого $0 \neq a \in E$ существуют ненулевые $\tilde{x}, \tilde{y} \in Z(\mathbb{Q}E)$ с $a\tilde{x} = \tilde{y}$. Кроме того, существуют такие $n, m \in \mathbb{N}$, что $n\tilde{x} \in Z(E)$ и $m\tilde{y} \in Z(E)$. Тогда $ax = y$, где $x = mn\tilde{x}, y = mn\tilde{y} \in Z(E)$. □

Пусть $A \doteq \bigoplus_{i=1}^{n} A_i = A'$ — разложение абелевой группы без кручения A конечного ранга в квазипрямую сумму сильно неразложимых групп (см., например, [36, Theorem 5.5]). Применяя лемму 3.7.2 и предложение 3.7.8, мы получаем, что кольцо $\operatorname{End} A$ центрально существенно в точности тогда, когда все подгруппы A_i вполне инвариантны в A', и каждое кольцо $\operatorname{End} A_i$ центрально существенно. Поэтому задача описания абелевых групп без кручения конечного ранга с центрально существенными кольцами эндоморфизмов сводится к аналогичной задаче для сильно неразложимых групп.

3.7.9. Предложение. *Пусть A — сильно неразложимая абелева группа и $A = \operatorname{PSoc} A$. Если кольцо $\operatorname{End} A$ центрально существенно, то кольцо $\operatorname{End} A$ коммутативно.*

Доказательство. Если $A = \operatorname{PSoc} A$, то $\operatorname{End} A$ — полупервичное кольцо (см., например, [36, Theorem 5.11]). По теореме 1.2.2 кольцо $\operatorname{End} A$ коммутативно. □

3.7.10. Замечания. Пусть R — локальное артиново кольцо с центром $Z(R) = C$ и R не является телом.

(a) Если R центрально существенно, то $R/J(R)$ коммутативно и $C \cap M \neq 0$ для каждого минимального идеала M.

(b) Если $R/J(R)$ коммутативно, $\operatorname{Soc}(R_C) = \operatorname{Soc}(R_R)$ и $C \cap M \neq 0$ для каждого минимального идеала M, то R центрально существенно.

Доказательство. (a) Пусть R центрально существенно. По теореме 1.3.2 $R/J(R)$ коммутативно. Так как R артиново, то идеал $J(R)$ нильпотентен; пусть k — индекс нильпотентности $J(R)$. Заметим, что если M — минимальный идеал в R, то $MJ(R) = 0$.

Допустим, что $C \cap M = 0$ для некоторого минимального идеала M. По условию для $0 \neq a \in M$ найдутся такие $x, y \in Z(R)$, что $ax = y \neq 0$. Так как $x \notin J(R)$ (иначе $ax = 0$), то элемент x обратим в R и $a = x^{-1}y \in C$; противоречие.

(b) Пусть $C \cap M \neq 0$ для каждого минимального идеала M. Проверим, что $M \subseteq C$. Пусть $C \cap M = K$. Так как по условию $R/J(R)$ коммутативно, то $rs - sr \in J(R)$ для всех $r, s \in R$. Тогда $k(rs - sr) = 0$ для каждого $k \in K$. Кроме того, поскольку $k \in C$, то $(kr)s = ksr = s(kr)$ и $kr \in C$. Аналогично, $rk \in C$. Кроме того, $kr \in M$ и $rk \in M$. Поэтому K — идеал. Из минимальности идеала M следует, что $K = M$ или $K = 0$. Но $K \neq 0$, откуда $K = M$, $M \subset C$. Поэтому $\operatorname{Soc} R_C = \operatorname{Soc} R_R \subseteq C$. По теореме 1.4.1(b) кольцо R центрально существенно. □

3.7.11. Пример. Найдем центрально существенные кольца эндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 2 и 3.

Если A — сильно неразложимая группа ранга 2, то кольцо $\operatorname{End} A$ коммутативно (см., например, [21, Theorem 4.4.2]). Следовательно, $\operatorname{End} A$ — центрально существенное кольцо. Пусть A — сильно неразложимая группа ранга 3. Тогда алгебра $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$ изоморфна одной из следующих $\mathbb{Q}$-алгебр (см. [8, Theorem 2]):

$$K \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$R \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$S \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & ky \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Q},\ 0 \neq k \in \mathbb{Q},\ k = \text{const} \right\},$$

$$T \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} : x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Кольца K, R, S коммутативны; следовательно, они центрально существенны. Кольцо T не коммутативно (кроме того, $\operatorname{PSoc} A$ имеет ранг 1). Имеем

$$J(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : y, z, t \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$Z(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{Q} \right\},$$

где M — минимальный правый идеал кольца T. Заметим, что кольцо $T/J(T)$ коммутативно, но $Z(T) \cap M = 0$. Из замечания 3.7.10, а следует, что кольцо T не центрально существенно. В результате мы получаем, что кольца эндоморфизмов сильно неразложимых групп ранга 2 или 3 центрально существенны в точности тогда, когда они коммутативны.

3.7.12. Пример. Пусть V — векторное $\mathbb{Q}$-пространство с базисом e_1, e_2, e_3 и пусть $\Lambda(V)$ — внешняя алгебра пространства V, т. е. $\Lambda(V)$ — алгебра с операцией $\wedge$, образующими e_1, e_2, e_3

и определяющими соотношениями

$$e_i \wedge e_j + e_j \wedge e_i = 0 \quad \text{для всех} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Тогда $\Lambda(V)$ — $\mathbb{Q}$-алгебра размерности 8 с базисом

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\}$$

и $\Lambda(V)$ — некоммутативное центрально существенное кольцо; см. введение, пример 2. Рассмотрим регулярное представление $\Lambda(V)$. Если $x \in \Lambda(V)$ и

$$x = q_0 \cdot 1 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + q_4 e_1 \wedge e_2 + q_5 e_2 \wedge e_3 + q_6 e_1 \wedge e_3 + q_7 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,$$

то матрица $A_x \in \mathrm{Mat}_8(\mathbb{Q})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 \\ 0 & q_0 & 0 & 0 & -q_2 & 0 & -q_3 & q_5 \\ 0 & 0 & q_0 & 0 & q_1 & -q_3 & 0 & -q_6 \\ 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & q_2 & q_1 & q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & -q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через R соответствующую подалгебру в $\mathrm{Mat}_8(\mathbb{Q})$. Ясно, что радикал $J(R)$ состоит из строго верхних треугольных матриц в R и $A_x \in Z(R)$ в точности тогда, когда $q_1 = q_2 = q_3 = 0$. Кроме того, $\operatorname{Soc} R_R = \{A_x = (a_{ij}) \in R \mid a_{ij} = 0,\ i \neq 1,\ j \neq 8\}$ и $\operatorname{Soc} R_C = \{A_x = (a_{ij}) \in Z(R) \mid a_{ii} = 0\}$. Так как $\operatorname{Soc}(R_C) \neq \operatorname{Soc} R_R$, то соответствующее условие замечания 3.7.10, b не является необходимым.

3.7.13. Теорема. *Пусть A — сильно неразложимая абелева группа без кручения конечного ранга, $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$ — кольцо квазиэндоморфизмов, и $A \neq \operatorname{PSoc} A$.*

(a) *Если $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$ — центрально существенное кольцо, то кольцо $\mathbb{Q}\operatorname{End} A/J(\mathbb{Q}\operatorname{End} A)$ коммутативно и $Z(\mathbb{Q}\operatorname{End} A) \cap M \neq 0$ для каждого минимального правого идеала M кольца $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$.*

(b) *Пусть кольцо $\mathbb{Q}\operatorname{End} A/J(\mathbb{Q}\operatorname{End} A)$ коммутативно,*

$$\operatorname{Soc}(\mathbb{Q}\operatorname{End} A_{\mathbb{Q}\operatorname{End} A}) = \operatorname{Soc}(\mathbb{Q}\operatorname{End} A_{Z(\mathbb{Q}\operatorname{End} A)})$$

и $Z(\mathbb{Q}\operatorname{End} A) \cap M \neq 0$ для каждого минимального правого идеала M кольца $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$. Тогда кольцо $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$ центрально существенно.

(c) *Пусть $n > 1$ — нечетное положительное целое число. Существует такая сильно неразложимая абелева группа без кручения $A(n)$ ранга 2^n, что ее кольцо эндоморфизмов — некоммутативное центрально существенное кольцо.*

Доказательство. (a), (b) Известно, что кольцо $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$ — локальное артиново кольцо (см., например, [36, Corollary 5.3]). Остается использовать 3.7.10.

(c) По теореме 2.2.3 внешняя алгебра $\Lambda(V)$ над полем F характеристики 0 или $p \neq 2$ — центрально существенное кольцо в точности тогда, когда размерность пространства V нечетна. Положим $F = \mathbb{Q}$. Известно (см., например, [59]), что каждая $\mathbb{Q}$-алгебра размерности n может быть реализована как кольцо квазиэндоморфизмов абелевой группы без кручения ранга n. Поэтому, учитывая пример 3.7.10 и предложение 3.7.8, мы получаем требуемое свойство. □

При условиях теоремы 3.7.13, если ранг группы A не содержит квадратов, то кольцо $\mathbb{Q}\operatorname{End} A/J(\mathbb{Q}\operatorname{End} A)$ коммутативно [21, Lemma 4.2.1]. Учитывая предложение 3.7.8, мы получаем следствие 3.7.14.

3.7.14. Следствие. *Пусть A — сильно неразложимая абелева группа без кручения конечного ранга, $A \neq \operatorname{PSoc} A$ и ранг группы A не содержит квадратов.*

(a) *Если кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End} A$ группы A центрально существенно, то $Z(\mathbb{Q}\operatorname{End} A) \cap M \neq 0$ для каждого минимального правого идеала M кольца $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$.*

(b) *Если для каждого минимального правого идеала M кольца $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$ имеем*

$$\operatorname{Soc}(\mathbb{Q}\operatorname{End} A_{\mathbb{Q}\operatorname{End} A}) = \operatorname{Soc}(\mathbb{Q}\operatorname{End} A_{Z(\mathbb{Q}\operatorname{End} A)}) \quad \text{и} \quad Z(\mathbb{Q}\operatorname{End} A) \cap M \neq 0,$$

то кольцо $\operatorname{End} A$ *центрально существенно.*

3.7.15. Пример. Пусть $R = \mathbb{Z}[x, y]$ — кольцо многочленов от двух переменных x и y. Мы используем конструкцию, описанную в [33, Proposition 7]. Рассмотрим кольцо

$$T(R) = \left\{ \begin{pmatrix} f & d_1(f) & g \\ 0 & f & d_2(f) \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} : f, g \in \mathbb{Z}[x, y] \right\},$$

где d_1, d_2 — два дифференцирования кольца $\mathbb{Z}[x, y]$,

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Кольцо $T(R)$ некоммутативно и $J(R) = e_{13}R \subseteq Z(T(R))$, где e_{13} — матричная единица [33, Corollary 8]. Если $0 \neq a \in T(R) \setminus Z(T(R))$, то $0 \neq ae_{13} \in Z(T(R))$. Поэтому $T(R)$ центрально существенно. Так как $T(R)$ — счетное кольцо с редуцированной аддитивной группой без кручения, из известной теоремы Корнера (см., например, [36, Theorem 29.2]) следует, что в кольце $T(R)$ существуют $\mathfrak{M}$ таких абелевых групп A_i, что $\operatorname{End} A_i \cong T(R)$ и $\operatorname{Hom}(A_i, A_j) = 0$ для всех $i \neq j$, где $\mathfrak{M}$ — произвольное наперед заданное кардинальное число; см. [17, 20]. Заметим, что кольцо эндоморфизмов прямой суммы таких групп также является некоммутативным центрально существенным кольцом.

4. Дистрибутивные и цепные кольца

4.1. Цепные артиновы кольца. Данный подраздел основывается на статье [50].

Следующий факт известен и проверяется непосредственно.

4.1.1. Цепные артиновы кольца. Для кольца R с нильпотентным радикалом Джекобсона J и индексом нильпотентности n для J равносильны условия:

(a) J^{k-1}/J^k — простой левый R-модуль для всех $k = 1, \ldots, n$ (полагаем, что $J^0 = R$);
(b) R — цепное слева, артиново слева кольцо;
(c) R — локальное кольцо и J — главный левый идеал.

4.1.2. Лемма. *Пусть R — цепное слева, артиново слева кольцо, $J = J(R) = R\pi$, $D = \overline{R}$ — тело, и пусть $\sigma\colon D \to D$ — отображение, определенное соотношением*

$$\sigma(\overline{r}) = \overline{a}, \quad \text{где} \quad a\pi = \pi r. \tag{4.1.2.1}$$

Тогда σ — гомоморфизм из тела D в себя.

Доказательство. Сначала заметим, что отображение σ определено корректно. Действительно, существование элемента a из (4.1.2.1) следует из того, что $R\pi$ — двусторонний идеал. Если $r, r' \in R$, $\pi r = a\pi$, $\pi r' = a'\pi$, и $\overline{r} = \overline{r'}$, то $(a - a')\pi = \pi(r - r') \in J^2$. Однако J/J^2 — одномерное линейное пространство над телом $\overline{R}$, порожденное элементом $\pi + J^2$; поэтому $\overline{a - a'} = 0$ и $\overline{a} = \overline{a'}$.

Далее, для любых элементов $r_1, r_2 \in R$ имеем

$$\sigma(r_1 + r_2)(\pi + J^2) = \pi(r_1 + r_2) + J^2 = \pi r_1 + \pi r_2 + J^2 = (\sigma(r_1) + \sigma(r_2))(\pi + J^2),$$
$$\sigma(r_1 r_2)(\pi + J^2) = \pi r_1 r_2 + J^2 = \sigma(r_1)(\pi r_2 + J^2) = \sigma(r_1)\sigma(r_2)(\pi + J^2).$$

Поэтому σ — кольцевой гомоморфизм. □

4.1.3. Замечание. Мы часто без специальных ссылок будем использовать тот факт, что для любого центрально существенного локального кольца R тело $\overline{R}$ является полем по теореме 1.3.2. В частности, это так, если R — цепное слева или справа центрально существенное кольцо.

4.1.4. Предложение. *Пусть R — цепное слева, артиново слева, центрально существенное кольцо, $C = Z(R)$, и пусть $J = J(R)$. Тогда гомоморфизм σ из леммы 4.1.2 — тождественный автоморфизм.*

Доказательство. Пусть c — такой элемент центра кольца R, что $c\pi \in C \setminus \{0\}$. Пусть r — произвольный элемент кольца R. Имеем $c = a\pi^k + b$, где $b \in J^{k+1}$ и $\overline{a} \neq 0$. Из соотношения $rc = cr$ следует, что $\overline{a}(\overline{r} - \sigma^k(\overline{r})) = 0$. Тогда $c\pi = a\pi^{k+1} + b\pi$ и из соотношения $r(c\pi) = (c\pi)r$ следует, что $\overline{a}(\overline{r} - \sigma^{k+1}(\overline{r})) = 0$. Поскольку $\mathrm{Ker}(\sigma) = 0$, то из соотношения $\sigma^k(\overline{r}) = \sigma^{k+1}(\overline{r})$ следует, что $\overline{r} = \sigma(\overline{r})$. □

4.1.5. Следствие. *Если цепное слева, артиново слева кольцо R центрально существенно, то R — цепное справа, артиново справа кольцо.*

Доказательство. Если $J(R) = R\pi$ для некоторого элемента $\pi \in J(R)$, то из предложения 4.1.4 следует, что $J(R) = \pi R + J(R)^2$ и $J(R) = \pi R$ в силу леммы Накаямы. Остается заметить, что выполняется правосторонний аналог условия c из 4.1.1. □

Напомним, что *левый аннулятор* подмножества S кольца R обозначается $\ell_R(S) = \{r \in R \mid rS = 0\}$. Правый аннулятор $r_R(S)$ определяется аналогично.

4.1.6. Предложение. *Пусть R — артиново слева, цепное слева кольцо с радикалом Джекобсона J и центром $C = Z(A)$, n — индекс нильпотентности идеала J. Если $J^{[n/2]} \subseteq C$, то R центрально существенно.*

Доказательство. Сначала заметим, что $\ell_R(J^k) = r_R(J^k) = J^{n-k}$ для любого $k = 0, 1, \ldots, n$. В частности,

$$\ell_R(J^{[n/2]}) \subseteq J^{[n/2]}.$$

Пусть $0 \neq r \in R$. Если $r \in J^{[n/2]}$, то $r \in C$. Если $r \notin J^{[n/2]}$, то выше было замечено, что $r \notin \ell_R(J^{[n/2]})$. Поэтому $rJ^{[n/2]} \neq 0$ и $rJ(R)^{[n/2]} \subseteq J(R)^{[n/2]} \subseteq C$. В обоих случаях $rC \cap C \neq 0$. □

4.1.7. Открытый вопрос. Верно ли утверждение, обратное к предложению 4.1.6?

Теперь мы докажем, что существует некоммутативное цепное центрально существенное кольцо. Для этой цели мы используем конструкцию, аналогичную описанной в [33].

Для поля F напомним, что *дифференцирование* поля F — произвольный эндоморфизм аддитивной группы $(F, +)$, удовлетворяющий соотношению $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$ для любых элементов $f, b \in F$. Общие свойства дифференцирований приведены, например, в [74, § II.17]. Любое поле имеет *тривиальное* дифференцирование $F \to 0$. Пример нетривиального дифференцирования — обычное дифференцирование поля рациональных функций.

Для кольца R обозначим через $[a, b]$ *коммутатор* $ab - ba$ двух элементов a, b кольца R и обозначим через $[A, B]$ идеал кольца R, порожденный множеством $\{[a, b] \mid a \in A,\ b \in B\}$, где A, B — любые два подмножества в R. Для любых трех элементов $a, b, c \in R$ имеем следующие хорошо известные свойства коммутаторов: $[a, b] = -[b, a]$, $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$.

4.1.8. Пример. Пусть F — поле с нетривиальным дифференцированием δ. Тогда существует такое некоммутативное артиново цепное центрально существенное кольцо R, что $R/J(R) \cong F$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $f\colon F \to M_3(F)$ из поля F в кольцо 4×4 матриц над F, определенное соотношением

$$\forall a \in F \quad f(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \delta(a) & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что f — кольцевой гомоморфизм. Положим

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим подкольцо R кольца $M_4(F)$, порожденное множеством $f(F) \cup \{x\}$. Нетрудно видеть, что $xf(a) = f(a)x + f(\delta(a))x^3$ для любого $a \in A$. Поэтому $Rx = xR$, $(Rx)^4 = 0$ и $R/Rx \cong F$. Из 4.1.1 следует, что R — цепное артиново кольцо.

Поскольку $Rx^2 \subseteq Z(R)$, то из предложения 4.1.6 следует, что кольцо R центрально существенно. Наконец, если $a \in R$ и $\delta(a) \neq 0$, то $[x, f(a)] = f(\delta(a))x^3 \neq 0$; откуда кольцо R не является коммутативным. □

4.1.9. Предложение. *Пусть R — такое цепное артиново кольцо с радикалом $J = R\pi$, что $\overline{R}$ — поле и $[r, \pi] \in J^2$ для любого $r \in R$. Если кольцо R не является коммутативным, то поле F имеет нетривиальное дифференцирование.*

Доказательство. Пусть $\gamma\colon \overline{R} \to R$ — произвольное отображение, такое, что $\overline{\gamma\overline{r}} = \overline{r}$ для любого $r \in R$; другими словами, $\gamma(\overline{r})$ — фиксированный представитель смежного класса $r + J$. Без ограничения общности можно считать, что $\gamma(\overline{0}) = 0$. Положим $\Gamma = \gamma(\overline{R})$. Тогда любой элемент $r \in R$ единственным образом представим в виде суммы

$$r = \sum_{i=0}^{n-1} g_i \pi^i, \tag{4.1.9.1}$$

где $g_i \in \Gamma$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$ (допустим, что $\pi^0 = 1$). Действительно, $r - g_0 \in J$ для единственного элемента $g_0 = \overline{r}$. Далее, если $g_0, \ldots, g_{k-1}$ уже определены с помощью

$$s = r - \sum_{i=0}^{k-1} g_i \pi^i \in J^k,$$

где $0 < k < n$, то следующий коэффициент однозначно определен как $\gamma(\lambda)$ из соотношения

$$s + J^{k+1} = \lambda(\pi^k + J^{k+1}), \quad \lambda \in \overline{R}.$$

Для $k = n - 1$ мы получаем требуемое представление.

Допустим, что $\pi \notin Z(R)$. В силу (4.1.9.1) имеем $[\Gamma, \pi] \neq 0$. Пусть $n(R)$ — индекс нильпотентности радикала $J(R)$. Тогда $[\Gamma, \pi] = J^k$ для некоторого целого числа k такого, что $2 \leqslant k < n(R)$. Индукцией по положительному целому числу m мы докажем, что $[\Gamma, \pi^m] \subseteq J^{m-1+k}$ для любого $m > 0$. Действительно, это верно для $m = 1$ в силу выбора k. Далее, для любого $g \in \Gamma$ имеем

$$[g, \pi^{m+1}] = \pi[g, \pi^m] + [g, \pi]\pi^m \in JJ^{m-1+k} + J^k\pi^m \subseteq J^{m+k}.$$

Таким образом, для любых $g, h \in \Gamma$ имеем $[g, [h, \pi]] = [g, x\pi^k]$ для некоторого $x \in R$. Поэтому

$$[g, [h, \pi]] = [g, x]\pi^k + x[g, \pi^k] \in J\pi^k + J^{2k-1} \subseteq J^{k+1},$$

поскольку $k \geqslant 2$. Получаем, что

$$[hg, \pi] = h[g, \pi] + g[h, \pi] - [g, [h, \pi]] \in h[g, \pi] + g[h, \pi] + J^{k+1}. \tag{4.1.9.2}$$

Поскольку J^k/J^{k+1} — простой левый модуль, то он является одномерным левым векторным пространством над полем $\overline{R}$ с базисом из одного элемента $v = \pi^k + J^{k+1}$. Определим отображение $\delta_\pi\colon \overline{R} \to \overline{R}$ правилом

$$[\gamma(\overline{r}), \pi] + J^{k+1} = \delta_\pi(\overline{r})v$$

для любого $r \in R$. Если $r \in R\pi^m$ для некоторого $m > 0$, то коэффициенты $g_0, \ldots, g_{m-1}$ из представления (4.1.9.1) равны 0; поэтому

$$[r, \pi] = \sum_{i=m}^{n-1} [g_i, \pi]\pi^i \in J^{k+m}.$$

Поэтому для любых $r, s \in R$ имеем

$$[\gamma(\overline{r})\gamma(\overline{s}), \pi] + J^{k+1} = [\gamma(\overline{rs}), \pi] + J^{k+1} = \delta_\pi(\overline{rs})v.$$

С другой стороны, из (4.1.9.2) следует, что

$$[\gamma(\overline{r})\gamma(\overline{s}), \pi] = \gamma(\overline{r})[\gamma(\overline{s}), \pi] + [\gamma(\overline{r}), \pi]\gamma(\overline{s}) + J^{k+1} = (\overline{r}\delta_\pi(\overline{s}) + \overline{s}\delta_\pi(\overline{r}))v;$$

откуда $\delta_\pi(\overline{rs}) = \overline{r}\delta_\pi(\overline{s}) + \overline{s}\delta_\pi(\overline{r})$. Соотношение $\delta_\pi(\overline{r} + \overline{s}) = \delta_\pi(\overline{r}) + \delta_\pi(\overline{s})$ проверяется аналогично. Следовательно, δ_π — нетривиальное дифференцирование поля $\overline{R}$.

Допустим, что $\pi \in Z(R)$. Тогда $[\Gamma, \Gamma] = J^k$ где $1 \leqslant k < n(R)$. Выберем такой элемент $f \in \Gamma$, что $[\Gamma, f] \not\subseteq J^{k+1}$ и определим новое отображение $\delta_f \colon \overline{R} \to \overline{R}$ правилом

$$[\gamma(\overline{r}), f] + J^{k+1} = \delta_f(\overline{r})v$$

для любого $r \in R$, где $v = \pi^k + J^{k+1}$. Проверим, что δ_f — дифференцирование. Сначала заметим, что $[J, \Gamma] \subseteq J^{k+1}$, поскольку для $r \in J$ имеем $g_0 = 0$ в представлении (4.1.9.1) и

$$[r, g] = \sum_{i=1}^{n-1} [g_i, g]\pi^i \in \sum_{i=1}^{n-1} J^k\pi^i = J^{k+1}$$

для любого $g \in \Gamma$. Получаем, что для любых $r, s \in R$ имеем

$$[\gamma(\overline{r})\gamma(\overline{s}), f] + J^{k+1} = [\gamma(\overline{rs}), f] + J^{k+1} = \delta_f(\overline{rs})v.$$

С другой стороны, для любых $r, s \in R$ имеем

$$\begin{aligned}
[\gamma(\overline{r})\gamma(\overline{s}), f] &= \gamma(\overline{r})[\gamma(\overline{s}), f] + [\gamma(\overline{r}), f]\gamma(\overline{s}) = \\
&= \gamma(\overline{r})[\gamma(\overline{s}), f] + \gamma(\overline{s})[\gamma(\overline{r}), f] - [\gamma(\overline{s}), [\gamma(\overline{r}), f] \in \\
&\in \gamma(\overline{r})[\gamma(\overline{s}), f] + \gamma(\overline{s})[\gamma(\overline{r}), f] + [\Gamma, J] \subseteq \\
&\subseteq \gamma(\overline{r})[\gamma(\overline{s}), f] + \gamma(\overline{s})[\gamma(\overline{r}) + J^{k+1} = \\
&= (\overline{r}\delta_f(\overline{s}) + \overline{s}\delta_f(\overline{r}))v.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\delta_f(\overline{rs}) = \overline{r}\delta_f(\overline{s}) + \overline{s}\delta_f(\overline{r})$. Соотношение $\delta_f(\overline{r} + \overline{s}) = \delta_f(\overline{r}) + \delta_f(\overline{s})$ проверяется аналогично. Доказано, что δ_f — нетривиальное дифференцирование поля $\overline{R}$. □

Для поля F известно (см., например [74, § II.17]), что в F нет нетривиальных дифференцирований, если F — сепарабельное алгебраическое расширение своего простого подполя (все конечные поля и все поля алгебраических чисел — такие поля) или F — совершенное поле (т. е. $\operatorname{char} F = p > 0$ и $F^p = F$).

4.1.10. Теорема. *Поле F не имеет нетривиальных дифференцирований в точности тогда, когда любое цепное слева, артиново слева, центрально существенное кольцо R с $R/J(R) \cong F$ коммутативно.*

Доказательство. Теорема 4.1.10 следует из предложений 4.1.9 и 4.1.4. □

Для кольца R и любого элемента r (соотв., подмножества S) в R положим $\overline{r} = r + J(R) \in R/J(R)$ (соотв., $\overline{S} = \{\overline{s} \mid s \in S\}$). В частности, $\overline{R} = R/J(R)$.

4.1.11. Теорема. (a) *Любое цепное слева, центрально существенное конечное кольцо R коммутативно.*

(b) *Существует некоммутативное цепное артиново центрально существенное кольцо.*

Доказательство. (a) Для конечного локального кольца R тело $\overline{R}$ является полем по теореме Веддерберна [31, Theorem 3.1.1]; кроме того, это поле не имеет ненулевых дифференцирований. Тогда кольцо R коммутативно по теореме 4.1.10.

Утверждение (b) следует из 4.1.8. □

4.2. Цепные нётеровы кольца. Данный подраздел основывается на статьях [50] и [52].

4.2.1. Замечания. (a) Непосредственно проверяется, что A — цепное справа (соотв., слева), нётерово справа (соотв., слева) кольцо в точности тогда, когда R — локальное кольцо главных правых (соотв., левых) идеалов.

(b) Из a и теоремы 1.2.2 следует, что центрально существенные цепные нётеровы полупервичные кольца совпадают с коммутативными локальными областями главных правых идеалов.

(c) Существуют цепные справа, нётеровы справа кольца, которые не являются ни первичными кольцами, ни артиновыми справа кольцами; см., например [69, Example 9.10(3)].

Для удобства приведем краткие доказательства следующих двух хорошо известных утверждений.

4.2.2. Замечания. (a) Пусть A — цепное справа кольцо и B — вполне первичный идеал кольца A. Тогда $B = aB$ для каждого $a \in A \setminus B$.

(b) Пусть A — коммутативная область, обладающая ненулевым конечно порожденным делимым A-модулем M без кручения. Тогда A — поле.

Доказательство. (a) Пусть $a \in A \setminus B$. Поскольку $aA \not\subseteq B$, имеем $B \subseteq aA$. Поэтому для каждого $x \in B$ существует элемент $b \in A$ с $x = ab$. Поскольку B — вполне первичный идеал, $b \in B$ и $x \in aB$.

(b) Допустим противное. Тогда A имеет ненулевой максимальный идеал $\mathfrak{m}$ и M естественно превращается в ненулевой конечно порожденный модуль над локальным кольцом $R_{\mathfrak{m}}$ с радикалом $J = \mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$. Поскольку модуль M делим, имеем, что $MJ \supseteq M\mathfrak{m} = M$ и $M = 0$ по лемме Накаямы. Получено противоречие. □

4.2.3. Лемма. *Пусть A — локальное кольцо и пусть $J(A) = \pi A$ для некоторого элемента $\pi \in A$ индекса нильпотентности n (возможно, $n = \infty$). Для любых двух целых чисел k, ℓ и произвольных элементов $a, b \in A$ таких, что $k, \ell \geqslant 0$, $k + \ell < n$, $a \in \pi^k A \setminus \pi^{k+1}A$ и $b \in \pi^l A \setminus \pi^{\ell+1}A$, имеем $ab \in \pi^{k+\ell}A \setminus \pi^{k+\ell+1}A$.*

Доказательство. Из включения $A\pi \subseteq \pi A$ следует, что $ab \in \pi^{k+\ell}A$. Если $\pi^m \in \pi^{m+1}A$ для некоторого $m \geqslant 0$, то ясно, что $\pi^m(1 - \pi t) = 0$ для некоторого $t \in A$ и $\pi^m = 0$, поскольку $1 - \pi t \in A^*$. Положим $a = \pi^k r$ и $b = \pi^\ell s$ для некоторых $r, s \in A \setminus J(A)$. Тогда $r, s \in A^*$, поскольку кольцо A локально и $r\pi^\ell \in \pi^l A \setminus \pi^{\ell+1}A$. Следовательно, $r\pi = \pi r'$ для некоторого $r' \in A^*$ и $ab = \pi^{k+\ell} r's$. Остается заметить, что $ab \notin \pi^{k+\ell+1}A$, поскольку $r's \in A^*$ и $\pi^{k+\ell} \neq 0$. □

4.2.4. Лемма. *Цепное справа, артиново справа, центрально существенное кольцо является цепным слева, артиновым слева кольцом.*

Доказательство. Пусть A — цепное справа, артиново справа, центрально существенное кольцо, $N = J(A)$, и пусть n — индекс нильпотентности идеала N. Если $n = 1$, то кольцо A коммутативно по теореме 1.2.2; в этом случае доказывать нечего. Любое цепное справа кольцо является локальным кольцом; поэтому каждый элемент кольца $A \setminus N$ обратим. Пусть $n > 1$, т. е. $N \neq 0$. Поскольку нётерово справа (например, артиново справа) цепное справа кольцо — кольцо главных правых идеалов, $N = \pi A$ для некоторого элемента $\pi \in N$. Существуют два элемента $x, y \in Z(A)$ такие, что $\pi x = y \neq 0$. Пусть $x \in N^k \setminus N^{k+1}$ для некоторого k, $0 \leqslant k < n$. Тогда $y \in N^{k+1}$, откуда $k + 1 < n$. Если $[a, \pi] \notin N^2$, то из леммы 4.2.3 следует, что $[a, \pi]x \notin N^{k+2}$; следовательно, $[a, \pi]x \neq 0$. Однако $[a, \pi]x = [a, \pi x] = [a, y] = 0$. Получено противоречие; поэтому $[a, \pi] \in N^2$ для каждого $a \in A$. Следовательно, $N = A\pi + N^2$, откуда $N/A\pi = N(N/a\pi) = \ldots = N^n(N/A\pi) = 0$, т. е. $N = A\pi$. Из левостороннего аналога леммы 4.2.3 следует, что каждый левый идеал кольца A совпадает с одним из идеалов $A, N, N^2, \ldots, N^{n-1}, \{0\}$, т. е. A — цепное слева, артиново слева кольцо. □

4.2.5. Теорема. *Для кольца A эквивалентны условия:*

(a) *A — цепное справа, нётерово справа, центрально существенное кольцо.*

(b) *A — цепное слева, нётерово слева, центрально существенное кольцо.*
(c) *A — коммутативная локальная область главных идеалов или цепное артиново кольцо.*

Доказательство. Достаточно доказать эквивалентность условий (a) и (c).

(c)⇒(a). Импликация проверяется непосредственно.

(a)⇒(c). Положим $N = \operatorname{Sing} A_A$. Идеал N нильпотентен; см., например [69, 9.2]. Из 1.1.2, c, d следует, что идеал N вполне первичен и содержит все делители нуля кольца R и кольцо A/N — коммутативная область.

Поэтому предложение верно при $N = 0$. Теперь пусть $N \neq 0$. Обозначим через n индекс нильпотентности идеала N. Тогда $0 \neq N^{n-1} \subseteq \ell.\operatorname{Ann}_A(N)$. Из 1.1.2, e следует, что $N^{n-1} \subseteq Z(A)$. Далее, для каждого $a \in A \setminus N$ имеем $N = aN$ по замечанию 4.2.2 (a), откуда $N^{n-1} = aN^{n-1} = N^{n-1}a$. Следовательно, N^{n-1} — делимый правый (A/N)-модуль и N^{n-1} — (A/N)-модуль без кручения, поскольку все делители нуля кольца A содержатся в N. По замечанию 4.2.2 (b) кольцо A/N — поле и каждый из циклических (A/N)-модулей (N^{k-1}/N^k) для $k = 1, \ldots, n$ — простой модуль. Следовательно, цепное справа кольцо A является артиновым справа. По лемме 4.2.4 A — цепное артиново кольцо. □

4.2.6. Пример. Пусть F — поле и $D_1, D_2 \colon F \to F$ — два дифференцирования поля F с несравнимыми ядрами (например, можно взять поле рациональных функций $\mathbb{Q}(x, y)$ от двух независимых переменных в качестве F и положить $D_1 = \partial/\partial x$, $D_2 = \partial/\partial y$).

Тогда для каждого положительного целого числа $n \geqslant 2$ существует такое некоммутативное цепное, артиново, центрально существенное кольцо A, что $A/J(A) \cong F$ и индекс нильпотентности идеала $J(A)$ равен n.

Доказательство. Мы используем конструкцию, аналогичную описанной в [33]. Пусть $N = 2n-1$, $R = M_N(F)$ — кольцо матриц порядка N над полем F, $e_{i,j}$ — матричная единица для любых $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, и пусть $f \colon F \to R$ — отображение, определенное правилом

$$f(\alpha) = \alpha E + D_1(\alpha)e_{1,N-1} + D_2(\alpha)e_{N-1,N}$$

для каждого $\alpha \in F$, где E — единичная матрица. Пусть A — подкольцо кольца R, порожденное множеством $f(F)$ и матрица

$$\pi = \sum_{i=1}^{n-1} e_{2i-1,2i+1}.$$

Непосредственно проверяется, что $\pi^n = 0$, $\pi^{n-1} = e_{1,N}$, $f(\alpha)\pi = \pi f(\alpha) = \alpha\pi$ и

$$[f(\alpha), f(\beta)] = (D_1(\alpha)D_2(\beta) - D_1(\beta)D_2(\alpha))\pi^{n-1}$$

для любых $\alpha, \beta \in F$. Из этих соотношений следует, что $\pi A = A\pi = J(A)$, $J(A)^k = \pi^k A = A\pi^k$ для всех $k = 1, \ldots, n-1$ и $\pi A \subseteq Z(A)$. Ясно, что A — цепное артиново кольцо. Если $a \in A \setminus \{0\}$ и $a \in \pi A$, то $a \in Z(A)$; в противном случае $a\pi^{n-1} \in Z(A) \setminus \{0\}$ и $X^{n-1} \in Z(A)$. Следовательно, кольцо A центрально существенно.

Наконец, если $\alpha \in \operatorname{Ker} D_2 \setminus \operatorname{Ker} D_1$ и $\beta \in \operatorname{Ker} D_1 \setminus \operatorname{Ker} D_2$, то

$$[f(\alpha), f(\beta)] = D_1(\alpha)D_2(\beta)X^{n-1} \neq 0,$$

т. е. кольцо A не является коммутативным. □

4.2.7. Замечание. Вплоть до конца подраздела 4.2 мы полагаем, что A — непростое кольцо и $\varphi \colon A \to A$ — такой инъективный гомоморфизм из кольца A в себя, что $\varphi(A \setminus \{0\}) \subseteq A^*$.

4.2.8. Кольца правых косых степенных рядов. Обозначим через $A_r[[x, \varphi]]$ кольцо правых косых степенных рядов в смысле [69, 9.8]; это кольцо состоит из всех формальных рядов

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k a_k, \quad a_k \in A,$$

сложение рядов является покомпонентным, а умножение естественно определено с помощью правила $ax^k = x^k\varphi^k(a)$.

4.2.9. Лемма. *Пусть A — непростое кольцо, $R = A_r[[x, \varphi]]$, и пусть I — ненулевой двусторонний идеал кольца R. Тогда $I = x^m B + x^{m+1}R$ для некоторого $n \geqslant 0$ и некоторого ненулевого правого идеала B кольца A, который является левым $\varphi^m(A)$-модулем (считаем, что φ^0 — тождественное отображение).*

Доказательство. Пусть $0 \neq I \lhd R$. Поскольку $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} x^m R = 0$, то существует такое целое число $m \geqslant 0$, что $I \subseteq x^m R$ и $I \not\subseteq x^{m+1}R$. Пусть $f \in I \setminus x^{m+1}R$. Из [69, 9.9(3)][1] следует, что $fR = x^m DR$ для некоторого ненулевого главного правого идеала D кольца A; кроме того, положим $E = R$, $n = m + 1$ и получим $fR \supseteq x^n R$. Остается положить $B = \{b \in A \mid x^m b + x^{m+1}R \subseteq I\}$. Домножим элементы из I слева и справа элементами кольца A и получим, что B — $(\varphi^m(A), A)$-под-бимодуль в A. □

4.2.10. Лемма. *Пусть A — непростое кольцо, $R = A_r[[x, \varphi]]$, и пусть $Z(A) \not\subseteq A^* \cup \{0\}$. Тогда $xR \cap Z(R) = 0$.*

Доказательство. Выберем $a \in Z(A) \setminus (A^* \cup \{0\})$. Пусть

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} x^i f_i \in xR \cap Z(R).$$

Тогда из соотношения $[a, f] = 0$ следует, что $\varphi^i(a) f_i = f_i a = a f_i$ для любого $i > 0$. Соотношение $a = \varphi^i(a)$ невозможно при $i > 0$, поскольку $a \notin A^* \cup \{0\}$ и кольцо A — область; поэтому $f_i = 0$ для всех $i > 0$, т. е. $f = 0$. □

4.2.11. Предложение. *Пусть A — непростое PI кольцо, $R = A_r[[x, \varphi]]$, и пусть I — идеал кольца R. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(a) $I \neq 0$.
(b) R/I — PI кольцо.

Доказательство. (a)⇒(b). По лемме 4.2.9 имеем, что $I \supseteq x^n R = (xR)^n$ для некоторого $n > 0$. Если $f(x_1, \ldots, x_t)$ — допустимое тождество кольца $A = R/xR$, то в кольце R/I выполняется допустимое тождество

$$f(x_1, \ldots, x_t) f(x_{t+1}, \ldots, x_{2t}) \ldots f(x_{(n-1)t+1}, \ldots, x_{nt}).$$

(b)⇒(a). Надо доказать, что в наших условиях R не является PI кольцом. Кольца A и R являются областями; см. [69, 9.9(1)].

Нам потребуется следующий хорошо известный факт (см. [61, Theorem 2]): *если S — полупервичное PI кольцо, и I — ненулевой двусторонний идеал кольца S, то $Z(S) \cap I \neq 0$.* Применяя его к собственному ненулевому идеалу B кольца A, получаем, что $0 \neq Z(A) \cap B \not\subseteq A^*$. По лемме 4.2.10 $xR \cap Z(R) = 0$; кроме того, xR — ненулевой двусторонний идеал полупервичного кольца R. Снова используя указанный факт, видим, что R не может быть PI кольцом. □

4.2.12. Предложение. *Пусть A — коммутативное непростое кольцо, $R = A_r[[x, \varphi]]$, и пусть I — идеал кольца R. Следующие условия эквивалентны":*

(a) $I \supseteq xR$.
(b) R/I — коммутативное кольцо.
(c) Кольцо R/I центрально существенно.

Доказательство. Импликации (a)⇒(b)⇒(c) проверяются непосредственно.

Допустим, что выполнено (c). Поскольку кольцо A не просто (в коммутативном случае это означает, что A не поле), то $A = Z(A) \not\subseteq A^* \cup \{0\}$, откуда $xR \cap Z(R) = 0$ по лемме 4.2.10; это невозможно в центрально существенном кольце. Поэтому $I \neq 0$.

[1] В [69, 9.9(3)] есть опечатка: корректное соотношение есть $M \subseteq N \Leftrightarrow$ либо $m > n$, либо $m = n$ и $D \subseteq E$.

По лемме 4.2.9 имеем $I = x^m B + x^{m+1}R$, где B — ненулевой идеал кольца A. Если $m = 0$, то выполняется (a). Допустим, что $m > 0$. Для любого элемента $r \in R$ положим $\widehat{r} = r + I \in \widehat{R} = R/I$. Поскольку $I \subseteq xR$, то можно отождествить элементы a и $\widehat{a}$ для любого $a \in A$. Тогда любой элемент кольца $\widehat{R}$ может рассматриваться как сумма $f = f_0 + \widehat{x}_1 f_1 + \ldots + \widehat{x}^m f_m$, где $f_i \in A$, $i = 0, 1, \ldots, m$, коэффициенты $f_0, \ldots, f_{m-1}$ определены однозначно и f_m определяется с точностью до слагаемого, которое является произвольным элементом из B. Пусть $f \in Z(\widehat{R})$. Из соотношения $[a, f] = 0$, где $a \in A$, следует, что $\varphi^i(a) f_i = f_i a = a f_i$ для любого $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Если a — ненулевой необратимый элемент кольца A, мы получаем $a \neq \varphi^i(a)$ для $i > 0$, откуда $f_1 = \ldots = f_{m-1} = 0$. В силу (c) существуют такие два элемента $c, d \in Z(\widehat{R})$, что $\widehat{x}c = d \neq 0$. Положим $c = c_0 + \widehat{x}^m c_m$. Тогда $d = \widehat{x}c = \widehat{x}c_0$, поскольку $\widehat{x}^{m+1} = 0$. Сначала допустим, что $m > 1$. Тогда из включения $d \in Z(\widehat{R})$ следует, что $c_0 = 0$ и $d = 0$; получено противоречие. Таким образом, $m = 1$. Пусть $c = c_0 + \widehat{x}c_1 \in Z(\widehat{R})$. Для $b \in B \setminus \{0\}$ из соотношения $[c, b] = 0$ следует, что $\widehat{x}(c_1 b - c_1\varphi(b)) = 0$; поэтому $c_1 b - c_1\varphi(b) \in B$ и $c_1\varphi(b) \in B$ и имеем $c_1 \in B$, поскольку элемент $\varphi(b)$ обратим, т. е. $c = c_0$.

Допустим, что B — собственный идеал кольца A. Тогда $\widehat{x} \neq 0$ и для некоторого $c_0 \in Z(\widehat{R})$ имеем $d = \widehat{x}c_0 \in Z(\widehat{R}) \setminus \{0\}$. Аналогично рассмотренному случаю с c, из соотношения $[d, b] = 0$ следует, что $c_0 \in B$, т. е. $d = 0$. Это противоречие показывает, что $B = A$ и $I = xA + x^2R = xR$. □

4.2.13. Пример. Существует цепное справа, нётерово справа, неполупримарное PI кольцо $\widehat{R}$ с первичным радикалом $\widehat{N}$ и радикалом Джекобсона $\widehat{M}$ такое, что $\widehat{R}$ не является центрально существенным и $\widehat{R}$ не является нётеровым слева или цепным слева кольцом, $\widehat{R}/\widehat{N}$ — коммутативная локальная область главных идеалов, $\widehat{N}$ — минимальный правый идеал, и $\widehat{N} = \widehat{M}\widehat{N} \neq \widehat{N}\widehat{M} = 0$.

Доказательство. Пусть A — непостое кольцо и $R = A_r[[x, \varphi]]$. Мы используем пример [69, 9.10], где $N = xR$ и $0 \neq NM \neq N$. Тогда $\widehat{R} = R/(NM)$ — PI кольцо по предложению 4.2.11; однако оно не является центрально существенным кольцом в силу предложения 4.2.12. □

4.2.14. Замечание. Используя предыдущие результаты, нетрудно проверить, что $J^{n-1} \subseteq C$ при выполнены условий 4.2.13. С другой стороны, следующий пример показывает, что из включения $J^{[n/2]+1} \subseteq C$ не всегда следует, что цепное слева артиново слева кольцо R центрально существенно.

4.2.15. Пример. Пусть $F = GF(4)$, $F_0 = GF(2) \subseteq F$, и пусть $\sigma\colon x \mapsto x^2$ — автоморфизм Фробениуса поля F. Рассмотрим кольцо косых многочленов $S = F[X, \sigma]$ и его факторкольцо $R = S/(X^3)$. Тогда R — цепное слева и справа кольцо, артиново справа и слева кольцо, $J(R)$ — нильпотентный идеал индекса нильпотентности 3, и $J(R)^{[\frac{3}{2}]+1} \subseteq Z(R)$; однако кольцо R не является центрально существенным.

Доказательство. Ясно, что $F = F_0[\theta]$, где θ — корень неприводимого многочлена $t^2 + t + 1 \in F_0[t]$. Обозначим через x образ переменной X при каноническом гомоморфизме из кольца S на R и отождествим элементы поля F с их образами в R. Непосредственно проверяется, что $J(R) = (x)$, $n = 3$ — индекс нильпотентности идеала $J = J(R)$ и левые (и правые) модули J/J^2 и J^2 являются одномерными векторными пространствами над $F = R/J$. Следовательно, R — цепное слева и справа, артиново слева и справа кольцо по 4.1.1. Рассмотрим элемент $r = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Из соотношения $x^3 = 0$ следует, что

$$[r, x] = rx - xr = (a_0 - \sigma(a_0))x + (a_1 - \sigma(a_1)x^2,$$
$$[r, \theta] = (a_1\sigma(\theta) - a_1\theta)x + (a_2\sigma^2(\theta) - \theta a_2)x^2 = a_1 x,$$

поскольку σ^2 — тождественный автоморфизм и $\sigma(\theta) = \theta + 1$. Поэтому $Z(R) = F_0 + Fx^2$, поскольку x и θ порождают кольцо R (как кольцо). Остается заметить, что $Z(R)x = F_0 x$ и $F_0 x \cap (F_0 + Fx^2) = 0$. □

4.3. Кольца с плоскими идеалами. Результаты данного подраздела основаны на [71].

4.3.1. Кольца слабой глобальной размерности $\leqslant 1$.

Для кольца R будем писать $\mathrm{w.gl.dim.}\, R \leqslant 1$, если R — *кольцо слабой глобальной размерности не более* 1, т. е. R удовлетворяет следующим эквивалентным[1] условиям:

(a) Для каждого конечно порожденного правого идеала X и любого конечно порожденного левого идеала Y кольца R естественный групповой гомоморфизм $X \otimes_R Y \to XY$ является изоморфизмом.

(b) Каждый конечно порожденный правый (соотв., левый) идеал кольца R — плоский[2] правый (соотв., левый) R-модуль.

(c) Каждый правый (соотв., левый) идеал кольца R — плоский правый (соотв., левый) R-модуль.

(d) Каждый подмодуль любого плоского правого (соотв., левого) R-модуля является плоским.

Поскольку каждый проективный модуль является плоским, то каждое (полу)наследственное[3] справа или слева кольцо имеет слабую глобальную размерность не более 1. Мы также напомним, что слабая глобальная размерность кольца R равна нулю в точности тогда, когда R — *регулярное по фон Нейману* кольцо, т. е. $r \in rRr$ для каждого элемента r кольца R. Регулярные по фон Нейману кольца широко используются в математике; см. [28, 35].

4.3.2. Теорема (см. [34, Theorem])**.** *Коммутативное кольцо R является кольцом слабой глобальной размерности не более* 1 *в точности тогда, когда R — арифметическое полупервичное кольцо.*

Ясно, что коммутативное кольцо дистрибутивно справа (соотв., слева) в точности тогда, когда кольцо арифметично.

4.3.3. Пример. Существует наследственное справа кольцо R, которое не является ни дистрибутивным справа, ни полупервичным; в частности, наследственное справа кольцо R имеет слабую глобальную размерность не более 1. Пусть F — поле и пусть R — 5-мерная F-алгебра, состоящая из всех 3×3 матриц вида

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{pmatrix},$$

где $f_{ij} \in F$. Кольцо R не является полупервичным, поскольку множество

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

— ненулевой нильпотентный идеал кольца R. Пусть e_{11}, e_{22} и e_{33} — обычные матричные единицы. Кольцо R не является дистрибутивным справа или слева, поскольку каждый идемпотент дистрибутивного справа или слева кольца централен, см. [67], но матричная единица e_{11} кольца R не центральна. Для доказательства того, что кольцо R наследственно справа, достаточно доказать, что R_R — прямая сумма наследственных правых идеалов. Имеем, что $R_R = e_{11}R \oplus e_{22}R \oplus e_{33}R$, где $e_{22}R$ и $e_{33}R$ являются проективными простыми R-модулями; в частности, $e_{22}R$ и $e_{33}R$ являются наследственными R-модулями. Любая прямая сумма наследственных модулей наследственна; см. [73, 39.7, p. 332]. Поэтому остается показать, что R-модуль $e_{11}R = e_{11}F + e_{12}F + e_{13}F$ является наследственным, что проверяется непосредственно.

Следующая лемма хорошо известна; см., например [69, Assertion 6.13].

---

[1] Эквивалентность этих условий хорошо известна; см., например [69, Theorem 6.12].

[2] Правый R-модуль X называется *плоским*, если для любого левого R-модуля Y естественный групповой гомоморфизм $X \otimes Y \to XY$ является изоморфизмом.

[3] Модуль M называется *наследственным* (соотв., *полунаследственным*), если все подмодули (соотв., конечно порожденные подмодули) модуля M проективны.

4.3.4. Лемма. *Пусть R — кольцо, у которого все главные правые идеалы являются плоскими. Если r и s — два элемента кольца R такие, что $rs = 0$, то существуют такие два элемента $a, b \in R$, что $a + b = 1$, $ra = 0$, и $bs = 0$.*

4.3.5. Лемма. *Существует цепное слева и справа первичное кольцо R, в котором есть неплоские главные правые идеалы.*

Доказательство. Существует цепное слева и справа первичное кольцо R с такими ненулевыми элементами r, s, что $rs = 0$; см. [1, p. 234, Corollary]. Цепное кольцо R локально; поэтому его необратимые элементы образуют радикал Джекобсона $J(R)$. В R не все главные правые идеалы являются плоским. Допустим противное. По лемме 4.3.4 существуют такие $a, b \in R$, что $a+b = 1$, $ra = 0$ и $bs = 0$. Тогда $aR \subseteq bR$ или $bR \subseteq aR$, причем $aR + bR = R = Ra + Rb$. Поэтому хотя бы один из элементов a, b локального кольца R обратим; в частности, этот обратимый элемент не является правым или левым делителем нуля. Это противоречит равествам $ra = 0$ и $bs = 0$. □

4.3.6. Лемма. *Пусть R — центрально существенное кольцо, в котором все главные правые идеалы являются плоскими. Тогда кольцо R не имеет ненулевых нильпотентных элементов.*

Доказательство. Допустим, что $r^2 = 0$ для некоторого ненулевого $r \in R$. Поскольку R центрально существенно, существуют такие ненулевые центральные элементы $x, y \in R$, что $rx = y$. Поскольку $r^2 = 0$, имеем $y^2 = (rx)^2 = r^2x^2 = 0$. Так как $y^2 = 0$, то по лемме 4.3.4 существуют такие элементы $a, b \in R$, что $a + b = 1$, $ry = 0$ и $by = yb = 0$. Тогда $y = y(a + b) = ya + yb = 0$. Противоречие. □

4.3.7. Теорема. *Для центрально существенного кольца R следующие условия эквивалентны.*

(a) *R — кольцо слабой глобальной размерности не более 1.*

(b) *R — дистрибутивное справа (соотв., слева) полупервичное кольцо.*

(c) *R — арифметическое полупервичное кольцо.*

Доказательство. (a)⇒(b). Поскольку R — центрально существенное кольцо слабой глобальной размерности не более 1, из леммы 4.3.6 следует, что кольцо R не имеет ненулевых нильпотентных элементов. В силу теоремы 1.2.2 центрально существенное полупервичное кольцо R коммутативно. В силу теоремы 4.3.2 R — арифметическое полупервичное кольцо. Любое коммутативное арифметическое кольцо дистрибутивно справа и слева.

Импликация (b)⇒(c) следует из того, что каждое дистрибутивное справа или слева кольцо арифметично.

(c)⇒(a). Поскольку R — центрально существенное полупервичное кольцо, из теоремы 1.2.2 следует, что кольцо R коммутативно; в частности, R центрально существенно. Кроме того, R арифметично. В силу теоремы 4.3.2 кольцо R имеет слабую глобальную размерность не более 1. □

4.3.8. Замечание. Из леммы 4.3.5 следует, что импликация (b)⇒(a) теоремы 4.3.7 не верна для произвольных колец.

4.3.9. Следствие. *Кольцо R является наследственным справа (соотв., слева), нётеровым справа (соотв., слева), центрально существенным кольцом в точности тогда, когда R — конечное прямое произведение коммутативных дедекиндовых областей. Следовательно, R является наследственным справа (соотв., слева), нётеровым справа (соотв., слева), неразложимым, центрально существенным кольцом в точности тогда, когда R — коммутативная дедекиндова область.*

Доказательство. Поскольку нётерово справа или слева кольцо R — конечное прямое произведение нётеровых справа или слева колец, можно считать, что R — нётерово справа или слева неразложимое кольцо. В этом случае хорошо известно, что R является коммутативным наследственным кольцом в точности тогда, когда R — коммутативная дедекиндова область. Теперь можно использовать теорему 4.3.7 и хорошо известный факт: каждый плоский модуль над нётеровым кольцом проективен. □

4.4. Дистрибутивные нётеровы кольца. Результаты данного подраздела основываются на статье [53].

4.4.1. Нётеровы полупервичные кольца. Кольцо R является дистрибутивным справа (соотв., слева), нётеровым справа (соотв., слева), полупервичным, центрально существенным кольцом в точности тогда, когда R — конечное прямое произведение коммутативных дедекиндовых областей. Следовательно, R — дистрибутивное справа (соотв., слева), нётерово справа (соотв., слева), неразложимое, центрально существенное кольцо в точности тогда, когда R — коммутативная дедекиндова область.

Доказательство. Утверждение следует из следствия 4.3.9 и следующего хорошо известного факта: коммутативное кольцо является дедекиндовой областью в точности тогда, когда R — коммутативная дистрибутивная нётерова область. □

4.4.2. Обозначение $^\cdot$. в 4.4.3 и 4.4.5. Пусть A — кольцо, X — правый A-модуль и X_1, X_2 — два подмножества в X. Подмножество $\{a \in A \mid X_1 a \subseteq X_2\}$ кольца A обозначается через $(X_1{}^\cdot\, .X_2)$. Если X_2 — подмодуль в X, то $(X_1{}^\cdot\, .X_2)$ — правый идеал кольца A. Если X_1 и X_2 — подмодули в X, то $(X_1{}^\cdot\, .X_2)$ — идеал в A.

Мы используем некоторые известные свойства дистрибутивных модулей и колец. Для удобства читателей эти свойства собраны в леммах 4.4.3, 4.4.4, 4.4.5.

4.4.3. Лемма (см. [67]). *Пусть A — кольцо и X — дистрибутивный правый A-модуль.*

(a) *Для любых двух элементов $x, y \in X$ существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$ и $xaA + ybA \subseteq xA \cap yA$. Следовательно, $A = (x^\cdot\, .yA) + (y^\cdot\, .xA)$ для любых элементов $x, y \in X$. В частности, если $xA \cap yA = 0$, то существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$ и $xaA = ybA = 0$.*

(b) $\mathrm{Hom}(Y, Z) = 0$ *для любых таких подмодулей Y, Z модуля X, что $Y \cap Z = 0$.*

(c) *Все идемпотенты кольца* $\mathrm{End}\, M$ *центральны. В частности, все идемпотенты любого дистрибутивного справа кольца центральны. Поэтому дистрибутивное справа кольцо A неразложимо в кольцевое прямое произведение в точности тогда, когда A не имеет нетривиальных идемпотентов.*

(d) *Если кольцо A локально, то M — цепной модуль. В частности, дистрибутивные справа локальные кольца совпадают с цепными справа кольцами.*

(e) *Если M — нетеров модуль, то M — инвариантный*[1] *модуль. В частности, любое дистрибутивное справа нетерово справа кольцо инвариантно справа.*

Доказательство. (a) Обозначим $T = xA \cap yA$. Так как

$$(x + y)A = (x + y)A \cap xA + (x + y)A \cap yA,$$

то существуют такие элементы $b, d \in A$, что

$$(x + y)b \in xA, \quad (x + y)d \in yA, \quad x + y = (x + y)b + (x + y)d.$$

Поэтому $yb = (x+y)b - xb \in T$ и $xd = (x+y)d - yd \in T$. Обозначим $a = 1 - b$ и $z = a - d = 1 - b - d$. Тогда

$$1 = a + b, \quad (x + y)z = (x + y) - (x + y)b - (x + y)d = 0,$$
$$xa = xd + xz = xd + (x + y)z - yz = xd - yz,$$
$$yz = -xz \in T, \quad xa \in T.$$

(b) Пусть $f \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$, $y \in Y$ и $z = f(y) \in Z$. По (a) существует такой элемент $a \in A$, что

$$yaA + z(1 - a)A \subseteq yA \cap zA \subseteq Y \cap Z = 0,$$
$$ya = z(1 - a) = 0, \quad z = za = f(y)a = f(ya) = f(0) = 0.$$

Поэтому $f \equiv 0$ и $\mathrm{Hom}(X, Y) = 0$.

[1] Модуль M называется **инвариантным**, если каждый его подмодуль вполне инвариантен в M.

(c) С помощью b утверждение проверяется непосредственно.

(d) Пусть $x, y \in X$. Достаточно доказать, что подмодули xA и yA сравнимы по включению. По a существуют такие элементы $a, b, c, d \in A$, что $1 = a + b$ и $xaA + ybA \subseteq xA \cap yA$. Так как кольцо A локально и $1 = a+b$, то хотя бы один из правых идеалов aA, bA совпадает с A. Поэтому выполнено хотя бы одно из включений $xA \subseteq yA$, $yA \subseteq xA$.

(e) Утверждение доказано в [67]. □

Следующая лемма 4.4.4 является непосредственным следствием леммы 4.4.3(d) и [15, Proposition 2].

4.4.4. Лемма (см. [15, Proposition 2]). *A — дистрибутивное справа, нётерово справа, полупервичное кольцо в точности тогда, когда A — конечное прямое произведение дистрибутивных справа, нётеровых справа, инвариантных справа областей.*

4.4.5. Лемма (см. [7, Lemma 20]). *Пусть A — инвариантное справа кольцо и M — дистрибутивный правый A-модуль.*

(a) *$A = (Y^{\cdot}.X) + (X^{\cdot}.Y)$ для любых конечно порожденных подмодулей X, Y модуля M.*

(b) *Для любого подмодуля Z' произвольного конечно порожденного подмодуля Z модуля M существует такой идеал A' кольца A, что $ZA' = Z'$.*

(c) *Если M — конечно порожденный модуль, то M — инвариантный модуль.*

Доказательство. (a) Так как $X + Y$ — конечно порожденный модуль, то существуют такое натуральное число n и элементы $x_i \in X$, $y_i \in Y$, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $X + Y = (x_1 + y_1)A + \ldots + (x_n + y_n)A$. Так как модуль M дистрибутивен, то $(X + Y) \cap Z = (X \cap Z) + (Y \cap Z)$ для любого подмодуля Z в M.

Пусть $y \in Y$. Для любых $1 \leqslant i \leqslant n$ имеем

$$(x_i + y)A = (x_i + y)A \cap (X + Y) = [(x_i + y)A \cap X] + ((x_i + y)A \cap Y].$$

Поэтому существуют такие элементы $a \in A$ и $z \in Y$, что

$$(x_i + y)a \in X, \quad x_i + y = (x_i + y)a + z.$$

Поэтому $x_i(1 - a) \in Y$ и $ya \in X$. Следовательно,

$$A = (yA^{\cdot}.X) + (x_iA^{\cdot}.Y), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Поэтому

$$A = (yA^{\cdot}.X) + [(x_1A^{\cdot}.Y) \cap \ldots \cap (x_nA^{\cdot}.Y)] = (yA^{\cdot}.X) + (X^{\cdot}.Y).$$

В частности,

$$A = (y_iA^{\cdot}.X) + (X^{\cdot}.Y) \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Поэтому

$$A = [(y_1A^{\cdot}.X) \cap \ldots \cap (y_nA^{\cdot}.X)] + (X^{\cdot}.Y) = (Y^{\cdot}.X) + (X^{\cdot}.Y).$$

(b) Пусть Z — n-порожденный модуль, $n \in \mathbb{N}$. Будем вести индукцию по n. При $n = 1$ мы можем отождествить циклический A-модуль Z над инвариантным справа кольцом A с инвариантным справа факторкольцом $A/r(Z)$ кольца A. В этом случае утверждение проверяется непосредственно.

Допустим, что утверждение верно для всех k-порожденных подмодулей в M при $k < n$. Можно считать, что $Z = X + Y$, где X — циклический модуль и Y — $(n-1)$-порожденный модуль. По предположению индукции существуют такие идеалы B и C кольца A, что $X \cap Y = XB = YC$. Поэтому $X \cap Y = X(X^{\cdot}.Y) = Y(Y^{\cdot}.X)$ По (a) $A = (Y^{\cdot}.X) + (X^{\cdot}.Y)$ и

$$X = X((Y^{\cdot}.X) + (X^{\cdot}.Y)) = X(Y^{\cdot}.X) + X(X^{\cdot}.Y) = X(Y^{\cdot}.X) + Y(Y^{\cdot}.X) = ZB,$$

где $B = (Y^{\cdot}.X)$. Аналогично $Y = ZC$, где $C = (X^{\cdot}.Y)$.

Пусть Z' — подмодуль в $Z = X + Y$. Надо доказать, что существует такой идеал H кольца A, что $Z' = (X + Y)H$. По условию $Z' = X \cap Z' + Y \cap Z'$. По предположению индукции существуют

такие идеалы D и E кольца A, что $Z' \cap X = XD$ и $Z' \cap Y = YE$. Кроме того, $X = ZB$ и $Y = ZC$. Поэтому

$$Z' = X \cap Z' + Y \cap Z' = XD + YE = ZBD + ZCE = Z(BD + CE)$$

и $BD + CE$ — требуемый идеал A' кольца A. □

4.4.6. Лемма (см. [7, Proposition 2]). *Для кольца A следующие условия эквивалентны.*

(a) *A — дистрибутивное справа, нётерово справа, конечномерное слева полупервичное кольцо.*
(b) *A — дистрибутивное слева, нётерово слева, конечномерное справа полупервичное кольцо.*
(c) *A — конечное прямое произведение инвариантных наследственных нётеровых областей.*

4.4.7. Лемма. *Пусть A — дистрибутивное справа нётерово справа полупервичное кольцо и каждый ненулевой левый идеал кольца A содержит ненулевой центральный элемент. Тогда A — конечное прямое произведение инвариантных наследственных нётеровых областей.*

Доказательство. По лемме 4.4.6 достаточно доказать, что кольцо A конечномерно слева. Допустим противное. Тогда кольцо A содержит левый идеал B, который является счетной прямой суммой ненулевых левых идеалов B_k, $k = 1, \dots, +\infty$. По предположению каждый левый идеал B_k содержит ненулевой центральный элемент c_k, где сумма всех идеалов $Ac_k = c_kA$ является прямой суммой. Это противоречит тому, что кольцо A конечномерно справа. □

4.4.8. Предложение. *Пусть A — дистрибутивное справа нётерово справа неразложимое кольцо с первичным радикалом M. Тогда кольцо A инвариантно справа, A/M — дистрибутивная справа, инвариантная справа, нётерова справа область, M — вполне первичный нётеров нильпотентный правый идеал. Кроме того, верны следующие утверждения.*

(a) *$M = xM$ для любого элемента $x \in A \setminus M$.*
(b) *Для любого подмодуля N в M_A существует такой идеал D в A, что $N = MD = xN$ для любого элемента $x \in A \setminus M$.*
(c) *Если M содержит ненулевой центральный элемент m, то A — цепное справа артиново справа кольцо с радикалом M.*
(d) *Если каждый ненулевой левый идеал кольца A содержит ненулевой центральный элемент, то либо A — инвариантная наследственная нётерова область, либо A — цепное справа артиново справа кольцо.*

Доказательство. По лемме 4.4.3(e) кольцо A инвариантно справа. Поскольку M — первичный радикал нётерова справа кольца A, ниль-идеал M нильпотентен. Поскольку M — ниль-идеал, то идемпотенты факторкольца A/B поднимаются до идемпотентов кольца A. По лемме 4.4.3(c) неразложимое кольцо A не имеет нетривиальных идемпотентов. Поэтому факторкольцо A/M не имеет нетривиальных идемпотентов. По лемме 4.4.4 кольцо A/B — дистрибутивная справа, инвариантная справа, нётерова справа область. Поэтому нётеров нильпотентный правый идеал M вполне первичен.

(a) Пусть $x \in A \setminus M$ и y — произвольный элемент идеала M. По лемме 4.4.3(a) существуют такие $a, b \in A$, что $a + b = 1$, $xa \in yA$ и $yb \in xA$. Идеал M вполне первичен, $x \in A \setminus M$ и $xa \in M$. Поэтому $a \in M$ и элемент a нильпотентен. Поэтому элемент $b = 1 - a$ обратим; кроме того, $yb \in xA$. Тогда $y = xz$ для некоторого $z \in A$. Поскольку элемент xz лежит во вполне первичном идеале M и $x \in A \setminus M$, то $z \in M$ и $y = xz \in xM$. Так как элемент $y \in M$ произволен, то $M = xM$.

(b) Пусть N — подмодуль модуля M_A и пусть $x \in A \setminus M$. По лемме 4.4.5(b) существует идеал D кольца A такой, что $MD = N$. Кроме того, $M = xM$. Поэтому $N = xMD = xN$.

(c) Пусть M содержит ненулевой центральный элемент m. Поскольку кольцо A инвариантно справа и m — ненулевой центральный элемент, существует такой максимальный идеал X кольца A, что A/X — тело и идеал mA строго содержит идеал $(mA)X = X(mA)$. Если $X = M$, то кольцо A локально. По лемме 4.4.3(d) кольцо A — цепное справа. Кроме того, A — нётерово справа кольцо с нильпотентным радикалом Джекобсона M. Поэтому A — цепное справа артиново справа кольцо.

(d) Если вполне первичный идеал M равен нулю, то A — область и A — инвариантная наследственная нётерова область, по лемме 4.4.7. Допустим, что $M \neq 0$. По предположению идеал M

содержит ненулевой центральный элемент. Из (c) следует, что A — цепное справа артиново справа кольцо. □

4.4.9. Теорема. *Центрально существенное кольцо A является дистрибутивным справа нётеровым справа кольцом в точности тогда, когда $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, где каждое кольцо A_k — либо коммутативная дедекиндова область, либо (не обязательно коммутативное) артиново цепное кольцо.*

Доказательство. Пусть A — центрально существенное кольцо. Если $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, где каждое кольцо A_k — либо коммутативная дедекиндова область, либо (не обязательно коммутативное) артиново цепное кольцо, то утверждение следует из леммы 4.4.6.

Теперь пусть A — дистрибутивное справа нётерово справа кольцо. Без ограничения общности можно считать, что A — неразложимое кольцо. Поскольку кольцо A центрально существенно, то каждый ненулевой левый или правый идеал кольца A содержит ненулевой центральный элемент. Из предложения 4.4.8(d) следует, что либо A — цепное справа артиново справа кольцо, либо A — инвариантная наследственная нётерова область. Если A — цепное справа артиново справа кольцо, то A — цепное артиново кольцо, по лемме 4.2.4. Если A — область, то A — коммутативная дедекиндова область в силу теоремы 1.4.1. □

5. Центрально существенные полукольца

В разделе 5 рассматриваются только унитальные полукольца и кольца и изучаются центрально существенные полукольца. Некоторые полукольцевые понятия определены ниже. Другие необходимые сведения о полукольцах содержатся в [27, 30].

5.1. Общие сведения.

5.1.1. Унитальные полукольца и их центры. *Полукольцо* — это структура, отличающаяся от ассоциативного кольца возможной необратимостью аддитивной операции. В полукольце S нуль мультипликативен по определению: имеем $0s = s0 = 0$ для каждого $s \in S$.

Центр полукольца S — это множество $Z(S) = \{s \in S \mid ss' = s's \text{ для всех } s' \in S\}$. Это множество не пусто, так как оно содержит 0 и 1; также верно, что $Z(S)$ — подполукольцо в S.

5.1.2. Центрально существенные полукольца. Полукольцо S называется *центрально существенным*, если либо S коммутативно, либо для каждого ненулевого $s \in S$ существуют такие ненулевые центральные элементы x, y, что $sx = y$.

Ясно, что любое центрально существенное ассоциативное кольцо является центрально существенным полукольцом.

5.1.3. Приведенные полукольца и неделители нуля. Полукольцо S называется *приведенным*, если $x = y$ для всех $x, y \in S$ с $x^2 + y^2 = xy + yx$. Если S — кольцо, то это равносильно тому, что S не имеет ненулевых нильпотентных элементов.

Элемент a полукольца S называется *левым* (соотв., правым) *делителем нуля*, если $ab = 0$ (соотв., $ba = 0$) для некоторого $0 \neq b \in S$. Аналогично пункту 1.1.2 (a) можно показать, что в центрально существенном полукольце односторонние делители нуля являются двусторонними делителями нуля.

5.1.4. Полупервичные и полувычитаемые полукольца. Полукольцо S называется *полупервичным*, если S не имеет нильпотентных идеалов.

Полукольцо S называется *полувычитаемым*, если для всех $a, b \in S$ с $a \neq b$ существует такой элемент $x \in S$, что $a + x = b$ или $b + x = a$.

5.1.5. Аддитивно сократимые полукольца. Полукольцо S называется *аддитивно сократимым*, если для любых $x, y, z \in S$ равенство $x + z = y + z$ равносильно равенству $x = y$.

Кольцо $D(S)$ называется *кольцом разностей* полукольца S, если S — подполукольцо в $D(S)$ и каждый элемент $a \in D(S)$ является разностью $x - y$ некоторых элементов $x, y \in S$.

Хорошо известно, что полукольцо S может быть вложено в кольцо разностей $D(S)$ в точности тогда, когда S аддитивно сократимо.

Класс аддитивно сократимых полуколец содержит все кольца. Кольцо разностей единственно с точностью до изоморфизма над S; см. подробности в [30, Chapter II].

5.1.6. Идемпотенты полуколец. В силу 1.1.4 каждый идемпотент центрально существенного кольца централен. Для полуколец аналогичный результат не верен; см. пример 5.2.2 ниже.

Для полукольца S идемпотент $e \in S$ называется *дополняемым*, если существует идемпотент $f \in S$ с $e + f = 1$.

5.1.7. Предложение. *В аддитивно сократимом центрально существенном полукольце S любой дополняемый идемпотент централен.*

Доказательство. Пусть $e^2 = e$ и $e + f = 1$ для некоторого $f \in S$. Так как S — аддитивно сократимое полукольцо, то из $e = e + fe$ следует, что $fe = 0$. Аналогично, имеем $ef = 0$. Пусть $x \in S$ и $xe \neq 0$. Тогда $x = ex + fx$ и $xe = exe + fxe$.

Сначала допустим, что $fxe = 0$, т. е. $xe = exe$. Так как $x = xe + xf$, то имеем $ex = exe + exf$. Если $exf \neq 0$, то существуют $c, d \in Z(S)$ с $(exf)c = d \neq 0$. Тогда

$$0 \neq d = ed = de = (exfc)e = (exc)fe = 0;$$

получено противоречие. Поэтому $exf = 0$ и $ex = xe = exe$.

Теперь пусть $fxe \neq 0$. Тогда $0 \neq (fxe)c = d$ для некоторых ненулевых элементов $c, d \in Z(S)$. В этом случае

$$0 \neq d = de = ed = ef(xec) = 0;$$

получено противоречие. □

5.1.8. Замечание. Если S — аддитивно сократимое полукольцо, то полукольцо $M_n(S)$ всех матриц и полукольцо $T_n(S)$ всех верхних треугольных матриц над S не центрально существенно для $n \geqslant 2$.

Доказательство. Для единичных матриц приведенных выше полуколец имеем $E = E_{11} + \ldots + E_{nn}$, где $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ — матричные единицы. Из [27, Example 4.19] следует, что $M_n(S)$ — аддитивно сократимое полукольцо. Идемпотенты $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ — нецентральные дополняемые идемпотенты. Следовательно, полукольца $M_n(S)$ и $T_n(S)$ не центрально существенны. □

5.2. Примеры, конструкции и замечания.

5.2.1. Предложение. *Пусть S — аддитивно сократимое полувычитаемое центрально существенное полукольцо с центром $C = Z(S)$. Следующие условия эквивалентны*:

(a) *S — полупервичное полукольцо*;
(b) *C — полупервичное полукольцо*;
(c) *S не имеет ненулевых нильпотентных элементов*;
(d) *S — коммутативное полукольцо без ненулевых нильпотентных элементов.*

Доказательство. В силу 5.1.5 полукольцо S может быть вложено в кольцо разностей $D(S)$. Кроме того, соотношение $D(S) = -S \cup S$ выполняется в точности тогда, когда S — полувычитаемое полукольцо; см. [30, Chapter II, Remark 5.12]. Тогда утверждение следует из теоремы 1.2.2. □

5.2.2. Пример. Рассмотрим полугруппу $(M, \cdot)$, заданную таблицей умножения

$\cdot$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	a	a	c
b	b	b	b	c
c	c	c	c	c

Для быстрой проверки ассоциативности удобно использовать тест ассоциативности по Лайту (см. [16, p. 7]).

Множество $S = 2^M$ всех подмножеств в M вместе с операциями $A + B = A \cup B$ и $AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$, где $A, B \in S$, образует полукольцо с нулем $\varnothing$ и единицей $1 = \{1_M\}$; см. [27, Example 1.10]. Имеем $|S| = 2^4 = 16$. Заметим, что S свободно от нулевых сумм, т. е. из $A+B = \varnothing$ следует, что $A = B = \varnothing$. Кроме этого, S аддитивно и мультипликативно идемпотентно. Запишем центр $C(S)$:

$$C(S) = \{\varnothing, \{1\}, \{c\}, \{1, c\}\}.$$

Если $A \in S \setminus C(S)$, то $\varnothing \neq A \cdot \{c\} \in C(S)$. Следовательно, S — некоммутативное центрально существенное полукольцо.

5.2.3. Замечание. Из примера 5.2.2 следует, что утверждение предложения 5.2.1 не верно без предположений аддитивных сокращаемости и полувычитаемости.

5.2.4. Пример. Рассмотрим полукольцо S, порожденное матрицами

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ 0 & \alpha & c \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha, a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, где $a_{12} = b_{23} = a$, $b_{12} = a_{23} = c$, $a \neq c$, а оставшиеся компоненты равны друг другу. Тогда $AB \neq BA$, т. е. S — некоммутативное полукольцо. Непосредственно проверяется, что центр $Z(S)$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & b \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha, b \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Так как $0 \neq AD \in Z(S)$, где $0 \neq A \in S \setminus Z(S)$, $0 \neq D \in Z(S)$ с $\alpha = 0$, имеем, что S — некоммутативное центрально существенное полукольцо. Однако кольцо разностей $D(S) = M_3(\mathbb{Z})$ не является центрально существенным кольцом, так как кольцо имеет нецентральные идемпотенты. Кроме того, по замечанию 3.6.4 любая центрально существенная подалгебра локальной треугольной алгебры 3×3 матриц коммутативна.

Приведем пример центрально существенного кольца R, которое является кольцом разностей для двух собственных подполуколец S_1 и S_2 в R, причем S_1 не является центрально существенным полукольцом, а S_2 — центрально существенное полукольцо.

5.2.5. Пример. Пусть R — кольцо, состоящее из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b & c & d & e & f \\ 0 & \alpha & 0 & b & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{5.2.5.1}$$

над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел. В 3.6.8 доказано, что R — некоммутативное центрально существенное кольцо. Пусть S_1 — полукольцо, порожденное матрицами вида (5.2.5.1) над $\mathbb{Z}^+$ и такими скалярными матрицами, что $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ и на оставшихся позициях стоят нули. Так как $Z(S_1)$ состоит из скалярных матриц, то S_1 не является центрально существенным полукольцом. Заметим, что S_1 — полукольцо без делителей нуля. В то же время полукольцо S_2 матриц вида (5.2.5.1) над полукольцом $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ — центрально существенное полукольцо.

5.2.6. Предложение. *Пусть S — центрально существенное полукольцо без делителей нуля. Если кольцо $D(S)$ не содержит делители нуля, то полукольцо S коммутативно.*

Доказательство. Пусть $0 \neq a = x - y \in D(S)$. По предположению $0 \neq xc = d$ и $0 \neq yf = g$ для некоторых $c, d, f, g \in Z(S)$. Тогда

$$a(cf) = (x - y)cf = (xc)f - (yf)c = df - gc.$$

Нм потребуется следующее известный факт [30, Chapter II, Theorem 5.13]: в любом полукольце S с кольцом разностей $D(S)$ любой центральный элемент из S содержится в центре кольца $D(S)$.

Поэтому $c, d, f, g \in Z(D(S))$ и $ac' \in Z(D(S))$, где $c' = cf$. Кроме того, $ac' \neq 0$, так как $D(S)$ не содержит делители нуля. Тогда $D(S)$ — коммутативное кольцо в силу 1.2.2. □

5.2.7. Класс нильпотентности. Напомним, что *верхний центральный ряд* группы G — это цепь подгрупп

$$\{e\} = C_0(G) \subseteq C_1(G) \subseteq \dots,$$

где $C_i(G)/C_{i-1}(G)$ — центр группы $G/C_{i-1}(G)$, $i \geqslant 1$. Для группы G *класс нильпотентности* группы G — наименьшее натуральное число n с условием $C_n(G) = G$, если такое n существует.

5.2.8. Предложение (ср. предложение 3.2.4)**.** *Пусть G — конечная группа класса нильпотентности $n \leqslant 2$ и пусть S — коммутативное полукольцо без делителей нуля или нулевых сумм. Тогда SG — центрально существенное групповое полукольцо.*

Доказательство. Если $n = 1$, то группа G абелева и SG — центрально существенное групповое полукольцо; см. теорему 1.4.1(а).

Пусть $n = 2$. Аналогично случаю групповых колец (см., например, [58, Part 2]), центр $Z(SG)$ — свободный S-полумодуль с базисом

$$\left\{ \sum_K : K \text{ — классы сопряженности в } G \right\}.$$

Достаточно проверить, что $SG \sum_{Z(G)} \subseteq Z(SG)$, где $Z(G)$ — центр группы G. Действительно, если $g, h \in G$, то

$$(gh)^{-1} hg \sum_{Z(G)} = \sum_{Z(G)},$$

так как $h^{-1}g^{-1}hg \in G' \subseteq Z(G)$. □

В примере 5.2.9 ниже построено некоммутативное центрально существенное полукольцо без делителей нуля; это полукольцо аддитивно сократимо, но не полувычитаемо.

5.2.9. Пример. Пусть Q_8 — группа кватернионов, т. е. группа с двумя образующими a, b и определяющими соотношениями $a^4 = 1$, $a^2 = b^2$ и $aba^{-1} = b^{-1}$; см., например, [29, Sec. 4.4]. Тогда

$$Q_8 = \{e, a, a^2, b, ab, a^3, a^2b, a^3b\},$$

классы сопряженности в Q_8 — это

$$K_e = \{e\}, \quad K_{a^2} = \{a^2\}, \quad K_a = \{a, a^3\}, \quad K_b = \{b, a^2b\}, \quad K_{ab} = \{ab, a^3b\},$$

и центр $Z(Q_8)$ совпадает с $\{e, a^2\}$. Рассмотрим групповое полукольцо SQ_8, где $S = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$. Так как Q_8 — группа класса нильпотентности 2, то из предложения 5.2.8 следует, что SQ_8 — центрально существенное групповое полукольцо. Для иллюстрации изложенного выше имеем

$$a \sum_{Z(Q_8)} = \sum_{K_a}, \quad b \sum_{Z(Q_8)} = \sum_{K_b}, \quad ab \sum_{Z(Q_8)} = \sum_{K_{ab}},$$
$$a^3 \sum_{Z(Q_8)} = \sum_{K_a}, \quad a^2b \sum_{Z(Q_8)} = \sum_{K_b}, \quad a^3b \sum_{Z(Q_8)} = \sum_{K_{ab}}.$$

групповое кольцо разностей $\mathbb{Q}Q_8$ — кольцо без ненулевых нильпотентных элементов; см. [66, Theorem 3.5]. Тогда SQ_8 — приведенное полукольцо. Действительно, если $x^2+y^2 = xy+yx$ и $x \neq y$, то $x^2 + y^2 - xy - yx = (x - y)^2 = 0$ в кольце $\mathbb{Q}Q_8$; это не верно. Таким образом, SQ_8 — некоммутативное приведенное центрально существенное полукольцо без делителей нуля. Заметим, что кольцо $\mathbb{Q}Q_8$ не центрально существенно, так как центрально существенные кольца без ненулевых нильпотентных элементов коммутативны.

5.2.10. Теорема. *Существует некоммутативное аддитивно сократимое приведенное центрально существенное полукольцо без делителей нуля. Аддитивно сократимое приведенное полукольцо S коммутативно в точности тогда, когда кольцо разностей полугруппы S — центрально существенное кольцо.*

Доказательство. Из примера 5.2.9 следует, что существует некоммутативное аддитивно сократимое приведенное центрально существенное полукольцо без делителей нуля.

Если полукольцо S коммутативно, то $D(S)$ — коммутативное кольцо, т. е. $D(S)$ центрально существенно. Наоборот, пусть $D(S)$ — центрально существенное кольцо. Так как S — приведенное полукольцо, $D(S)$ — приведенное кольцо. Действительно, пусть $0 \neq a = x - y \in D(S)$. Если $a^2 = 0$, то $x^2 + y^2 = xy + yx$. Поэтому $x = y$, $a = 0$, и получаем противоречие. Тогда кольцо $D(S)$ коммутативно, так как $D(S)$ — приведенное центрально существенное кольцо. Следовательно, S — коммутативное полукольцо. □

5.2.11. Мультипликативно сократимые полукольца. Элемент x полукольца S называется *мультипликативно сократимым слева* (соотв., *справа*), если $y = z$ для всех $y, z \in S$ с $xy = xz$ (соотв., $yx = zx$). Полукольцо S называется *мультипликативно сократимым слева* (соотв., *справа*), если каждый элемент $x \in S \setminus \{0\}$ мультипликативно сократим слева (соотв., справа). Мультипликативно сократимое слева и справа полукольцо называется *мультипликативно сократимым* (см., например, [30, Chapter I]).

5.2.12. Замечание. Мультипликативно сократимое слева (соотв., справа) центрально существенное полукольцо S коммутативно.

Доказательство. Пусть a и b — ненулевые элементы полукольца S. Так как S — центрально существенное полукольцо, то существует $c \in Z(S)$ с $0 \neq ac \in Z(S)$. Мультипликативно сократимое слева полукольцо не содержит левые делители нуля; см. [30, Chapter I, Theorem 4.4]. Поэтому $acb \neq 0$. Тогда

$$(ac)b = Z(ab) = (ca)b = b(ca) = ba),$$

откуда имеем $ab = ba$. Аналогичные рассуждения можно провести для мультипликативно сократимых справа полуколец. □

5.2.13. Полутела и полуполя.

Полукольцо с делением, не являющееся кольцом, называется *полутелом*. Коммутативное полутело называется *полуполем*. Центрально существенные полутела являются полуполями, так как из [30, Chapter I, Theorem 5.5] следует, что полутело с как минимум двумя элементами мультипликативно сократимо и поэтому утверждение следует из замечания 5.2.12.

6. Неассоциативные кольца

В данной главе кольца не обязательно ассоциативны.

Мы используем обозначения и терминологию из [64, 75].

6.1. Виды центральной существенности. *В данном подразделе рассматриваемые кольца не обязательно унитальны или ассоциативны.*

Пусть R — кольцо. Присоединим к R внешнюю единицу и обозначим через R^1 полученное кольцо с единицей.

Ассоциатор трех элементов a, b, c кольца R — элемент $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ и *коммутатор* двух элементов $a, b \in R$ — элемент $[a, b] = ab - ba$.

6.1.1. Различные центры. Для кольца R *ассоциативный центр*, *коммутативный центр* и *центр* кольца R (в смысле [75, § 7.1]) — это множества

$$N(R) = \{x \in R : \forall a, b \in R\ (x, a, b) = (a, x, b) = (a, b, x) = 0\},$$
$$K(R) = \{x \in R : \forall a \in R\ [x, a] = 0\},$$
$$Z(R) = N(R) \cap K(R)$$

соответственно. Ясно, что $N(R)$ и $Z(R)$ являются подкольцами в R, а кольцо R является унитарным (левым и правым) $N(R)$-модулем и $Z(R)$-модулем.

6.1.2. Центроид. Для кольца R обозначим через $\hat{C}(R)$ *центроид* кольца R, т. е. множество всех эндоморфизмов аддитивной группы $(R,+)$, которые коммутируют с левым и правым умножениями на элементы кольца R.

Ясно, что R может рассматриваться как левый или правый модуль над ассоциативным коммутативным кольцом $Z(R)$; R может также рассматриваться как унитарный модуль над унитальным ассоциативным коммутативным кольцом $Z(R)^1$ и как унитарный модуль над над центроидом $\hat{C}(R)$.

6.1.3. Замечание. Ассоциативный центр $N(R)$, коммутативный центр $K(R)$ и центр $Z(R)$ кольца R являются $\hat{C}(R)$-подмодулями в R.

Доказательство. Пусть $n \in N(R)$ и $c \in \hat{C}(R)$. Для любых $a, b \in R$ имеем

$$(c(n), a, b) = c(n)a \cdot b - c(n) \cdot ab = c(na)b - c(n \cdot ab) = c((n, a, b)) = 0,$$
$$(a, c(n), b) = ac(n) \cdot b - a \cdot c(n)b = c(an)b - ac(nb) = c((a, n, b)) = 0,$$
$$(a, b, c(n)) = ab \cdot c(n) - a \cdot bc(n) = c(ab \cdot n) - c(a \cdot bn) = c((a, b, n)) = 0.$$

Следовательно, $c(n) \in N(R)$.

Аналогично, если $k \in K(R)$, то для любого $a \in R$ имеем

$$[c(k), a] = c(k)a - ac(k) = c(ka) - c(ak) = c([k, a]) = 0.$$

Следовательно, $c(k) \in K(R)$.

Наконец, утверждение о центре $Z(R)$ непосредственно следует из двух предыдущих утверждений, поскольку $Z(R) = N(R) \cap K(R)$ по определению. □

6.1.4. Виды центральной существенности. Кольцо R с центром $C = Z(R)$ называется *центрально существенным*, если $Cr \cap C \neq 0$ для любого ненулевого $r \in R$ (эквивалентно, $K \cap C \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля K модуля R_C, т. е. C — существенный подмодуль в ${}_C R$).

Кольцо R с центром $C = Z(R)$ называется *сильно центрально существенным* (соотв., *слабо центрально существенным*), если $Cr \cap C \neq 0$ (соотв., $\hat{C}(R)r \cap C \neq 0$) для любого ненулевого элемента $r \in R$.

В определении сильно центрально существенного кольца можно формально заменить $Z(R)$ на $N(R)$; в этих случаях кольцо R называется *N-существенным слева* кольцом).

Кольцо R называется *N-существенным слева*, если $N(R)r \cap N(R) \neq 0$ для любого ненулевого $r \in R$, т. е. $N = N(R)$ — существенный подмодуль модуля ${}_N R$.

Кольцо R называется *K-существенным слева*, если $K(R)r \cap K(R) \neq 0$ для любого ненулевого элемента $r \in R$, т. е. $K = K(R)$ — существенный подмодуль модуля ${}_K R$.

Следующее предложение известно в ассоциативном случае.

6.1.5. Предложение. *Пусть R — кольцо с центром $C = Z(R)$.*

(a) *Если R — сильно центрально существенное кольцо, то R — центрально существенное кольцо.*

(b) *Если R — центрально существенное кольцо, то R — слабо центрально существенное кольцо.*

(c) *В классе унитальных колец совпадают сильно центрально существенные кольца, центрально существенные кольца и слабо центрально существенные кольца.*

Доказательство. (a) Утверждение следует из того, что C — подкольцо в C^1.

(b) Достаточно заметить, что умножения на центральные элементы и умножения на целые числа принадлежат центроиду кольца R.

(c) В силу (a) и (b) достаточно проверить, что если R — слабо существенное кольцо с единицей 1, то R — сильно центрально существенное кольцо. Пусть R — слабо центрально существенное

кольцо и $r \in R \setminus \{0\}$. Существует такой элемент $\widehat{Z} \in \widehat{Z}(R)$, что $\widehat{c}(r) \in Z(R) \setminus \{0\}$. Тогда $0 \neq \widehat{Z}(r) = \widehat{Z}(1 \cdot r) = \widehat{c}(1)r \in Z(R)r$, поскольку $\widehat{Z}(1) \in Z(R)$ по замечанию 6.1.3. Таким образом, $Z(R)r \cap Z(R) \neq 0$. Поэтому R — сильно центрально существенное кольцо. □

Приведем примеры 6.1.6 и 6.1.8, которые показывают, что классы сильно центрально существенных, центрально существенных и слабо центрально существенных колец различаются в общем случае.

6.1.6. Пример. Любое ненулевое кольцо R с нулевым умножением — центрально существенное кольцо, которое не является сильно центрально существенным. Действительно, $R = Z(R)$ и для любого ненулевого элемента $r \in R$ имеем $r \in R^1 r \cap R$, но $Z(R)r = 0$.

Для следующего примера нам потребуется замечание 6.1.7.

6.1.7. Замечание. Пусть R — такое кольцо, что $R \cdot R^2 = R^2 \cdot R = 0$ и $\varphi\colon R \to R$ — такой эндоморфизм группы $(R, +)$, что $\varphi(R) \subseteq R^2 \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда $\varphi \in \widehat{Z}(R)$. Действительно, $\varphi(ab) = 0$ для любых двух элементов $a, b \in R$, поскольку $ab \in R^2$; кроме того, $a\varphi(b) = \varphi(a)b = 0$, поскольку $aR^2 = R^2 b = 0$.

6.1.8. Пример. Пусть $F = \mathbb{Z}_3$ — поле из трех элементов, $\Lambda(F^2)$ — внешняя алгебра двумерного линейного пространства над F. Пусть e_1, e_2 — базис пространства F^2 и пусть R — подалгебра алгебры $\Lambda(F^2)$ с базисом e_1, e_2, $e_1 \wedge e_2$. Пусть $r = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_1 \wedge e_2$ — произвольный элемент кольца R. Нетрудно видеть, что $r \in Z(R)$ в точности тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, т. е. $Z(R) = R^2$ и $Z(R)^1 r = Fr$ для любого $r \in R$. В частности, $Z(R)^1 e_1 = Fe_1$ и $Fe_1 \cap R^2 = 0$; поэтому кольцо R не является центрально существенным. Теперь пусть $r \neq 0$. Если $r \in Z(R)$, то $r \in \widehat{Z}r \cap Z(R)$, поскольку $\widehat{Z}(R)$ содержит тождественный автоморфизм группы $(R, +)$. Пусть $\pi\colon R \to R/R^2$ — канонический гомоморфизм. Если $r \notin Z(R)$, то $\pi(r)$ — ненулевой элемент двумерного пространства R/R^2 и существует линейное отображение $\psi\colon R/R^2 \to R^2$, для которого $\psi(\pi(r)) \neq 0$. Если $\varphi = \psi\pi$, то $\varphi \in \widehat{Z}(R)$ по замечанию 6.1.7 и $0 \neq \varphi(r) \in \widehat{Z}(R)r \cap R^2 = Z(R)$. Следовательно, R — слабо центрально существенное кольцо.

6.2. Приведенные и полупервичные кольца. Кольцо называется *приведенным*, если оно не содержит ненулевых элементов с нулевым квадратом. Заметим, что ассоциативные приведенные кольца совпадают с кольцами без ненулевых нильпотентных элементов.

Кольцо R называется *полупервичным*, если R не содержит ненулевых идеалов с нулевым умножением; см. [75, § 8.2].

6.2.1. Теорема. *Пусть R — слабо центрально существенное кольцо, у которого центр $C = Z(R)$ — приведенное кольцо.*

(a) *R — сильно центрально существенное кольцо.*
(b) *R — ассоциативное кольцо.*
(c) *R — коммутативное кольцо.*

Доказательство. (a) Пусть $r \in R \setminus \{0\}$, $\varphi \in \widehat{C}$ и $\varphi(r) = d \in C \setminus \{0\}$. Тогда

$$0 \neq d^2 = d\varphi(r) = \varphi(dr) = \varphi(d)r.$$

По замечанию 6.1.3 $\varphi(d) \in C$. Также ясно, что $d^2 \in C$. Поэтому $0 \neq \varphi(d)r \in Cr \cap C$, т. е. кольцо R сильно центрально существенно.

(b) В силу (a) кольцо R сильно центрально существенно. Допустим, что R не ассоциативно и некоторые элементы $x, y, z \in R$ имеют ненулевой ассоциатор $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$. Тогда существуют такие $c, d \in C$, что $d = (x, y, z)c \in C \setminus \{0\}$. Заметим, что $xd \neq 0$; в противном случае

$$\begin{aligned} d^2 = (x, y, z)c \cdot d = (x, y, z) \cdot cd = (x, y, z) \cdot dc = ((xy \cdot z)d - (x \cdot yz)d)c = \\ = (d(xy \cdot z) - d(x \cdot yz))c = ((dx \cdot y)z - dx \cdot yz)c = 0, \end{aligned}$$

что невозможно. Поэтому для некоторого элемента $b \in C$ имеем $xd \cdot b = x \cdot db \in C \setminus \{0\}$. Обозначим $I = \{c \in C \mid cx \in C\}$. Ясно, что $db \in I$. Теперь допустим, что $dI = 0$. Тогда $d(db) = 0$, $(db)^2 =$

$db \cdot db = (db \cdot d)b = (d \cdot db)b = 0$ и $db = 0$; получено противоречие. Поэтому $di \neq 0$ для некоторого $i \in I$. Однако $di = (xy \cdot z - x \cdot yz)c \cdot i = c((xi \cdot y)z - xi \cdot yz) = 0$; получено противоречие. Таким образом, R — ассоциативное кольцо.

(c) Предположим, что кольцо R некоммутативно и существуют такие элементы $x, y \in R$, что $xy - yx \neq 0$. Тогда существуют такие элементы $c, d \in C$, что $d = (xy - yx)c \in C \setminus \{0\}$. Заметим, что $xd \neq 0$; в противном случае

$$d^2 = (xy - yx)cd = c((xd)y - y(xd)) = 0;$$

это невозможно. Поэтому $xdz \in C \setminus \{0\}$ для некоторого элемента $z \in C$. Рассмотрим множество $I = \{c \in C \mid cx \in C\}$. Ясно, что $dz \in I$. Теперь допустим, что $dI = 0$. Тогда $d(dz) = 0$, $(dz)^2 = 0$ и $dz = 0$; получено противоречие. Поэтому $di \neq 0$ для некоторого $i \in I$. Однако

$$di = (xy - yx)ci = c((xi)y - y(xi)) = 0;$$

противоречие. Поэтому R коммутативно. □

6.2.2. Замечание. Ясно, что центр полупервичного кольца — приведенное кольцо; обратное не всегда верно, поскольку кольцо верхних треугольных матриц над полем — неполупервичное кольцо с приведенным центром.

6.2.3. Замечание. Пусть R — центрально существенное ассоциативное кольцо. В 1.1.4 и 1.2.5 доказано, что все идемпотенты кольца R центральны и кольцо R коммутативно, если оно полупервично. Во введении были приведены примеры конечных некоммутативных центрально существенных ассоциативных унитальных колец.

6.2.4. Альтернативные кольца. Кольцо R называется *альтернативным справа* (соотв., *альтернативным слева*), если $(ab)b = a(bb)$ (соотв., $(aa)b = a(ab)$) для любых элементов $a, b \in R$.

Альтернативные справа и слева кольца называются *альтернативными* кольцами. Кольцо R альтернативно в точности тогда, когда $(a, a, b) = (a, b, b)$ для любых элементов $a, b \in R$, где через (a, b, c) обозначается ассоциатор $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ элементов a, b, c кольца R.

По теореме Артина [75, Theorem 2.3.2] кольцо R альтернативно в точности тогда, когда любые два элемента кольца R порождают ассоциативное подкольцо.

6.2.5. Теорема. *Пусть R — центрально существенное кольцо.*

(a) *Если центр $Z(R)$ кольца R — полупервичное кольцо, то кольцо R коммутативно и ассоциативно.*

(b) *Если кольцо R альтернативно и e — идемпотент кольца R, то $e \in Z(R)$.*

Доказательство. (a) Из теоремы 6.2.1 и замечания 6.2.2 следует, что любое слабо центрально существенное полупервичное кольцо ассоциативно и коммутативно.

(b) Если R — слабо центрально существенное альтернативное кольцо и e — идемпотент кольца R, то надо доказать, что $e \in Z(R)$. Пусть r — произвольный элемент кольца R. Далее мы будем несколько раз использовать ассоциативности подкольца, порожденного двумя элементами e и r в альтернативном кольце R. Если $c \in \widehat{Z}(R)$ — такой элемент центроида кольца R, что $c(ere - re) = d \in Z(R)$, то $de = c(ere - re)e = c((ere - re)e) = c(ere - re) = d$. С другой стороны,

$$ed = ec(ere - re) = c(e(ere - re)) = c(0) = 0.$$

Поэтому $d = 0$ и $\widehat{Z}(R)(ere - re) \cap Z(R) = 0$. Поскольку кольцо R слабо центрально существенно, то $ere - re = 0$. Можно аналогично проверить, что $ere - er = 0$, откуда $re = er$. □

6.2.6. Открытые вопросы.

1. Верно ли, что любое N-существенное[1] кольцо ассоциативно? Наше предположение: это не верно.
2. Верно ли, что любое полупервичное N-существенное кольцо ассоциативно?

[1] См. 6.1.4.

Следующий пример показывает, что аналогичные вопросы для K-существенных[1] колец имеют отрицательные ответв.

6.2.7. Пример. Пусть F — произвольное поле и R — такая алгебра над F с базисом

$$\{e, f, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots\},$$

что и его умножение определено на базисных элементах соотношениями

$$e^2 = e, \quad f^2 = f, \quad ef = x_1, \quad fe = y_1,$$
$$ex_i = x_ie = x_i, \quad y_jf = fy_j = y_j,$$
$$x_ix_j = x_{i+j}, \quad y_iy_j = y_{i+j},$$
$$x_if = fx_i = y_je = ey_j = x_iy_j = y_jx_i = 0 \quad \text{для всех} \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Положим $x = x_1$, $y = y_1$. Непосредственно проверяется, что $K(R) = F[x]x + F[y]y$. Действительно, если $r = ae + bf + s$, где $a, b \in F$ и $s \in F[x]x + F[y]y$, то $[r, e] = b(y - x)$ и $[r, f] = a(x - y)$. Поэтому $K(R) \subseteq F[x]x + F[y]y$; обратное включение следует из определения умножения в R.

Заметим, что $K(R)$ — идеал в R и кольцо $K(R) \cong F[x]x \oplus F[y]y$ приведенное. Поэтому, если $r \in K(R) \setminus \{0\}$, то $r^2 \in K(R)r \setminus \{0\}$. Если $r \notin K(R)$, то

$$r = ae + bf + \sum_{i=1}^{\infty} a_ix^i + \sum_{i=1}^{\infty} b_iy^i,$$

где $a, b, a_i, b_i \in F$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Если $a \neq 0$, то

$$xr = ax + \sum_{i=1}^{\infty} a_ix^{i+1} \in (K(R)r \cap K(R)) \setminus \{0\};$$

аналогично, если $b \neq 0$, то

$$yr = by + \sum_{i=1}^{\infty} b_iy^{i+1} \in (K(R)r \cap K(R)) \setminus \{0\}.$$

Поэтому кольцо R является K-существенным.

Так как $R/K(R) \cong F \oplus F$ и $K(R)$ — ассоциативные приведенные кольца, то $r = 0$ для любого элемента $r \in R$ с условием $r^2 = 0$. В частности, R не имеет ненулевых идеалов с нулевым умножением, т. е. кольцо R полупервично. В то же время e и f являются нецентральными идемпотентами кольца R; это невозможно в любом ассоциативном полупервичном слабо центрально существенном кольце.

6.2.8. Замечание. Если R — альтернативное кольцо без элементов порядка 3 в аддитивной группе, то R K-существенно в точности тогда, когда R центрально существенно, поскольку $3K(R) \subseteq N(R)$ [75, Corollary 7.1.1].

6.3. Процесс Кэли—Диксона. Напомним, что если M — левый модуль над кольцом R и S — подмножество в M, то $\operatorname{Ann}_R S = \ell_R(S)$ — аннулятор множества S в кольце R, т. е. $\operatorname{Ann}_R(S) = \{r \in R \mid rS = 0\}$. Обозначим через $[A, A]$ идеал кольца A, порожденный коммутаторами всех его элементов.

Следующее определение слегка обобщает определение процесса Кэли—Диксона, приведенное в [75, § 2.2], см. [9].

6.3.1. Процесс Кэли—Диксона и кольца (A, α). Пусть A — кольцо с инволюцией $*$[2] и α — обратимый симметричный элемент центра кольца A. Определим операцию умножения на абелевой группе $A \oplus A$ как указано ниже:

$$(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4a_2^*, a_1^*a_4 + a_3a_2) \tag{6.3.1.1}$$

[1] См. 6.1.4.

[2] Напомним, что кольцевой антиэндоморфизм называется *инволюцией*, если его двукратное применение является тождественным отображением.

для любых $a_1, \dots, a_4 \in A$. Обозначим полученное кольцо через (A, α).

Элементы кольца (A, α) вида $(a, 0)$, $a \in A$, образуют подкольцо кольца (A, α), изоморфное кольцу A; мы будем отождествлять их с соответствующими элементами кольца A. Положим $\nu = (0, 1) \in (A, \alpha)$. Тогда $a * \nu = (0, a) = \nu a$ для любого $a \in A$ и $\nu^2 = \alpha$. Таким образом, $(A, \alpha) = A + A\nu$.

Заметим, что много работ посвящено изучению структуры и свойств колец и алгебр, полученных в результате этого процесса; например, [12, 22–24, 60, 64, 72].

Следующие свойства проверяются непосредственно, с использованием соотношений (6.3.1.1).

(a) $\nu^2 = \alpha$ и $\nu a = a^*\nu$ для любого элемента $a \in A$.
(b) $(1, 0)$ — единица кольца (A, α).
(c) Множество $\{(a, 0) \mid a \in A\}$ — подкольцо кольца (A, α), изоморфное кольцу A.
(d) В (A, α) отображение $(a, b) \mapsto (a^*, -b)$, $a, b \in A$ — инволюция.

Вплоть до конца подраздела 6.3 зафиксируем кольцо A и элемент α, который удовлетворяют условиям процесса Кэли—Диксона из 6.3.1; мы также положим $R = (A, \alpha)$.

6.3.2. Лемма. *Элемент $(x, y) \in R$ принадлежит кольцу $N(R)$ в точности тогда, когда для любых двух элементов $u, v \in A$ выполняются следующие две системы соотношений:*

$$\begin{aligned}
&(xu)v = x(uv), \quad (ux)v = u(xv), \quad (uv)x = u(vx),\\
&v(ux) = x(vu), \quad (xu)v = u(vx), \quad (vu)x = (xv)u,\\
&v(xu) = (vu)x, \quad v(ux) = (vx)u, \quad x(uv) = u(xv),\\
&(ux)v = (uv)x, \quad v(xu) = (xv)u, \quad x(vu) = (vx)u;
\end{aligned} \tag{6.3.2.1}$$

$$\begin{aligned}
&(uy)v = y(vu), \quad (uy)v = (yv)u, \quad y(vu) = u(yv),\\
&v(yu) = y(uv), \quad (yu)v = (vy)u, \quad y(uv) = (vy)u,\\
&v(uy) = (uv)y, \quad v(uy) = u(vy), \quad (vu)y = u(vy),\\
&(yu)v = (vu)y, \quad v(yu) = u(yv), \quad (uv)y = (yv)u.
\end{aligned} \tag{6.3.2.2}$$

Доказательство. Пусть $(x, y) \in R$. Так как ассоциаторы линейны, то включение $(x, y) \in N(R)$ равносильно тому, что для любых элементов $u, v \in A$ имеем

$$\begin{aligned}
&((x,y)(u,0)(v,0)) = ((u,0),(x,y),\quad (v,0)) = ((u,0),(v,0),(x,y)) = 0,\\
&((x,y)(u,0)(0,v)) = ((u,0),(x,y),\quad (0,v)) = ((u,0),(0,v),(x,y)) = 0,\\
&((x,y)(0,u)(v,0)) = ((0,u),(x,y),\quad (v,0)) = ((0,u),(v,0),(x,y)) = 0,\\
&((x,y)(0,u)(0,v)) = ((0,u),(x,y),\quad (0,v)) = ((0,u),(0,v),(x,y)) = 0.
\end{aligned} \tag{6.3.2.3}$$

Вычисляя ассоциаторы из (6.3.2.3), мы получим следующую систему, состоящую из 12 соотношений:

$$\begin{aligned}
((xu)v, v(uy)) &= (x(uv), (uv)y),\\
((ux)v, v(u^*y)) &= (u(xv), u^*(vy)),\\
((uv)x, (v^*u^*)y) &= (u(vx), u^*(v^*y)),\\
(\alpha v(y^*u^*), (u^*x^*)v) &= (\alpha(u^*v)y^*, x^*(u^*v)),\\
(\alpha v(y^*u), (x^*u^*)v) &= (\alpha u(vy^*), u^*(x^*v)),\\
(\alpha y(v^*u), x(u^*v)) &= (\alpha u(yv^*), u^*(xv)),\\
(\alpha(uy^*)v, v(x^*u)) &= (\alpha(vu)y^*, x^*(vu)),\\
(\alpha(yu^*)v, v(xu)) &= (\alpha(vy)u^*, (xv)u),\\
(\alpha y(u^*v^*), x(vu)) &= (\alpha(v^*y)u^*, (vx)u),\\
(\alpha v(u^*x), \alpha(yu^*)v) &= (\alpha x(vu^*), \alpha(vu^*)y),\\
(\alpha v(u^*x^*), \alpha(uy^*)v) &= (\alpha(x^*v)u^*, \alpha(vy^*)u),\\
(\alpha(vu^*)x, \alpha(uv^*)y) &= (\alpha(xv)u^*, \alpha(yv^*)u).
\end{aligned}$$

Приравнивая компоненты равных элементов кольца R и учитывая, что элемент α обратим, мы получаем следующую эквивалентную систему:

$$\begin{array}{lll}
(xu)v = x(uv), & v(uy) = (uv)y, & (ux)v = u(xv),\\
v(u^*y) = u^*(vy), & (uv)x = u(vx), & (v^*u^*)y = u^*(v^*y),\\
v(y^*u^*) = (u^*v)y^*, & (u^*x^*)v = x^*(u^*v), & v(y^*u) = u(vy^*),\\
(x^*u^*)v = u^*(x^*v), & y(v^*u) = u(yv^*), & u^*(xv) = x(u^*v),\\
(uy^*)v = (vu)y^*, & v(x^*u) = x^*(vu), & (yu^*)v = (vy)u^*,\\
v(xu) = (xv)u, & y(u^*v^*) = (v^*y)u^*, & x(vu) = (vx)u,\\
v(u^*x) = x(vu^*), & (yu^*)v = (vu^*)y, & v(u^*x^*) = (x^*v)u^*,\\
(uy^*)v = (vy^*)u, & (vu^*)x = (xv)u^*, & (uv^*)y = (yv^*)u.
\end{array}$$

Заменим уравнения, обе части которого содержат x^* или y^*, соотношениями сопряженных элементов. Заметим, что либо u, либо u^* имеется в каждом уравнении. Поэтому можно подставить u вместо u^*, поскольку $A^* = A$. Аналогично заменяем v^* на v. Выбирая содержащие x уравнения, мы получаем (6.3.2.1), а оставшиеся уравнения образуют систему (6.3.2.2). □

6.3.3. Лемма. *Пусть $x \in A$. Соотношения* (6.3.2.1) *выполняются для всех $u, v \in A$ в точности тогда, когда $x \in Z(A)$.*

Доказательство. Пусть $x \in A$ и соотношения (6.3.2.1) выполняются для всех $u, v \in A$. Первые три соотношения означают, что $x \in N(A)$. Из четвертого соотношения при $u = 1$ следует, что $x \in K(A)$. Следовательно, $x \in Z(A)$.

Наоборот, если $x \in Z(A)$, то каждое из соотношений в (6.3.2.1) преобразуется в одно из верных соотношений $x(uv) = x(uv)$ или $x(vu) = x(vu)$, т. е. соотношения (6.3.2.1) выполняются для всех $u, v \in A$. □

6.3.4. Лемма. *Пусть $y \in A$. Соотношения* (6.3.2.2) *выполняются для всех $u, v \in A$ в точности тогда, когда $y \in \mathrm{Ann}_{Z(A)}([A, A])$.*

Доказательство. Пусть $y \in A$ и соотношения (6.3.2.2) выполняются для всех $u, v \in A$. Прежде всего, заметим, что для $v = 1$ первое уравнение из (6.3.2.2) превращается в уравнение $uy = yu$; это эквивалентно включению $y \in K(A)$, поскольку элемент $u \in A$ произволен.

Проверим, что $y \in N(A)$. Для любых элементов $u, v \in A$, имеем

$$\begin{gathered}
(yu)v \overset{\underline{1}}{=} (vy)u \overset{\underline{2}}{=} y(uv),\\
(uy)v \overset{1}{=} y(vu) \overset{3}{=} u(yv),\\
(uv)y = y(uv) \overset{4}{=} v(yu) = v(uy) \overset{8}{=} u(vy).
\end{gathered}$$

В этих преобразованиях число над символом отношения — это номер используемого уравнения из (6.3.2.2) (уравнения перенумерованы по строкам слева направо, начиная с первой строки). Число подчеркивания обозначает, что вместо данного уравнения используется эквивалентное уравнение, полученное перестановкой переменных u, v.

Следовательно, $y \in N(A) \cap K(A) = Z(A)$.

Наконец, принимая во внимание доказанное, получаем, что уже из первого уравнения из (6.3.2.2) следует, что $y[u, v] = 0$ для любых $u, v \in A$, т. е. $y \in \mathrm{Ann}_C([A, A])$.

Наоборот, если $y \in \mathrm{Ann}_{Z(A)}([A, A])$, то каждое из соотношений (6.3.2.2) преобразуется в верное соотношение $y(uv) = y(vu)$, т. е. соотношения (6.3.2.2) выполняются для всех $u, v \in A$. □

6.3.5. Теорема. *Пусть A — кольцо с центром $C = Z(A)$, $I = \mathrm{Ann}_C([A, A])$, $R = (A, \alpha)$. Тогда $N(R) = \{(x, y) : x \in C,\ y \in I\}$.*

Доказательство. Утверждение следует из лемм 6.3.2, 6.3.3 и 6.3.4. □

6.3.6. Замечание. Из теоремы 6.3.5 вытекает следующий классический результат (ср. [75, Exercise 2.2.2(a)]): кольцо $R = (A, \alpha)$ ассоциативно в точности тогда, когда кольцо A ассоциативно и коммутативно.

6.4. Процесс Кэли—Диксона и центральная существенность.

6.4.1. Лемма. *Пусть B — подкольцо центра кольца A и I — существенный идеал кольца B. Если B — существенный B-подмодуль модуля ${}_BA$, то I — существенный B-подмодуль модуля ${}_BR$.*

Доказательство. Если r — ненулевой элемент кольца R, то существует такой элемент $b \in B$, что $0 \neq br \in B$. Поэтому существует такой элемент $d \in B$, что $0 \neq dcr \in I$ и $Br \cap I \neq 0$. □

6.4.2. Теорема. *Пусть A — кольцо с центром $C = Z(A)$, $I = \mathrm{Ann}_C([A, A])$, $R = (A, \alpha)$. Кольцо R N-существенно слева (соотв., справа) в точности тогда, когда A центрально существенно и I — существенный идеал кольца C.*

Доказательство. Пусть кольцо A и элемент α удовлетворяют условиям из 6.3.1. Ясно, что $C^* = C$, $I^* = I$, $\alpha C = C$ и $\alpha I = I$.

Пусть кольцо $R = (A, \alpha)$ является N-существенным. Тогда для любого ненулевого элемента $a \in A$ существует такой элемент $(x, y) \in N(R)$, что

$$(x, y)(a, 0) = (xa, ay) \in N(R) \setminus \{0\}.$$

В силу теоремы 6.3.5 $x \in C$ и $y \in I$. Если $xa \neq 0$, то $xa \in C \setminus \{0\}$; в противном случае $ya \in C \setminus \{0\}$. В обоих случаях $Ca \cap C \neq 0$. Таким образом, A — центрально существенное кольцо.

Докажем, что I — существенный идеал кольца C. Пусть $c \in C \setminus \{0\}$. Если $Ic \neq 0$, то $Ic \subseteq I$ и $Cc \cap I \neq 0$. Пусть $Ic = 0$. Рассмотрим элемент $(0, c)$. Существует такой элемент $(x, y) \in N(R)$, что

$$(x, y)(0, c) = (\alpha cy, x^*c) \in N(R) \setminus \{0\}.$$

Поскольку $\alpha y \in I$, $\alpha cy = 0$, имеем, что $x^*c \neq 0$ и $x^*c \in I$ по теореме 6.3.5. Следовательно, $Cc \cap I \neq 0$, что и требовалось.

Наоборот, допустим, что A — центрально существенное кольцо и I — существенный идеал в C.

Пусть $(x, y) \in R \setminus \{0\}$. Существует такой элемент $c \in C$, что $cx \in C \setminus \{0\}$. Поскольку $(c, 0) \in N(R)$, имеем

$$0 \neq (c, 0)(x, y) = (cx, c^*y) \in N(R)(x, y).$$

Если $c^*y = 0$, то

$$0 \neq (cx, 0) \in N(R)(x, y) \cap N(R).$$

Если $c^*y \neq 0$, то по лемме 6.4.1 (для $B = C$) существует такой элемент $d \in C$, что

$$dc^*y \in I \setminus \{0\}.$$

Тогда

$$(d^*, 0)(c, 0)(x, y) = (d^*, 0)(cx, c^*y) = (d^*cx, dc^*y) \in N(R)(x, y) \cap N(R) \setminus \{0\}.$$

Таким образом, кольцо R является N-существенным. □

6.4.3. Замечание. До конца данного подраздела зафиксируем кольцо A с центром $C = Z(A)$ и элемент α, которые удовлетворяют 6.3.1 (процесс Кэли—Диксона). Положим $R = (A, \alpha)$,

$$I = \mathrm{Ann}_C([A, A]), \quad B = \{a \in C \mid a = a^*\}, \quad J = \mathrm{Ann}_B(\{a - a^* \mid a \in A\}).$$

Заметим, что множества B и J инвариантны относительно инволюции и замкнуты относительно умножения на α.

6.4.4. Теорема. $Z(R) = \{(x, y) \mid x \in B,\ y \in I \cap J\}$.

Доказательство. Пусть $(x, y) \in Z(R)$. Поскольку $Z(R) \subseteq N(R)$, то из теоремы 6.3.5 следует, что $x \in C$ и $y \in I$. Из соотношения $(0,1)(x,y) = (x,y)(0,1)$ вытекают соотношения $\alpha y = \alpha y^*$ и $x = x^*$. Следовательно, $x \in B$ и $y \in B \cap I$. Далее, из соотношения $(a,0)(x,y) = (x,y)(a,0)$, $a \in A$, следуют соотношения $ax = xa$ и $ay = a^*y$. Первое соотношение выполняется для любого $x \in C$ и второе соотношение означает, что $y(a - a^*) = 0$, т. е. $y \in J$. Следовательно, $y \in I \cap J$.

Наоборот, если $x \in B$ и $y \in I \cap J$, то $(x, y) \in N(R)$ и для любых $a, b \in A$ имеем

$$(x,y)(a,b) = (xa + \alpha by^*, x^*b + ay) = (xa + \alpha yb, xb + ay),$$
$$(a,b)(x,y) = (ax + \alpha yb^*, a^*y + xb) = (ax + \alpha yb, xb + ay).$$

Таким образом, $(x, y) \in K(R)$, откуда $(x, y) \in Z(R)$. □

6.4.5. Теорема. *Кольцо $R = (A, \alpha)$ центрально существенно в точности тогда, когда B — существенный B-подмодуль кольца R и $J' = J \cap I$ — существенный идеал кольца B.*

Доказательство. Пусть кольцо $R = (A, \alpha)$ центрально существенно. Тогда для любого $a \in A \setminus \{0\}$ существует такой элемент $(x, y) \in Z(R)$, что $(x,y)(a,0) = (xa, ay) \in Z(R) \setminus \{0\}$. В силу теоремы 6.4.4 $x, xa \in B$ и $y, ay = ya \in J'$. Если $xa \neq 0$, то $xa \in B \setminus \{0\}$; в противном случае $ya \in B \setminus \{0\}$. В обоих случаях имеем $Ba \cap B \neq 0$. Таким образом, B — существенный подмодуль модуля ${}_BA$.

Докажем, что $J' =$ — существенный идеал кольца B. Пусть $b \in B \setminus \{0\}$. Если $J'b \neq 0$, то $J'b \subseteq J'$ и

$$Bb \cap J' \supseteq J'b \cap J' \neq 0.$$

Пусть $J'b = 0$. Рассмотрим элемент $(0, b)$. Существует такой элемент $(x, y) \in Z(R)$, что

$$(x,y)(0,b) = (\alpha by, x^*b) \in Z(R) \setminus \{0\}.$$

Поскольку $\alpha y \in J'$ и $\alpha by = 0$, то $x^*b \neq 0$, $x \in B$ и $x^*b = xb \in J'$ по теореме 6.4.4. Следовательно, $Bb \cap J' \neq 0$, что и требовалось.

Наоборот, допустим, что B — существенный B-подмодуль кольца R и J' — существенный идеал кольца B.

Пусть $(x, y) \in R \setminus \{0\}$. Сначала допустим, что $x \neq 0$. Существует такой элемент $b \in B$, что $bx \in B \setminus \{0\}$. Поскольку $(b, 0) \in Z(R)$, имеем

$$0 \neq (b,0)(x,y) = (bx, b^*y) \in Z(R)(x,y).$$

Если $b^*y = 0$, то

$$0 \neq (bx, 0) \in Z(R)(x,y) \cap Z(R).$$

Если $b^*y \neq 0$, то по лемме 6.4.1 (для $I = J'$) существует такой элемент $d \in B$, что

$$db^*y \in J' \setminus \{0\}.$$

Тогда

$$(d^*,0)(b,0)(x,y) = (d^*,0)(bx, b^*y) = (d^*bx, db^*y) \in Z(R)(x,y) \cap Z(R) \setminus \{0\}.$$

Теперь пусть $x = 0$. Тогда $y \neq 0$ и существует такой элемент $d \in B$, что $dy \in J' \setminus \{0\}$. Получаем, что

$$(d^*,0)(0,b) = (0, db) \in Z(R) \setminus \{0\}, \quad (d^*,0) \in Z(R).$$

Таким образом, кольцо R центрально существенно. □

6.5. Алгебры кватернионов и октонионов.

6.5.1. Замечания и обозначения. Пусть K — коммутативное ассоциативное кольцо с тождественной инволюцией и a — обратимый элемент кольца R. Рассмотрим кольцо $A_1 = (K, a)$. Тогда A_1 — коммутативное ассоциативное кольцо, поскольку $B = C = I = J = K$ в обозначениях подраздела 6.4. Естественно записать элементы кольца A_1 в виде $x + yi$, где x, y — элементы кольца K, $i = (0, 1)$. На кольце A_1 можно задать инволюцию соотношением $(x + yi)^* = x - yi$ для любых элементов x и y из K. Выберем обратимый элемент $b \in K$. Тогда b — обратимый симметричный элемент центра кольца A_1 и можно построить кольцо $A_2 = (A_1, b)$. Рассмотрим K-базис алгебры A_2, образованный элементами $1 = (1, 0)$, $i = (i, 0)$, $j = (0, 1)$ и $k = (0, -i)$. Соотношения $i^2 = a$,

$j^2 = b$, $ij = -ji = k$, $ik = -ki = aj$, $kj = -jk = bi$ проверяются непосредственно. Следовательно, полученное кольцо — обобщенная алгебра кватернионов

$$\left(\frac{a, b}{K}\right).$$

Хорошо известно (и также следует из теоремы 6.3.5), что кольцо A_2 ассоциативно (см., например [75, Example 7.2.III]). Центр кольца A_2 имеет вид $K + Ni + Nj + Nk$, где $N = \mathrm{Ann}_K(2)$ (см. [6, Lemma 2(b)]). Пусть B, I, J определяется уравнениями из замечания 6.4.3 для $A = A_2$. Непосредственно проверяется, что $B = C = Z(A_2)$, $I = J = N + Ni + Nj + Nk$.

6.5.2. Лемма. *При данных выше обозначениях I — существенный идеал в B в точности тогда, когда N — существенный идеал в K.*

Доказательство. Пусть I — существенный идеал в B. Если $x \in K \setminus \{0\}$, то существует такой элемент $y \in B$, что $xy \in I \setminus \{0\}$. Положим $y = y_1 + y_2 i + y_3 j + y_4 k$, где $y_1 \in K$ и $y_2, y_3, y_4 \in N$. Если $xy_1 \neq 0$, то $xK \cap N \neq 0$. В противном случае хотя бы один из элементов xy_2, xy_3, xy_4 не равен 0 и каждый их них принадлежат идеалу N, откуда в этом случае $xK \cap N \neq 0$ тоже верно.

Наоборот, если N — существенный идеал в K и

$$x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in I \setminus \{0\},$$

то $x_2, x_3, x_4 \in N$. Если $x_1 \neq 0$, то существует элемент $y \in K$ такой, что $yx_1 \in N \setminus \{0\}$. Тогда $yx \in Bx \cap I \setminus \{0\}$. Если $x_1 = 0$, то $x = 1 \cdot x \in Bx \cap I$. Таким образом, I — существенный идеал кольца B. □

Из изложенного выше мы получаем следующее предложение.

6.5.3. Предложение. *Алгебра кватернионов $((K, a), b)$ является некоммутативным центрально существенным кольцом в точности тогда, когда $\mathrm{Ann}_K(2)$ — собственный существенный идеал кольца K.*

Теперь рассмотрим любой обратимый элемент $c \in K$ и кольцо $A_3 = (A_2, c)$. Положим

$$f_1 = i, \quad f_2 = j, \quad f_3 = k, \quad f_4 = l = (0, 1), \quad f_5 = (0, -i), \quad f_6 = (0, -j), \quad f_8 = (0, -k).$$

Непосредственно проверяется, что базис $\{1, f_1, f_2, \ldots, f_7\}$ K-модуля A_3 удовлетворяет соотношениям из [24] для базисных элементов обобщенной алгебры октонионов $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ (при $\alpha = -a$, $\beta = -b$, $\gamma = -c$).

Аналогично предложению 6.5.3, мы получаем предложение 6.5.4.

6.5.4. Предложение. *Алгебра октонионов $(((K, a), b), c)$ является неассоциативным центрально существенным кольцом в точности тогда, когда $\mathrm{Ann}_K(2)$ — собственный существенный идеал кольца K.*

6.5.5. Пример. Пусть $K = \mathbb{Z}_4$. Докажем, что $R = (((K, 1), 1), 1)$ — неассоциативное некоммутативное центрально существенное кольцо. Действительно, $\mathrm{Ann}_K(2) = 2K$ — существенный собственный идеал в K. Поэтому некоммутативность кольца $((K, 1), 1)$ (и некоммутативность кольца R, содержащего $((K, 1), 1)$) следует из предложения 6.5.3 и неассоциативность кольца R следует из предложения 6.5.4.

Заметим, что кольцо $R = (((K, 1), 1), 1)$ альтернативно, а кольцо $(R, 1)$ не является даже альтернативным справа, т. е. $(R, 1)$ не удовлетворяет тождеству $(x, y, y) = 0$ [75, Exercise 7.2.2]. Таким образом, существуют альтернативные неассоциативные конечные центрально существенные кольца и неальтернативные конечные центрально существенные кольца.

6.5.6. Открытые вопросы.

1. Существуют ли N-существенные слева кольца, которые не являются N-существенными справа?
2. Существуют ли коммутативные N-существенные (эквивалентно, центрально существенные) неассоциативные кольца?

3. Существуют ли альтернативные справа центрально существенные или N-существенные неальтернативные кольца?
4. Как можно обобщить полученные результаты на случай неунитальных колец и случай, когда элемент α из определения 6.3.1 не предполагается обратимым?
5. Поскольку процесс Кэли—Диксона приводит к неассоциативным телам (см., например, [12, 22]), кажется естественным сформулировать следующий вопрос: что можно сказать об N-существенности этих тел?

Заметим, что центрально существенные полупервичные кольца коммутативны, но неизвестно, являются ли N-существенные полупервичные кольца ассоциативными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубровин Н. И.* Рациональные замыкания групповых колец левоупорядоченных групп// Мат. сб. — 1993. — *184*, № 7. — С. 3–48.
2. *Елизаров В. П.* О теоремах Голди// Сиб. мат. ж. — 1969. — *10*, № 1. — С. 58–63.
3. *Злыднев Д. В.* Кольца частных колец с большим центром// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2014. — № 2. — С. 25–30.
4. *Марков В. Т., Туганбаев А. А.* Центрально существенные кольца// Дискр. мат. — 2018. — *30*, № 2. — С. 55–61.
5. *Марков В. Т., Туганбаев А. А.* Центрально существенные кольца, которые не обязательно унитальны или ассоциативны// Дискрет. матем. — 2018. — *30*, № 4. — С. 42–47.
6. *Туганбаев А. А.* Алгебры кватернионов над коммутативными кольцами// Мат. заметки. — 1993. — *53*, № 2. — С. 126–131.
7. *Туганбаев А. А.* Дистрибутивные полупервичные кольца// Мат. заметки. — 1995. — *58*, № 5. — С. 736–761.
8. *Чередникова А. В.* Кольца квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 3// Мат. заметки. — 1998. — *63*, № 5. — С. 763–773.
9. *Albert A. A.* Quadratic forms permitting composition// Ann. Math. — 1942. — *43*, № 1. — P. 161–177.
10. *Amitsur S. A.* Radicals of polynomial rings// Can. J. Math. — 1956. — *8*. — P. 355–361.
11. *Bourbaki N.* Algebra I: Chapters 1–3. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1989.
12. *Brown R. B.* On generalized Cayley–Dickson algebras// Pac. J. Math. — 1967. — *20*, № 3. — P. 415–422.
13. *Brown K. A.* On zero divisors in group rings// Bull. London Math. Soc. — 1976. — *8*, № 3. — P. 251–256.
14. *Brown K. A.* Quotient rings of group rings// Compos. Math. — 1978. — *36*, № 3. — P. 243–254.
15. *Camillo V.* Distributive modules// J. Algebra. — 1975. — *36*, № 1. — P. 16–25.
16. *Clifford A. H., Prieston G. B.* The Algebraic Theory of Semigroups. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1961.
17. *Corner A. L. S., Göbel R.* Prescribing endomorphism algebras, a unified treatmend// Proc. London Math. Soc. — 1985. — *50*, № 3. — P. 447–479.
18. *Dicman A. P.* On p-groups// Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1937. — *15*. — P. 71–76.
19. *Drozd Y. A., Kirichenko V. V.* Finite Dimensional Algebras. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.
20. *Dugas M., Göbel R.* Every cotorsion-free algebra is an endomorphism algebra// Math. Z. — 1982. — *181*, № 4. — P. 451–470.
21. *Faticoni T. G.* Direct Sum Decompositions of Torsion-Free Finite Rank Groups. — New York: Chapman and Hall/CRC, 2007.
22. *Flaut C.* Divison algebras with dimension 2^t, $t \in \mathbb{N}$// An. Ştiint. Univ. "Ovidius" Constanţa. Ser. Mat. — 2006. — *13*, № 2. — P. 31–38.
23. *Flaut C., Shpakivskyi V.* Some identities in algebras obtained by the Cayley–Dickson process// Adv. Appl. Clifford Algebras. — 2013. — *23*, № 1. — P. 63–76.
24. *Flaut C., Ştefănescu M.* Some equations over generalized quaternion and octonion division algebras// Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum. — 2009. — *52 (100)*, № 4. — P. 427–439.
25. *Fuchs L.* Abelian Groups. — Springer Cham, 2015.
26. The GAP Group. GAP – Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra, https://www.gap-system.org.

27. *Golan J. S.* Semirings and Their Applications. — Dordrecht–Boston–London: Springer, 1999.
28. *Goodearl K. R.* Von Neumann Regular Rings. — London: Pitman, 1979.
29. *Hall M.* The Theory of Groups. — New York: MacMillan, 1959.
30. *Hebisch U., Weinert H. J.* Semirings: Algebraic Theory and Application in Computer Science. — Singapore: World Scientific.
31. *Herstein I. N.* Noncommutative Rings. — Am. Math. Soc., 2005.
32. *Herstein I. N., Small L. W.* Rings of quotients of group algebras// J. Algebra. — 1971. — *19*, № 2. — P. 153–155.
33. *Jelisiejew J.* On commutativity of ideal extensions// Commun. Algebra. — 2016. — *44*, № 5. — P. 1931–1940.
34. *Jensen C. U.* A remark on arithmetical rings// Proc. Am. Math. Soc. — 1964. — *15*, № 6. — P. 951–954.
35. *Kaplansky I., Berberian S. K.* Rings of Operators. — New York: Benjamin, 1968.
36. *Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A.* Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Pubishers, 2003.
37. *Lam T. Y.* A First Course in Noncommutative Rings. — New York: Springer-Verlag, 2001.
38. *Lambek J.* Lectures on Rings and Modules. — Am. Math. Soc., 2009.
39. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential endomorphism rings of abelian groups// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 3. — P. 1249–1256.
40. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential torsion-free rings of finite rank// Beitr. Algebra Geom. — 2021. — *62*, № 3. — P. 615–622.
41. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential group algebras and classical rings of fractions// Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 12. — P. 2890–2894.
42. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential semirings// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 3. — P. 653–658.
43. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Local centrally essential subalgebras of rriangular algebras// Lin. Multilin. Algebra. — 2022. — *70*, № 13. — P. 2415–2424.
44. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential semigroup algebras/ `arXiv: abs/2204.10518.`
45. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Ideals and Factor Rings of Centrally Essential Rings/ `arXiv: abs/2204.10507.`
46. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Centrally essential group algebras// J. Algebra. — 2018. — *512*, № 15. — P. 109–118.
47. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Rings essential over their centers// Commun. Algebra. — 2019. — *47*, № 4. — P. 1642–1649.
48. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Rings with polynomial identity and centrally essential rings// Beitr. Algebra Geom. — 2019. — *60*, № 4. — P. 657–661.
49. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Cayley–Dickson process and centrally essential rings// J. Algebra Appl. — 2020. — *19*, № 5. — P. 1950229.1–1950229.10.
50. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Uniserial Artinian centrally essential rings// Beitr. Algebra Geom. — 2020. — *61*, № 1. — P. 23–33.
51. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Constructions of centrally essential rings// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 1. — P. 198–203.
52. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Uniserial Noetherian centrally essential rings// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 1. — P. 149–153.
53. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Distributive Noetherian centrally essential rings// J. Algebra Appl. — 2020.
54. *Năstăsescu C., Popescu N.* Anneaux semi-artiniens// Bull. Soc. Math. France. — 1968. — *96*. — P. 357–368.
55. *Nishigôri N.* On some properties of *FC*-groups// J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A. — 1957. — *21*, № 2. — P. 99–105.
56. *Okniński J.* Semigroup Algebras. — New York–Basel: Marcel Dekker, 1991.
57. *Passman D. S.* Infinite Group Rings. — Marcel Dekker, 1971.
58. *Passman D. S.* The Algebraic Structure of Group Rings. — New York: Wiley, 1977.
59. *Pierce R. S., Vinsonhaler C. I.* Realizing central division algebras// Pac. J. Math. — 1983. — *109*, № 1. — P. 165-–177.

60. *Pumplün S., Astier V.* Nonassociative quaternion algebras over rings// Isr. J. Math. — 2006. — *155*. — P. 125–147.
61. *Rowen L.* Some results on the center of a ring with polynomial identity// Bull. Am. Math. Soc. — 1973. — *79*, № 1. — P. 219–223.
62. *Rowen L. H.* Polynomial Identities in Ring Theory. — New York: Academic Press, 1980.
63. *Rowen L. H.* Ring Theory. — New York: Academic Press, 1988.
64. *Schafer R. D.* An Introduction to Nonassociative Algebras. — New York: Academic Press, 1966.
65. *Scott W. R.* Group Theory. — Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964.
66. *Sehgal S. K.* Nilpotent elements in group rings// Manuscr. Math. — 1975. — *15*, № 1. — P. 65–80.
67. *Stephenson W.* Modules whose lattice of submodules is distributive// Proc. London Math. Soc. — 1974. — *s3-28*, № 2. — P. 291–310.
68. *Suprunenko D. A., Tyschkevich R. I.* Commutative Matrices. — New York: Academic Press, 1968.
69. *Tuganbaev A. A.* Semidistributive Modules and Rings. — Dordrecht Netherlands: Springer, 1998.
70. *Tuganbaev A. A.* Centrally essential rings// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 2. — P. 136–144.
71. *Tuganbaev A. A.* On rings of weak global dimension at most one// Mathematics. — 2021. — *9*, № 21. — 2643.
72. *Waterhouse W. C.* Nonassociative quaternion algebras// Algebras Groups Geom. — 1987. — *4*, № 3. — P. 365–378.
73. *Wisbauer R.* Foundations of Module and Ring Theory: A Handbook for Study and Research. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.
74. *Zariski O., Samuel P.* Commutative Algebra. I. — New York: Springer-Verlag.
75. *Zhevlakov K. A., Slin'ko A. M., Shestakov I. P., Shirshov A. I.* Rings That Are Nearly Associative. — New York–London: Academic Press, 1982.

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: tuganbaev@gmail.com