ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 3–9
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-3-9

УДК 517.977.56

ВАРИАЦИОННОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ В СОСТАВНОЙ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗНЫХ ТИПОВ

© 2023 г. **А. В. АРГУЧИНЦЕВ, В. П. ПОПЛЕВКО**

Аннотация. Рассматривается линейная задача оптимального управления системой дифференциальных уравнений с частными производными типа кинетика-диффузия. Управляемое граничное условие на одном из концов представлено в виде линейного обыкновенного дифференциального уравнения. Задачи такого типа возникают при управлении динамикой популяций с учетом пространственного распределения и возрастной структуры. В работе исходная задача сводится к двум задачам оптимального управления обыкновенными дифференциальными уравнениями. Предложенный подход основан на использовании точных формул приращения целевого функционала. Полученный результат сформулирован в виде вариационного условия оптимальности. Приведен иллюстративный пример.

Ключевые слова: двухкомпонентная модель динамики популяций, граничное управление, оптимальное управление, точные формулы приращения, вариационное условие оптимальности.

VARIATION OPTIMALITY CONDITION OF A BOUNDARY CONTROL IN A COMPOSITE MODEL OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF DIFFERENT TYPES

© 2023 **A. V. ARGUCHINTSEV, V. P. POPLEVKO**

Abstract. A linear optimal control problem of a system of differential equations with partial derivatives of the kinetic-diffusion type is considered. The controlled boundary condition is determined as a solution of a linear ordinary differential equation. Problems of this type arise when controlling the dynamics of populations, taking into account the spatial distribution and age structure. In the paper, the problem is reduced to two problems of optimal control of ordinary differential equations. The proposed approach is based on the use of exact increment formulas the goal functional. The final result is formulated as a variation optimality condition. An illustrative example is given.

Keywords and phrases: two-component model of population dynamics, boundary control, optimal control, exact increment formulas, variation optimality condition.

AMS Subject Classification: 49J20, 49M05

1. Введение. Исследования задач оптимального управления системами дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений разных типов (уравнения с частными производными — обыкновенные дифференциальные уравнения на границах, уравнения с частными производными

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00296).

 © ВИНИТИ РАН, 2023

разных типов, дифференциальные — интегро-дифференциальные уравнения и т.п.) стимулируется многочисленными приложениями в областях химической технологии, биологии, экологии и др.

Традиционным направлением изучения подобных проблем является распространение подходов, ранее разработанных для задач управления обыкновенными дифференциальными уравнениями. Конечно же, дело сильно осложняется разнообразием классов дифференциальных уравнений, необходимостью использования аппаратов обобщенных решений в условиях разрывности управляющих воздействий, сложностью численного решения уравнений и т. п. Однако именно при изучении отдельных классов задач оптимального управления системами с распределенными параметрами выявлен ряд особенностей, которые существенно отличают их от задач в системах с распределенными параметрами. В частности, в задачах оптимального управления гиперболическими уравнениями и системами гиперболических уравнений справедливы вариационные условия оптимальности. Так называемый вариационный принцип максимума (первые результаты были получены В. А. Дыхта и В. А. Срочко; см. [5, 6]) формулируется как условие максимума функционала в задачах оптимального управления, построенных на характеристиках исходных гиперболических уравнений или систем. При этом в случае распределенных управлений результат оказался более сильным по сравнению с классическим принципом максимума. В случае же граничных управлений классический принцип максимума часто вообще не справедлив (см. [15]).

В данной статье рассмотрен один класс задач, возникающий при управлении динамикой популяций. Возможным подходом к математическому моделированию динамики популяций с учетом пространственного распределения организмов является использование так называемой двухкомпонентной модели, содержащей дифференциальные уравнения разных типов (см. [1]). Дифференциальным уравнением параболического типа описывается часть популяции молодого возраста, перемещающаяся в пространстве, а простейшим уравнением гиперболического типа — часть популяции старшего возраста. Модели такого типа обычно применяются для описания динамики популяций наземных растений или водорослей. Они могут быть также применены для изучения динамики двух взаимодействующих популяций, в которых организмы одного вида достаточно быстро мигрируют в пространстве, а организмы другого вида стационарно распределяются на определенных площадях.

В настоящей работе для задачи оптимального управления в одной из указанных моделей получено неклассическое условие оптимальности, которое позволяет свести исходную задачу к задаче оптимального управления обыкновенными дифференциальными уравнениями. Предлагаемый подход не использует упомянутых выше идей представления решений гиперболических уравнений с использованием аппарата характеристик. Он основан на применении неклассических точных (без остаточного члена) формул приращения целевого функционала. Для задач оптимального управления линейными гиперболическими системами данный подход был применен в [3, 11, 12]. В настоящей работе он распространен на случай системы дифференциальных уравнений, содержащей параболическое уравнение и простейшее уравнение гиперболического типа. Схема редукции исходной задачи к задаче оптимального управления обыкновенным дифференциальным уравнением проиллюстрирована на примере.

2. Постановка задачи.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned}
&x_t - x_{ss} = f_1(s,t)x + f_2(s,t)y,\\
&y_t = f_3(s,t)x + f_4(s,t)y,\\
&(s,t) \in \Pi, \quad \Pi = S \times T, \quad S = [s_0, s_1], \quad T = [t_0, t_1],\\
&y(s,t_0) = y^0(s), \quad x(s,t_0) = x^0(s), \quad s \in S; \quad x_s(s_1,t) = q(t), \quad t \in T,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $x(s,t)$, $y(s,t)$ — скалярные функции состояния.

Условия на левом конце фазовой траектории x определяются из управляемого обыкновенного дифференциального уравнения:

$$x_t(s_0,t) = B(u(t),t)x(s_0,t) + d(u(t),t), \quad t \in T. \tag{2}$$

В качестве множества допустимых управлений выберем совокупность ограниченных и измеримых на T вектор-функций $u(t)$, удовлетворяющих ограничениям типа включения

$$u(\cdot) \in U, \quad t \in T, \tag{3}$$

где $U \subset R^m$. Для основного результата настоящей работы вид множества U не имеет значения.

Требуется найти допустимое управление, доставляющее минимум целевому функционалу

$$J(u) = \int\limits_S \Big[\alpha(s)x(s,t_1) + \beta(s)y(s,t_1)\Big]\, ds \longrightarrow \min, \quad u \in U. \tag{4}$$

Задача (1)–(4) рассматривается при следующих предположениях:

(i) функции $q(t)$, $x^0(s)$ и $y^0(s)$ непрерывны на T и S соответственно;

(ii) функции $f_i(s,t)$, $i = 1,2,3,4$, $B(u,t)$, $d(u,t)$, $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ непрерывны по совокупности своих аргументов.

При моделировании динамики популяций функции $x(s,t)$ и $y(s,t)$ определяют плотности двух различных популяций или двух частей одной и той же популяции (см. [8]).

Сделаем замечание по поводу понятия решения начально-краевой задачи (1)–(2). Основным результатом работы является редукция (1)–(4) к задаче оптимального управления обыкновенным дифференциальным уравнением. При этом в зависимости от смысла поставленной задачи можно работать в разных функциональных пространствах. В задачах оптимального управления динамикой популяций часто удобно иметь дело с классическими решениями начально-краевой задачи. Возможны варианты обобщенных решений из пространства $W_2^1(\Pi)$ (см. [7]). Основным является корректность осуществляемых далее операций — возможность применения классических или обобщенных формул интегрирования по частям, существование в том же классе решений сопряженной задачи.

Отметим, что задача (1)–(4) является «почти линейной»: линейны оба дифференциальных уравнения с частными производными, линеен целевой функционал. Однако коэффициент B в обыкновенном дифференциальном уравнении (2) зависит от управления. В связи с этим в рассматриваемой задаче принцип максимума Л. С. Понтрягина не является достаточным условием оптимальности. Для решения задач данного типа обычно применяют методы, разработанные для общих нелинейных систем. Обычно эти методы являются итерационными, причем на каждой итерации необходимо интегрировать исходную и сопряженную системы с частными производными. Изложенный ниже подход избавляет от такой необходимости.

3. Формула приращения функционала. Рассмотрим два допустимых процесса: исходный $\{u,x,y\}$ и проварьированный $\{\widetilde{u} = u + \Delta u,\ \widetilde{x} = x + \Delta x,\ \widetilde{y} = y + \Delta y\}$. Введем обозначение $Dx = x_t - x_{ss}$. Задача в приращениях имеет вид:

$$\begin{aligned}
&D\Delta x = f_1(s,t)\Delta x + f_2(s,t)\Delta y,\\
&\Delta y_t = f_3(s,t)\Delta x + f_4(s,t)\Delta y,\\
&\Delta y(s,t_0) = 0, \quad \Delta x(s,t_0) = 0, \quad s \in S; \quad \Delta x_s(s_1,t) = 0, \quad t \in T,\\
&\Delta x_t(s_0,t) = B(\widetilde{u},t)\widetilde{x}(s_0,t) - B(u,t)x(s_0,t) + d(\widetilde{u},t) - d(u,t).
\end{aligned} \tag{5}$$

Используем следующее представление для правой части равенства (5):

$$\Delta x_t(s_0,t) = \Delta_{\widetilde{u}} B(u,t)\widetilde{x}(s_0,t) + B(u,t)\Delta x(s_0,t) + \Delta d(u,t).$$

Приращение функционала $\Delta J(u) = J(\widetilde{u}) - J(u)$ запишем в следующем виде:

$$\Delta J(u) = J(\widetilde{u}) - J(u) = \int\limits_S \Big[\alpha(s)\Delta x(s,t_1) + \beta(s)\Delta y(s,t_1)\Big]\, ds.$$

Добавим в формулу приращения функционала нулевые слагаемые:

$$\iint\limits_{\Pi} \psi_1(s,t)\Big[D\Delta x - f_1(s,t)\Delta x - f_2(s,t)\Delta y\Big]\,ds\,dt,$$

$$\iint\limits_{\Pi} \psi_2(s,t)\Big[\Delta y_t - f_3(s,t)\Delta x - f_4(s,t)\Delta y\Big]\,ds\,dt,$$

$$\int\limits_{T} p(t)\Big[\Delta x_t(s_0,t) - \Delta_{\widetilde{u}}B(u,t)\widetilde{x}(s_0,t) - B(u,t)\Delta x(s_0,t) - \Delta d(u,t)\Big]\,dt.$$

Применяя формулы интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned}
\Delta J(u) = \int\limits_{S} \Big[\alpha(s)\Delta x(s,t_1) + \beta(s)\Delta y(s,t_1)\Big]\,ds+ \\
+\int\limits_{S} \Big[\psi_1(s,t_1)\Delta x(s,t_1) - \psi_1(s,t_0)\Delta x(s,t_0)\Big]\,ds - \iint\limits_{\Pi} \psi_{1t}\Delta x\,ds\,dt- \\
-\int\limits_{T} \Big[\psi_1(s_1,t)\Delta x_s(s_1,t) - \psi_1(s_0,t)\Delta x_s(s_0,t) - \psi_{1s}\Delta x(s_1,t) + \psi_{1s}\Delta x(s_0,t)\Big]\,dt- \\
-\iint\limits_{\Pi} \psi_{1ss}\Delta x\,ds\,dt + \int\limits_{S} \Big[\psi_2(s,t_1)\Delta y(s,t_1) - \psi_2(s,t_0)\Delta y(s,t_0)\Big]\,ds - \iint\limits_{\Pi} \psi_{2t}\Delta y\,ds\,dt- \\
-\iint\limits_{\Pi} \Big[\psi_1(f_1(s,t)\Delta x + f_2(s,t)\Delta y) + \psi_2(f_3(s,t)\Delta x + f_4(s,t)\Delta y)\Big]\,ds\,dt+ \\
+p(t_1)\Delta x(s_0,t_1) - p(t_0)\Delta x(s_0,t_0) - \int\limits_{T} p_t\Delta x(s_0,t)\,dt- \\
-\int\limits_{T} p(t)\Big[\Delta_{\widetilde{u}}B(u,t)\widetilde{x}(s_0,t) + B(u,t)\Delta x(s_0,t) + \Delta d(u,t)\Big]\,dt.
\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы функции $\psi_1(s,t)$, $\psi_2(s,t)$, $p(t)$ являлись решениями следующей сопряженной задачи:

$$\begin{aligned}
&\psi_{1t} + \psi_{1ss} = -\psi_1 f_1 - \psi_2 f_3, \quad \psi_1(s,t_1) = -\alpha(s), \\
&\psi_1(s_0,t) = 0, \quad \psi_{1s}(s_1,t) = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&\psi_{2t} = -\psi_1 f_2 - \psi_2 f_4, \quad \psi_2(s,t_1) = -\beta(s); \\
&p_t = -B^T(u,t)p - \psi_{1s}(s_0,t), \quad p(t_1) = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Тогда формула приращения функционала примет следующий вид:

$$\Delta J(u) = -\int\limits_{T} p(t)\Big[\Delta_{\widetilde{u}}B(u,t)\widetilde{x}(s_0,t) + \Delta d(u,t)\Big]\,dt. \tag{8}$$

Формула (8) является точной (без остаточных членов). Отличие от классического варианта формулы приращения, обычно применяемой при доказательстве принципа максимума Л. С. Понтрягина (см. [9]), заключается в том, что обыкновенное дифференциальное уравнение (2) интегрируется на возмущенном управлении.

Вторая формула приращения является симметричной и получается в результате использования в (5) следующего представления:

$$\Delta x_t(s_0,t) = \Delta_{\widetilde{u}}B(u,t)x(s_0,t) + B(\widetilde{u},t)\Delta x(s_0,t) + \Delta d(u,t).$$

Тогда
$$\Delta J(u) = -\int\limits_T p(t,\widetilde{u})\Big[\Delta_{\widetilde{u}} B(u,t)x(s_0,t,u) + \Delta d(u,t)\Big]\,dt. \tag{9}$$
Формула (9) также является точной (без остаточных членов), при этом обыкновенное дифференциальное уравнение (7) в сопряженной задаче интегрируется на возмущенном управлении.

4. Вариационное условие оптимальности. На основе полученных формул приращения можно осуществить редукцию исходной задачи оптимального управления в частных производных к задачам оптимального управления обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Например, формула приращения (8) приводит к следующей задаче:
$$\begin{gathered} I(v) = -\int\limits_T p(t,u)\Big[B(v(t),t) - B(u(t),t)z(t,v) + d(v(t),t) - d(u(t),t)\Big]\,dt \to \min,\\ \begin{aligned} &\dot z = B(v(t),t)z(t) + d(v(t),t), \quad t\in T,\\ &z(t_0) = x^0(s_0),\\ &v(t)\in U, \quad t\in T. \end{aligned}\end{gathered} \tag{10}$$
Здесь $z(t)$ — функция состояния, $u(t)$ и $p(t,u)$ — фиксированные функции, $v(t)$ — управляющее воздействие, удовлетворяющее ограничениям на управления в исходной задаче.

Формула приращения (9) приводит к следующей задаче:
$$\begin{gathered} \Phi(v) = -\int\limits_T p(t,v)\Big[B(v(t),t) - B(u(t),t)x(s_0,t,u) + d(v(t),t) - d(u(t),t)\Big]\,dt \to \min,\\ \begin{aligned} &\dot p = -B^T(u,t)p - \psi_{1s}(s_0,t),\\ &p(t_1) = 0,\\ &v(t)\in U, \quad t\in T. \end{aligned}\end{gathered} \tag{11}$$
Здесь $u(t)$ и $\psi_1(s_0,t)$ — фиксированные функции, $x(s_0,t,u)$ — решение задачи Коши (2) при $u = u(t)$, $p = p(t)$ — функция состояния.

Полученные результаты доказывают справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы управление $u^*(t)$ было оптимальным в задаче* (1)–(4)*, необходимо и достаточно, чтобы управление $v^* = u^*(t)$ было оптимальным в каждой из задач* (10) *и* (11) *для любого допустимого управления $u(t)$.*

Отметим, что в силу произвольности управления $u(t)$ доказанная теорема на самом деле является бесконечным множеством вариационных условий оптимальности.

На основе полученного результата можно провести редукцию исходной задачи оптимального управления (1)–(4) к задаче оптимального управления обыкновенным дифференциальным уравнением по аналогии с [3, 11, 12].

5. Иллюстративный пример. В квадрате $S\times T = [0;1]\times[0;1]$ рассмотрим задачу оптимального управления (1)–(4), в которой
$$\begin{gathered} f_1(s,t) = f_2(s,t) = f_4(s,t) = 0, \quad f_3(s,t) = e^t,\\ \phi_1(s,t) = 2s\cdot\cos t, \quad \phi_2(s,t) = 0, \quad x^0(s) = 0, \quad y^0(s) = s^2,\\ q(t) = t+2, \quad b(u(t),t) = u, \quad d(u,t) = 0,\\ \alpha(s) = -s(s-1)^2\cdot e, \quad \beta(s) = s^3 - 2s^2 + 7s - 4. \end{gathered}$$
Имеем следующую задачу:
$$\begin{gathered} x_t - x_{ss} = 2s\cdot\cos t, \quad y_t = e^t\cdot x; \quad x(s,0) = 0, \quad y(s,0) = s^2;\\ x_s(1,t) = t+2, \quad x_t(0,t) = u\cdot x(0,t); \quad u(t)\in[0;2]. \end{gathered}$$

Рассмотрим следующую задачу минимизации:

$$J(u) = \int\limits_S \Big[- s(s-1)^2 \cdot e \cdot x(s,1) + (s^3 - 2s^2 + 7s - 4) y(s,1) \Big] \, ds \to \min .$$

Выпишем сопряженную задачу (6)–(7):

$$\psi_{1t} + \psi_{1ss} = -\psi_2 \cdot e^t,$$
$$\psi_1(s,1) = s(s-1)^2 \cdot e, \quad \psi_1(0,t) = 0; \quad \psi_{1s}(1,t) = 0;$$
$$\psi_{2t} = 0, \quad \psi_2(s,1) = -(s^3 - 2s^2 + 7s - 4);$$
$$p_t = -u \cdot p - \psi_{1s}(0,t), \quad p(1) = 0.$$

Задача относительно функции $\psi_1(s,t)$, $\psi_2(s,t)$ не зависит от управления. Достаточно просто можно найти аналитическое решение этой начально-краевой задачи:

$$\psi_1(s,t) = s(s-1)^2 \cdot e^t, \quad \psi_2(s,t) = -(s^3 - 2s^2 + 7s - 4).$$

Выберем допустимое управление $u(t) \equiv 0$ для всех $t \in [0,1]$. Тогда решение сопряженной задачи относительно $p(t)$ будет иметь вид

$$p(t) = -e^t + e.$$

На основании теоремы 1 исходная задача сводится к следующей задаче оптимального управления обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$I(v) = \int\limits_0^1 (e^t - e) \cdot v(t) \cdot z(t,v) \, dt \to \min;$$
$$z_t = v \cdot z, \quad z(0) = 0; \quad v(t) \in [0;2].$$

6. Заключение. Основным результатом работы является редукция исходной задачи оптимального управления составной системой, содержащей уравнения параболического типа, гиперболического типа и обыкновенное дифференциальное уравнение к задаче оптимального управления обыкновенным дифференциальным уравнением. При этом в результате редукции исходную или сопряженную систему дифференциальных уравнений с частными производными нужно проинтегрировать всего лишь один раз — в самом начале процесса; именно эта операция обычно наиболее трудоемка при решении оптимизационных задач.

Для решения редуцированных задач можно использовать целый арсенал методов (см., например, [13, 14]). Полученные задачи являются билинейными, поэтому принцип максимума Понтрягина не гарантирует оптимальность. Для такого рода задач можно эффективно применять методы, предложенные в [4, 10].

Отметим, что представляет интерес распространение предложенной методики на случай квадратичного целевого функционала по аналогии с [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апонин Ю. М., Апонина Е. А., Кузнецов Ю. А.* Математическое моделирование пространственно-временной динамики возрастной структуры популяции растений// Мат. биология и биоинформатика. — 2006. — *1*, № 1. — С. 1–16.
2. *Аргучинцев А. В., Кедрин В. С., Кедрина М. С.* Вариационное условие оптимальности в задаче управления гиперболическими уравнениями с динамическими граничными условиями// Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. информ. — 2021. — № 1. — С. 13–23.
3. *Аргучинцев А. В., Поплевко В. П.* Вариационное условие оптимальности в задаче управления линейной гиперболической системой первого порядка с запаздыванием на границе// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *212*. — С. 3–9.
4. *Аргучинцев А. В., Срочко В. А.* Процедура регуляризации билинейных задач оптимального управления на основе конечномерной модели// Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер.Ё10. Прикл. мат. Информ. Процессы. управл. — 2022. — *18*, № 1. — С. 179–187.

5. *Бокмельдер Е. П., Дыхта В. А., Москаленко А. И. и др.* Условия экстремума и конструктивные методы решения в задачах оптимизации гиперболических систем. — Новосибирск: Наука, 1993.
6. *Васильев О. В., Срочко В. А., Терлецкий В. А.* Методы оптимизации и их приложения. Ч. 2. Оптимальное управление. — Новосибирск: Наука, 1990.
7. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1983.
8. *Ризниченко Г. Ю., Рубин А. Б.* Математические методы в биологии и экологии. Биофизическая динамика продукционных процессов. Ч. 1. — М.: Юрайт, 2019.
9. *Розоноэр Л. И.* Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, I// Автомат. телемех. — 1959. — *20*, № 10. — С. 1320–1334.
10. *Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В.* Параметризация некоторых задач управления линейными системами// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. мат. — 2019. — *30*. — С. 83–98.
11. *Arguchintsev A., Poplevko V.* An optimal control problem by a hybrid system of hyperbolic and ordinary differential equations// Games. — 2021. — *12*, № 1. — 23.
12. *Arguchintsev A. V., Poplevko V. P., Sinitsyn A. V.* Variational optimality condition in control of hyperbolic systems with boundary delay parameters// Cybernet. Phys. — 2022. — *11*, № 2. — P. 61—66.
13. *Biral F., Bertolazzi E., Bosetti P.* Notes on numerical methods for solving optimal control problems// IEEJ J. Ind. Appl. — 2016. — *5*. — P. 154—166.
14. *Rao A.* A survey of numerical methods for optimal control// Adv. Astron. Sci. — 2009. — *135*. — P. 1–32.
15. *Wolfersdorf L.* A counterexample to the maximum principle of Pontryagin for a class of distributed parameter systems// Z. Angew. Math. Mech. — 1980. — *6*, № 4. — P. 204.

Аргучинцев Александр Валерьевич
Иркутский государственный университет
E-mail: arguch@math.isu.ru

Поплевко Василиса Павловна
Иркутский государственный университет
E-mail: vasilisa@math.isu.ru