ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 10–18
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-10-18

УДК 519.6

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. **С. Г. БУЛАНОВ**

Аннотация. Получены необходимые и достаточные критерии устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Критерии получены в мультипликативной форме на основе преобразования разностных схем численного интегрирования и сведены к аддитивной и интегральной форме. Представлены формальные ограничения, при которых конструируются критерии, указаны условия их применимости.

***Ключевые слова*:** устойчивость по Ляпунову, компьютерный анализ устойчивости, численное моделирование устойчивости.

NECESSARY AND SUFFICIENT CRITERIA OF LYAPUNOV STABILITY FOR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2023 **S. G. BULANOV**

Abstract. Necessary and sufficient criteria of Lyapunov stability for systems of ordinary differential equations are obtained. The criteria are obtained in the multiplicative form based on the transformation of difference schemes for numerical integration and are converted to the additive and integral forms. The formal restrictions for these criteria are constructed and their applicability conditions are indicated.

***Keywords and phrases*:** Lyapunov stability, computer stability analysis, numerical modeling of stability.

***AMS Subject Classification*:** 34D20

1. Введение. Классическая задача анализа устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) актуальна для многочисленных отраслей современной науки и техники (см. [1, 4]). При этом существенно, чтобы анализ выполнялся в режиме реального времени, что требует разработки численных методов анализа устойчивости. В статье предлагается подход к анализу устойчивости систем ОДУ на основе преобразования разностных схем численного интегрирования. В результате преобразований формируются мультипликативные критерии устойчивости систем линейных и нелинейных ОДУ в виде необходимых и достаточных условий. Приводятся формальные ограничения, при которых конструируются критерии, выполнено их математическое обоснование, указана область применения, исследована возможность использования для теоретического и компьютерного анализа устойчивости. Далее конструируются разновидности эквивалентных критериев в аддитивной и интегральной формах. На основе критериев в интегральной форме строятся условия устойчивости по характеру поведения правой части системы и ее производных. Предлагаемый подход к анализу устойчивости систем ОДУ отличается от известных построением. Помимо построения отличие конструируемых критериев устойчивости заключается в том, что для анализа устойчивости системы линейной ОДУ с переменной матрицей коэффициентов не требуется преобразование правой части системы и вычисление характеристических показателей. В случае матрицы постоянных коэффициентов не нужна информация о характеристическом многочлене матрицы и его корнях. При анализе нелинейных систем не используются методы качественной теории дифференциальных уравнений, в частности, не требуется построение функций Ляпунова. Математическая конструкция критериев устойчивости влечет возможность их программной реализации. Применение высокоточных численных методов при компьютерной реализации критериев должно позволить получить достоверные оценки характера устойчивости систем ОДУ в режиме реального времени. Для вычисления приближенного решения и правой части системы вместе с производными требуемого порядка целесообразно использовать метод варьируемого кусочно-интерполяционного приближения решения задачи Коши для ОДУ (см. [3]).

2. Критерии устойчивости в мультипликативной форме. Рассматривается задача Коши для системы ОДУ, которая имеет нулевое решение:

$$V' = U(t, V), \quad V_0 = V(t_0), \quad t \in [t_0, \infty). \tag{1}$$

Используются канонические нормы вектора, по умолчанию $\|V(t)\| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |v_k(t)|$. Предполагается, что существует такое $\delta > 0$, что в области

$$R = \Big\{ t_0 \leqslant t < \infty \ \forall \tilde{V}(t) \ V(t) : \|\tilde{V}_0 - V_0\| \leqslant \delta \Big\}$$

выполнены все условия существования и единственности решения системы (1). Вектор-функция $U(t, V)$ определена, непрерывна в R и удовлетворяет условию Липшица:

$$\big\|U(t, \tilde{V}) - U(t, V)\big\| \leqslant L \|\tilde{V}(t) - V(t)\| \quad \forall \tilde{V}(t), \ V(t) \in R, \quad L = \mathrm{const}\,.$$

Требуется исследовать на устойчивость в смысле Ляпунова [8] решение системы (1).

Идея подхода заключается в представлении величины возмущения решения на произвольном отрезке $[t_0, t]$ в виде произведения возмущения начальных данных на некоторый коэффициент, который и определяет характер устойчивости. Далее для наглядности предлагаемого подхода и простоты изложения в качестве приближенного метода решения системы ОДУ используется метод Эйлера.

Разность между точным значением возмущенного и невозмущенного решения (1) в форме метода Эйлера с остаточным членом на шаге имеет вид

$$\tilde{v}_{k(i+1)} - v_{k(i+1)} = \tilde{v}_{ki} - v_{ki} + h \frac{u_k(t_i, \tilde{V}_i) - u_k(t_i, V_i)}{\tilde{v}_{ki} - v_{ki}} (\tilde{v}_{ki} - v_{ki}) + w_{ki},$$

или

$$\tilde{v}_{k(i+1)} - v_{k(i+1)} = \big(1 + h D_i^{(k)}\big)\big(\tilde{v}_{ki} - v_{ki}\big) + w_{ki}, \quad k \in \overline{1, n}, \tag{2}$$

где

$$D_i^{(k)} = \frac{u_k(t_i, \tilde{V}_i) - u_k(t_i, V_i)}{\tilde{v}_{ki} - v_{ki}}, \quad t = t_{i+1}, \quad h = \frac{t_{i+1} - t_0}{i + 1}, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Таким образом, величина возмущения на текущем шаге выражается через величину возмущения на предыдущем шаге. Рекуррентно преобразуя выражение (2), получим выражение для возмущения на текущем шаге через возмущение начальных данных:

$$\tilde{v}_{k(i+1)} - v_{k(i+1)} = \prod_{\ell=0}^{i} \big(1 + h D_{i-\ell}^{(k)}\big)\big(\tilde{v}_{k0} - v_{k0}\big) + R_i^{(k)}, \quad k \in \overline{1, n},$$

$$R_i^{(k)} = \sum_{r=0}^{i-1} \prod_{\ell=0}^{r} \big(1 + h D_{i-\ell}^{(k)}\big) w_{k(i-r-1)} + w_{ki}.$$

В рассматриваемых условиях

$$\lim_{i\to\infty} R_i^{(k)} = 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}$$

(см. [5,6]). Отсюда следует

$$\tilde{v}_k(t) - v_k(t) = \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} \left(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\right)\left(\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)\right) \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{3}$$

Согласно (3) величина возмущения равна бесконечному произведению, умноженному на возмущение начальных данных. Следовательно, величина возмущения при любом t определяется характером поведения бесконечного произведения. Отсюда вытекает критерий устойчивости систем нелинейных ОДУ.

В рассматриваемых условиях для устойчивости решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы существовало такое Δ_1, $0 < \Delta_1 \leqslant \delta$, что для всех $\tilde{V}(t)$, $\tilde{V}(t_0) = \tilde{V}_0$, при условии $\|\tilde{V}_0 - V_0\| \leqslant \Delta_1$ выполняется неравенство

$$\left|\lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} \left(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\right)\right| \leqslant c_1, \quad c_1 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{4}$$

Для асимптотической устойчивости решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало такое $\Delta_2 \leqslant \Delta_1$, что $\left\|\tilde{V}_0 - V_0\right\| \leqslant \Delta_2$ влечет

$$\lim_{t\to\infty} \left|\lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} \left(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\right)\right| = 0 \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{5}$$

Практическая значимость критериев (4), (5) заключается в возможности выполнять анализ устойчивости нелинейной системы ОДУ без представления решения в аналитической форме, непосредственно по значениям разностных приближений. Мультипликативная форма выражений под знаком предела позволяет выполнить программную реализацию критериев (4), (5). Это создает возможность компьютерного анализа устойчивости систем нелинейных ОДУ.

Соотношение (3) эквивалентно следующему:

$$\frac{\tilde{v}_k(t) - v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)} = \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} \left(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\right) \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}.$$

Следовательно, имеют место следующие разновидности критериев устойчивости и асимптотической устойчивости решения системы (1):

$$\left|\frac{\tilde{v}_k(t) - v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)}\right| \leqslant c_1, \quad c_1 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n},$$

$$\lim_{t\to\infty} \left|\frac{\tilde{v}_k(t) - v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)}\right| = 0 \quad \forall k \in \overline{1,n}.$$

Предложенный подход используется для получения критериев устойчивости однородной системы линейной ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, Y(t_0) = Y_0. \tag{6}$$

В этом случае критерии устойчивости и асимптотической устойчивости имеют вид (см. [2])

$$\left\|\lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} \left(E + hA(t_{i-\ell})\right)\right\| \leqslant c_2, \quad c_2 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty)\,; \tag{7}$$

$$\lim_{t\to\infty} \left\|\lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} \left(E + hA(t_{i-\ell})\right)\right\| = 0. \tag{8}$$

Полученные критерии позволяют определить характер устойчивости систем линейных и нелинейных ОДУ без представления решения в аналитической форме, преобразования правой части системы, построения функций Ляпунова. Математическая конструкция критериев влечет возможность программной реализации, тем самым компьютеризируется анализ устойчивости.

Прикладное значение критериев (7), (8) представляется важным для приложений и теории, поскольку к системам линейных ОДУ с помощью линеаризации сводится анализ устойчивости ряда общих методов качественной теории дифференциальных уравнений (см. [9]).

3. Критерии устойчивости в аддитивной и интегральной форме. Для получения критериев устойчивости системы (1) в аддитивной форме выполним следующее преобразование соотношения (3):

$$\tilde{v}_k(t) - v_k(t) = \exp\left\{\lim_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i}\ln\left(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\right)\right\}\left(\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)\right) \quad \forall k \in \overline{1,n}.$$

С учетом того факта, что $hD_{i-\ell}^{(k)}$ — бесконечно малая, и принимая во внимание соотношение

$$\frac{\ln\left(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\right)}{hD_{i-\ell}^{(k)}} \to 1 \quad \forall \ell \leqslant i, \quad \forall k \in \overline{1,n},$$

получим аддитивную форму критериев устойчивости решения системы (1):

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i} hD_{i-\ell}^{(k)} \leqslant c_3, \quad c_3 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0,\infty), \quad \forall k \in \overline{1,n},$$

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i} hD_{i-\ell}^{(k)} = -\infty.$$

Для системы линейной ОДУ (6) критерии устойчивости и асимптотической устойчивости в аддитивной форме имеют вид

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i} hA(t_{i-\ell}) \leqslant C_2, \quad C_2 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0,\infty),$$

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i} hA(t_{i-\ell}) = (-\infty),$$

где C_2 — постоянная (диагональная) матрица; символ $(-\infty)$ означает предел диагональной матрицы, диагональные элементы которой стремятся к $-\infty$.

Выражение в левой части аддитивных критериев — предел интегральной суммы на $[t_0, t]$, элементами которой являются дискретные функции

$$D^{(k)}(t) = \frac{u_k(t,\tilde{V}) - u_k(t,V)}{\tilde{v}_k(t) - v_k(t)}, \quad k \in \overline{1,n}.$$

Следовательно, выражения аддитивных критериев включают определенные интегралы, и критерии можно сформулировать в интегральной форме:

$$\int_{t_0}^{t}\frac{u_k(\tau,\tilde{V}) - u_k(\tau,V)}{\tilde{v}_k(\tau) - v_k(\tau)}d\tau \leqslant c_3, \quad c_3 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0,\infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}; \tag{9}$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\frac{u_k(\tau,\tilde{V}) - u_k(\tau,V)}{\tilde{v}_k(\tau) - v_k(\tau)}d\tau = -\infty \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{10}$$

Числитель переменной дроби $D^{(k)}(t)$ является производной возмущения решения и делится на само возмущение, поэтому существует первообразная

$$\int\limits_{t_0}^{t} D^{(k)}(\tau)d\tau = \ln\left|\frac{\tilde{v}_k(t) - v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)}\right|.$$

Соответственно критерии (9), (10) примут следующий вид:

$$\ln\left|\frac{\tilde{v}_k(t) - v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)}\right| \leqslant c_3, \quad c_3 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n};$$

$$\lim_{t\to\infty} \ln\left|\frac{\tilde{v}_k(t) - v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)}\right| = -\infty \quad \forall k \in \overline{1, n}.$$

Далее приводится вывод критериев устойчивости нулевого решения системы (1) по характеру поведения правой части. Дополнительно предполагается существование и непрерывность в R второй производной решения системы (1). Для $U'(t, V)$ имеет место аналог условия Липшица:

$$\big\|U'(t, U, V) - U'(t, \tilde{U}, \tilde{V})\big\| \leqslant L_1 \big\|U(t, V) - \tilde{U}(t, \tilde{V})\big\| \quad \forall U, \tilde{U},\ \forall V(t), \tilde{V}(t) \in R, \quad L_1 = \mathrm{const}.$$

Ниже ненулевое решение и его производную не помечается знаком $\tilde{}$.

Пусть существует такое $\Delta_3 \leqslant \delta$, что для всех $V(t)$, удовлетворяющих условию $\|V_0\| \leqslant \Delta_3$, выполняется неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(\tau, V)}{v_k(\tau)} d\tau \leqslant c_4 \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u'_k(\tau, V)}{u_k(\tau, V)} d\tau, \quad c_4 = \mathrm{const} > 0, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n} \tag{11}$$

(см. [7]) или следующее неравенство, из которого вытекает (11):

$$\frac{u_k(t, V)}{v_k(t)} \leqslant c_5 \frac{u'_k(t, V)}{u_k(t, V)}, c_5 = \mathrm{const} > 0, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}. \tag{12}$$

Теорема 1. *Для устойчивости нулевого решения системы* (1) *достаточно существование такого* Δ_4, $0 < \Delta_4 \leqslant \delta$, *что при всех* $V(t)$, *удовлетворяющих условию* $\|V_0\| \leqslant \Delta_4$, *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u'_k(\tau, V)}{u_k(\tau, V)} d\tau \leqslant c_6, \quad c_6 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}. \tag{13}$$

Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) *достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало такое* Δ_5, $\Delta_5 \leqslant \Delta_4$, *что неравенство* $\|V_0\| \leqslant \Delta_5$ *влечет*

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u'_k(\tau, V)}{u_k(\tau, V)} d\tau = -\infty. \tag{14}$$

Доказательство. При выполнении условия (11) или (12) критерии (9), (10), записанные для нулевого решения системы (1), являются необходимыми следствиями соотношений (13), (14). □

Критерии устойчивости теоремы 1 можно представить в следующей эквивалентной форме.

Теорема 2. *Для устойчивости нулевого решения системы* (1) *достаточно существование такого* Δ_6, $0 < \Delta_6 \leqslant \delta$, *что для всх* $V(t)$, *удовлетворяющих условию* $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_6$, *выполняется соотношение*

$$\left|\frac{u_k(t, V)}{u_k(t_0, V_0)}\right| \leqslant c_7, \quad c_7 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad u_k(t_0, V_0) \neq 0 \quad \forall k \in \overline{1, n}. \tag{15}$$

Для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало такое Δ_7, $\Delta_7 \leqslant \Delta_6$, *что условие* $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_7$ *влечет*

$$\lim_{t\to\infty} \left|\frac{u_k(t, V)}{u_k(t_0, V_0)}\right| = 0, \quad u_k(t_0, V_0) \neq 0 \quad \forall k \in \overline{1, n}. \tag{16}$$

Доказательство. Представим неравенство (13) в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{du_k(\tau, V)}{u_k(\tau, V_0)} \leqslant c_6$$

или

$$\ln\left|u_k(t, V)\right| - \ln\left|u_k(t_0, V_0)\right| \leqslant c_6,$$

что равносильно

$$\ln\frac{\left|u_k(t, V)\right|}{\left|u_k(t_0, V_0)\right|} \leqslant c_6 \quad \text{или} \quad \left|\frac{u_k(t, V)}{u_k(t_0, V_0)}\right| \leqslant e^{c_6}.$$

В результате (13) эквивалентно (15) при $c_7 = e^{c_6}$. Критерий устойчивости (14) выполняется, если выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \ln\frac{\left|u_k(t, V)\right|}{\left|u_k(t_0, V_0)\right|} = -\infty.$$

При $u_k(t_0, V_0) \neq 0$ это эквивалентно

$$\lim_{t\to\infty} \left|\frac{u_k(t, V)}{u_k(t_0, V_0)}\right| = 0.$$

Следовательно, (14) эквивалентно (16). Теорема доказана. □

Далее приводятся ограничения, при выполнении которых, достаточные условия устойчивости, представленные в теоремах 1, 2 будут и необходимыми.

Предположим, что для системы (1) в R существует такое $\Delta_8 > 0$, что для всех $V(t)$, удовлетворяющих условию $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_8$, выполняются неравенства

$$u_k(t, V) \geqslant 0, \quad u_k'(t, V) \leqslant 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}, \tag{17}$$

или

$$u_k(t, V) \leqslant 0, \quad u_k'(t, V) \geqslant 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}. \tag{18}$$

Кроме того предполагается, что выполнено неравенство

$$\left|\frac{v_k(t)}{v_k(t_0)}\right| \leqslant \left|\frac{u_k(t, V)}{u_k(t_0, V_0)}\right| \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}. \tag{19}$$

При данных предположениях имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Для устойчивости нулевого решения системы* (1) *необходимо существование такого* Δ_8, $0 < \Delta_8 \leqslant \delta$, *что для всех* $V(t)$, *удовлетворяющих условию* $\|V_0\| \leqslant \Delta_8$, *каждый компонент правой части* (1) *и его производная сохраняют знак в виде нестрогого неравенства при всех* $t \in [t_0, \infty)$ *и выполняется условие* (17) *или* (18). *Дополнительно выполнение условия* (19) *достаточно для устойчивости нулевого решения системы* (1).

Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) *необходимо и при выполнении* (19) *достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало такое* Δ_9, $\Delta_9 \leqslant \Delta_8$, *что* $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_9$ *влечет* (14).

Лемма 2. *Условия предыдущей леммы необходимы, а при выполнении* (19) *достаточны для устойчивости нулевого решения системы* (1). *В тех же условиях для ее асимптотической устойчивости необходимо, а при выполнении* (19) *достаточно, чтобы выполнялось* (16).

Доказательство. В условиях лемм 1 и 2 выполняется неравенство

$$\frac{u_k'(t, V)}{u_k(t, V)} \leqslant 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n},$$

что влечет (13) и, как следствие, (15). Следовательно, при выполнении (19), имеет место соотношение

$$\left|\frac{v_k(t)}{v_k(t_0)}\right| \leqslant c_1, \quad c_1 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty),$$

что достаточно для устойчивости. Если нулевое решение системы (1) устойчиво, то в условиях каждого из предложений необходимо выполнено (17) либо (18). В этом случае необходимо выполнение условия

$$\frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} \leqslant 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty).$$

Таким образом, для устойчивости нулевого решения системы (1) необходимы условия (17), (18). Следовательно, они необходимы для асимптотической устойчивости. Для асимптотической устойчивости достаточно выполнение критерия (14) или эквивалентного критерия (16) в сочетании с выполнением условия (19), так как это влечет

$$\lim_{t\to\infty} \left|\frac{v_k(t)}{v_k(t_0)}\right| = 0.$$

Если нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво, то $v_k(t) \to 0$ при $t \to \infty$; тогда $u_k(t,V) \to 0$ при $t \to \infty$, что эквивалентно (14) и (16). Поэтому эти условия необходимы. Леммы доказаны. □

Пусть в условиях теоремы 1 рассматриваются соотношения (13) и (9), а также (14) и (10). Для нулевого решения системы (1) соотношения (13) и (9) будут выполняться одновременно, если для всех $V(t)$, удовлетворяющих условию $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_8$, выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k'(\tau,V)}{u_k(\tau,V)}d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(\tau,V)}{v_k(\tau)}d\tau\right| \leqslant c_0, \quad c_0 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0,\infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{20}$$

Неравенство (20) преобразуется к виду

$$\left|\ln\left|\frac{u_k(t,V)}{u_k(t_0,V_0)}\right| - \ln\left|\frac{v_k(t)}{v_k(t_0)}\right|\right| \leqslant c_0, \quad c_0 = \mathrm{const},$$

что равносильно

$$\left|\ln\left(\left|\frac{u_k(t,V)}{u_k(t_0,V_0)}\right| \Big/ \left|\frac{v_k(t)}{v_k(t_0)}\right|\right)\right| \leqslant c_0 \quad \text{или} \quad -c_0 \leqslant \ln\left(\left|\frac{u_k(t,V)}{v_k(t)}\right| \Big/ \left|\frac{u_k(t_0,V_0)}{v_k(t_0)}\right|\right) \leqslant c_0.$$

Последнее соотношение эквивалентно неравенствам

$$e^{-c_0} \leqslant \left|\frac{u_k(t,V)}{v_k(t)}\right| \Big/ \left|\frac{u_k(t_0,V_0)}{v_k(t_0)}\right| \leqslant e^{c_0}, \quad c_0 = \mathrm{const} > 0, \quad \forall t \in [t_0,\infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{21}$$

Условия (20) и (21) равносильны. Поэтому выполнение условия (21) влечет одновременное выполнение соотношений (13) и (9), при этом соотношение (13) является необходимым, а вместе с (9) — достаточным условием устойчивости. Стоит отметить, что выполнение соотношения (21) при $u_k(t,V) \to 0$ возможно только если $v_k(t) \to 0$, иначе не выполнится неравенство

$$e^{-c_0} \leqslant \left|\frac{u_k(t,V)}{v_k(t)}\right| \Big/ \left|\frac{u_k(t_0,V_0)}{v_k(t_0)}\right|.$$

Если $v_k(t) \to 0$, то необходимо $u_k(t,V) \to 0$, иначе нарушается неравенство

$$\left|\frac{u_k(t,V)}{v_k(t)}\right| \Big/ \left|\frac{u_k(t_0,V_0)}{v_k(t_0)}\right| \leqslant e^{c_0}.$$

В результате выполнение (21) вместе с (14) влечет выполнение (10). Выполнение (14) или (10) оказывается необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости.

Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *В рассматриваемых условиях и при выполнении соотношения* (21) *для устойчивости нулевого решения системы* (1) *необходимо и достаточно существование такого* Δ_8, $0 < \Delta_8 \leqslant \delta$, *что*

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k'(\tau,V)}{u_k(\tau,V)}d\tau \leqslant c_8, \quad c_8 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0,\infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}$$

и для любого $V(t)$, удовлетворяющего условию $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_8$.

Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предыдущее утверждение и нашлось такое Δ_9, $\Delta_9 \leqslant \Delta_8$, что*

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{u_k'(\tau,V)}{u_k(\tau,V)}d\tau = -\infty \quad \forall k\in\overline{1,n}$$

и для любого $V(t)$, удовлетворяющего условию $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_9$.

В силу эквивалентности теорем 1 и 2 теорема 3 переходит в следующее утверждение.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 3 *для устойчивости нулевого решения системы* (1) *необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое $\Delta_8 > 0$, что*

$$\left|\frac{u_k(t,V)}{u_k(t_0,V_0)}\right| \leqslant c_9, \quad c_9 = \mathrm{const}, \quad \forall t\in[t_0,\infty), \quad u_k(t_0,V_0)\neq 0, \quad \forall k\in\overline{1,n}$$

и для любого $V(t)$, удовлетворяющего условию $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_8$.

Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предыдущее утверждение и нашлось такое $\Delta_9 \leqslant \Delta_8$, что*

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{u_k(t,V)}{u_k(t_0,V_0)}\right| = 0, \quad u_k(t_0,V_0)\neq 0 \quad \forall k\in\overline{1,n}$$

и для любого $V(t)$, удовлетворяющего условию $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_9$.

Предложенный подход допускает конструировать критерии устойчивости для производных правой части системы (1) произвольного порядка $\ell \geqslant 2$, если эти производные существуют. В этом случае критерии устойчивости и асимптотической устойчивости примут следующий вид:

$$\int\limits_{t_0}^{t}\frac{u_k^{(\ell)}(\tau,V)}{u_k^{(\ell-1)}(\tau,V)}d\tau \leqslant c_{10}, \quad c_{10} = \mathrm{const}, \quad \forall t\in[t_0,\infty), \quad \forall k\in\overline{1,n}, \quad \forall V(t):\ \|V_0\| \leqslant \Delta_8;$$

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{u_k^{(\ell)}(\tau,V)}{u_k^{(\ell-1)}(\tau,V)}d\tau = -\infty, \quad \forall k\in\overline{1,n}, \quad \forall V(t):\ \|V_0\| \leqslant \Delta_9.$$

Полученные критерии будут необходимыми и достаточными условиями устойчивости и асимптотической устойчивости при ограничении

$$\left|\int\limits_{t_0}^{t}\frac{u_k^{(\ell)}(\tau,V)}{u_k^{(\ell-1)}(\tau,V)}d\tau - \int\limits_{t_0}^{t}\frac{u_k(\tau,V)}{v_k(\tau)}d\tau\right| \leqslant c_0, \quad c_0 = \mathrm{const}, \quad \forall V(t):\ 0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_{10}.$$

При этом дополнительно потребуется предполагать выполненным следующий аналог условия Липшица:

$$\left|u_k^{(\ell)}(t,U,V)\right| \leqslant L_0\left|u_k^{(\ell-1)}(t,U,V)\right|, \quad L_0 = \mathrm{const},$$
$$\forall t\in[t_0,\infty), \quad \forall U^{(\ell-1)}(t,U,V)\neq\bar{O}, \quad V(t)\in R, \quad \forall k\in\overline{1,n}.$$

После перехода к первообразным критерии устойчивости и асимптотической устойчивости примут вид

$$\left|\frac{u_k^{(\ell-1)}(t,V)}{u_k^{(\ell-1)}(t_0,V_0)}\right| \leqslant c_{11}, \quad c_{11} = \mathrm{const}, \quad \forall t\in[t_0,\infty), \quad u_k^{(\ell-1)}(t_0,V_0)\neq 0, \quad \forall k\in\overline{1,n};$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{u_k^{(\ell-1)}(t,V)}{u_k^{(\ell-1)}(t_0,V_0)}\right| = 0, \quad u_k^{(\ell-1)}(t_0,V_0)\neq 0, \quad \forall k\in\overline{1,n}.$$

Все полученные критерии допускают программную реализацию. В частности, для реализации критериев (15), (16) достаточно находить приближенное значение правой части системы и выводить через заданный интервал времени значение нормы выражения из левой части критерия (15). Ограниченное изменение нормы соответствует устойчивости, стремление нормы к нулю свидетельствует об асимптотической устойчивости, неограниченный рост является признаком неустойчивости решения системы ОДУ.

При анализе устойчивости систем нелинейных ОДУ наряду с данным методом целесообразно применять методы описанные в [10, 11]. Эти методы, основанные на построении функций Ляпунова, предполагают аналитическое применение, в отдельных разновидностях допускают компьютерную реализацию.

4. Заключение. Представлен подход к анализу устойчивости по Ляпунову систем ОДУ. Подход базируется на критериях устойчивости первоначально конструируемых на основе рекуррентных преобразований разностных схем численного интегрирования. Получены критерии устойчивости систем линейных и нелинейных ОДУ в эквивалентных мультипликативных, аддитивных и интегральных формах в виде необходимых и достаточных условий. На основе критериев в интегральной форме получены разновидности необходимых и достаточных условий устойчивости по характеру поведения правой части системы и ее производных. Значимым отличием критериев является возможность их программной реализации, что влечет возможность выполнять анализ устойчивости в режиме реального времени по ходу решения задачи Коши для ОДУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. Ю., Жабко А. П., Косов А. А.* Анализ устойчивости и стабилизация нелинейных систем на основе декомпозиции// Сиб. мат. ж. — 2015. — *56*, № 6. — С. 1215–1233.
2. *Буланов С. Г.* Анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе преобразования разностных схем// Мехатроника, автоматизация, управление. — 2019. — *20*, № 9. — С. 542–549.
3. *Джанунц Г. А., Ромм Я. Е.* Варьируемое кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с итерационным уточнением// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — *57*, № 10. — С. 1641–1660.
4. *Мельников Г. И., Мельников В. Г., Дударенко Н. А., Талапов В. В.* Устойчивость движения нелинейных динамических систем при постоянно действующих возмущениях// Науч.-техн. вестн. информ. технол. мех. опт. — 2019. — *19*, № 2. — С. 216–221.
5. *Ромм Я. Е, Буланов С. Г.* Численное моделирование устойчивости по Ляпунову// Современные наукоемкие технологии. — 2021. — № 7. — С. 42–60.
6. *Ромм Я. Е.* Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости по знакам компонентов решения дифференциальной системы и их двух производных// Современные наукоемкие технологии. — 2021. — № 9. — С. 100–124.
7. *Ромм Я. Е.* О необходимых и достаточных условиях устойчивости по Ляпунову// Современные наукоемкие технологии. — 2022. — № 2. — С. 92–109.
8. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.
9. *Bulanov S. G.* Differential systems stability analysis based on matrix multiplicative criteria// J. Phys. Conf. Ser. — 2020. — 012103.
10. *Hafstein S.* A constructive converse Lyapunov theorem on asymptotic stability for nonlinear autonomous ordinary differential equations// Dynam. Syst. — 2005. — *20*. — P. 281–299.
11. *Zhaolu T., Chuanqing G.* A numerical algorithm for Lyapunov equations// J. Appl. Math. Comput. — 2008. — *202*, № 1. — P. 45–53.

Буланов Сергей Георгиевич
Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) ФГБОУ ВПО
«Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)»
E-mail: `bulanovtgpi@mail.ru`