ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 35–42
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-35-42

УДК 517.957

О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. **Е. Ю. ГРАЖДАНЦЕВА**

Аннотация. В работе рассмотрено построение точного решения однородной гиперболической системы дифференциальных уравнений первого порядка, содержащей линейные либо нелинейные с квадратичной нелинейностью уравнения, построение решения начальной задачи (задачи Коши) для линейной гиперболической системы и построение решения одного из видов начально-краевой задачи для нелинейной гиперболической системы.

Ключевые слова: частная производная, гиперболическая система, задача Коши, точное решение.

ON THE EXACT SOLUTION OF A CERTAIN SYSTEM OF HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2023 **E. Yu. GRAZHDANTSEVA**

Abstract. In this paper, we construct an exact solution of a first-order hyperbolic system of partial differential equations containing linear and quadratic nonlinear equations. Also, we construct a solution of the initial-value (Cauchy) problem for a linear hyperbolic system and a solution of an initial-boundary-value problem for a nonlinear hyperbolic system.

Keywords and phrases: partial derivative, hyperbolic system, Cauchy problem, exact solution.

AMS Subject Classification: 35L02, 35L60

1. Введение. Гиперболическими системами дифференциальных уравнений первого порядка описываются многочисленные процессы в физике сплошной среды, а именно, неустановившееся течение жидкости, сверхзвуковое двумерное установившееся движение сжимаемых газов и т. п. Исследование гиперболических систем и гиперболических уравнений, изучение общих свойств нелинейных уравнений в частных производных и методов их решения представляет собой развивающуюся область современной математики. Отметим, что библиография, посвященная изучению нелинейных дифференциальных уравнений и систем, а также описываемых ими процессов, весьма обширна (см., например, [1–3,6–9,11] и ссылки в этих работах). Как правило, попытки найти решение сводятся к применению численных методов. Однако наличие нерешенных вопросов, связанных с быстродействием и надежностью процедур расчета динамических характеристик, приводят к задаче модификации существующих и развития новых способов получения точных решений. Данная работа посвящена построению точного решения однородной гиперболической

Работа выполнена при поддержке гранта FWEU-2021-0006 программы фундаментальных исследований РФ на 2021-2030 гг.

системы дифференциальных уравнений первого порядка, как линейной, так и нелинейной с квадратичной нелинейностью одного из уравнений. Также рассмотрены построение решения начальной задачи (задачи Коши) для линейной гиперболической системы и построение решения одного из видов начально-краевой задачи для нелинейной гиперболической системы.

2. Решение задачи Коши для однородной линейной гиперболической системы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + a\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + c\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ — неизвестные функции достаточной гладкости, x и y — независимые переменные, a и c — действительные числа, не равные нулю и удовлетворяющие условию $ac > 0$, которое обеспечивает гиперболичность рассматриваемой системы. Решением характеристического уравнения данной системы являются прямые

$$y - \sqrt{ac}x = C_1, \quad y + \sqrt{ac}x = C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные (см. [4, 8]). Введем переменные (см. [4])

$$\xi = y - \sqrt{ac}x, \quad \eta = y + \sqrt{ac}x. \tag{2}$$

Будем искать функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ свободных переменных x и y в форме сложных функций переменных ξ, η , т.е.

$$u = u(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y)), \quad v = v(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y)).$$

Согласно правилу дифференцирования сложных функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\sqrt{ac}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \sqrt{ac}\frac{\partial u}{\partial \eta}, \qquad & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\sqrt{ac}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \sqrt{ac}\frac{\partial v}{\partial \eta}, \qquad & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Следовательно система (1) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \left(a\dfrac{\partial v}{\partial \xi} - \sqrt{ac}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \left(a\dfrac{\partial v}{\partial \eta} + \sqrt{ac}\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0, \\ \left(c\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - \sqrt{ac}\dfrac{\partial v}{\partial \xi}\right) + \left(c\dfrac{\partial u}{\partial \eta} + \sqrt{ac}\dfrac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sqrt{ac}\left(\left(\sqrt{\dfrac{a}{c}}\dfrac{\partial v}{\partial \xi} - \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \left(\sqrt{\dfrac{a}{c}}\dfrac{\partial v}{\partial \eta} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right) = 0, \\ -c\left(\left(\sqrt{\dfrac{a}{c}}\dfrac{\partial v}{\partial \xi} - \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \left(\sqrt{\dfrac{a}{c}}\dfrac{\partial v}{\partial \eta} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть

$$r_1 = r_1(\xi, \eta) = \sqrt{a/c}v - u, \quad r_2 = r_2(\xi, \eta) = \sqrt{a/c}v + u. \tag{4}$$

Тогда система (3) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r_1}{\partial \xi} + \dfrac{\partial r_2}{\partial \eta} = 0, \\ \dfrac{\partial r_1}{\partial \xi} - \dfrac{\partial r_2}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial r_2}{\partial \eta} = 0, \\ \dfrac{\partial r_1}{\partial \xi} = 0. \end{cases}$$

После интегрирования полученной системы получаем

$$r_1 = f_1(\eta), \quad r_2 = f_2(\xi),$$

где $f_1(\eta)$ и $f_2(\xi)$ — произвольные функции (см. [4]). Далее, учитывая (2), получаем

$$r_1 = f_1(y + \sqrt{ac}x), \quad r_2 = f_2(y - \sqrt{ac}x).$$

Из (4) имеем

$$v = \sqrt{\frac{c}{a}}\frac{r_2 + r_1}{2}, \quad u = \frac{r_2 - r_1}{2}.$$

Следовательно,

$$v(x,y) = \sqrt{\frac{c}{a}}\frac{f_2(y - \sqrt{ac}x) + f_1(y + \sqrt{ac}x)}{2}, \quad u(x,y) = \frac{f_2(y - \sqrt{ac}x) - f_1(y + \sqrt{ac}x)}{2}. \tag{5}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $ac > 0$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Тогда гиперболическая система* (1) *имеет общее решение вида* (5)*, где $f_1 = f_1(y + \sqrt{ac}x)$ и $f_2 = f_2(y - \sqrt{ac}x)$ — произвольные функции.*

Доказательство. В силу обозначений (2) функции f_1 и f_2 примут вид $f_1 = f_1(\eta)$, $f_2 = f_2(\xi)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{ac}f_2' - \sqrt{ac}f_1'\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(f_2' - f_1'\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\left(-\sqrt{ac}f_2' + \sqrt{ac}f_1'\right), \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\left(f_2' + f_1'\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{ac}f_2' - \sqrt{ac}f_1'\right) + a\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\left(f_2' + f_1'\right) = -\frac{\sqrt{ac}}{2}\left(f_2' + f_1'\right) + \frac{\sqrt{ac}}{2}\left(f_2' + f_1'\right) = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\left(-\sqrt{ac}f_2' + \sqrt{ac}f_1'\right) + c\frac{1}{2}\left(f_2' - f_1'\right) = -\frac{c}{2}\left(f_2' - f_1'\right) + \frac{c}{2}\left(f_2' - f_1'\right) = 0,$$

т.е. функции (5) удовлетворяют уравнениям системы (1), а, следовательно, являются решением этой системы. □

Пусть требуется найти решение системы (1) при условиях

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \tag{6}$$

где $u_0(x)$ и $v_0(x)$ — функции достаточной гладкости. Поскольку общее решение системы (1) имеет вид (5), получим

$$u(x,0) = \frac{f_2(-\sqrt{ac}x) - f_1(\sqrt{ac}x)}{2}, \quad v(x,0) = \sqrt{\frac{c}{a}}\,\frac{f_2(-\sqrt{ac}x) + f_1(\sqrt{ac}x)}{2}.$$

Следовательно, учитывая (6), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{f_2(-\sqrt{ac}x) - f_1(\sqrt{ac}x)}{2} = u_0(x), \\ \sqrt{\dfrac{c}{a}}\dfrac{f_2(-\sqrt{ac}x) + f_1(\sqrt{ac}x)}{2} = v_0(x), \end{cases} \tag{7}$$

в которой неизвестными являются $f_1(\sqrt{ac}x)$ и $f_2(-\sqrt{ac}x)$. Решая систему (7), получаем

$$f_1(\sqrt{ac}x) = \sqrt{\frac{a}{c}}v_0(x) - u_0(x), \quad f_2(-\sqrt{ac}x) = \sqrt{\frac{a}{c}}v_0(x) + u_0(x)$$

или

$$f_1(y + \sqrt{ac}x) = \sqrt{\frac{a}{c}}v_0\left(\frac{1}{\sqrt{ac}}y + x\right) - u_0\left(\frac{1}{\sqrt{ac}}y + x\right),$$
$$f_2(y - \sqrt{ac}x) = \sqrt{\frac{a}{c}}v_0\left(-\frac{1}{\sqrt{ac}}y + x\right) + u_0\left(-\frac{1}{\sqrt{ac}}y + x\right),$$

то есть

$$\begin{cases} u(x,y) = \dfrac{1}{2}\left[u_0\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{ac}}y\right) + u_0\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{ac}}y\right)\right] + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{c}}\left[v_0\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{acy}}\right) - v_0\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{ac}}y\right)\right], \\ v(x,y) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{c}{a}}\left[u_0\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{acy}}\right) - u_0\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{ac}}y\right)\right] + \dfrac{1}{2}\left[v_0\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{ac}}y\right) + v_0\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{ac}}y\right)\right]. \end{cases} \tag{8}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $ac > 0$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. *Тогда начальная задача* (*задача Коши*) (1), (6) *имеет решение вида* (8).

Доказательство. Справедливость утверждения подтвердит проверка, удовлетворяют ли функции (8) одновременно уравнениям системы (1) и условиям (6). Для удобства дифференцирования введем обозначения:

$$x - \frac{1}{\sqrt{ac}}y = z_1, \quad x + \frac{1}{\sqrt{ac}}y = z_2.$$

С учетом этих обозначений имеем

$$u_0\left(x - \frac{1}{\sqrt{ac}}y\right) = u_0(z_1), \quad u_0\left(x + \frac{1}{\sqrt{ac}}y\right) = u_0(z_2),$$
$$v_0\left(x - \frac{1}{\sqrt{ac}}y\right) = v_0(z_1), \quad v_0\left(x + \frac{1}{\sqrt{ac}}y\right) = v_0(z_2).$$

Так как частные производные этих функций имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(u_0'(z_1) + u_0'(z_2) + \sqrt{\frac{a}{c}}\left(v_0'(z_1) - v_0'(z_2)\right)\right),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{ac}}u_0'(z_1) + \frac{1}{\sqrt{ac}}u_0'(z_2) + \sqrt{\frac{a}{c}}\left(-\frac{1}{\sqrt{ac}}v_0'(z_1) - \frac{1}{\sqrt{ac}}v_0'(z_2)\right)\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\left(u_0'(z_1) - u_0'(z_2)\right) + v_0'(z_1) + v_0'(z_2)\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\left(-\frac{1}{\sqrt{ac}}u_0'(z_1) - \frac{1}{\sqrt{ac}}u_0'(z_2)\right) - \frac{1}{\sqrt{ac}}v_0'(z_1) + \frac{1}{\sqrt{ac}}v_0'(z_2)\right),$$

получим следующие цепочки равенств:

$$\text{(i)} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}\Bigg[u_0'(z_1) + u_0'(z_2) + \sqrt{\frac{a}{c}}v_0'(z_1) - \sqrt{\frac{a}{c}}v_0'(z_2) +$$
$$+ a\left(-\frac{1}{a}u_0'(z_1) - \frac{1}{a}u_0'(z_2) - \frac{1}{\sqrt{ac}}v_0'(z_1) + \frac{1}{\sqrt{ac}}v_0'(z_2)\right)\Bigg] = 0,$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial v}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\Bigg[\sqrt{\frac{c}{a}}u_0'(z_1) - \sqrt{\frac{c}{a}}u_0'(z_2) + v_0'(z_1) + v_0'(z_2) + .$$
$$+ c\left(-\frac{1}{\sqrt{ac}}u_0'(z_1) + \frac{1}{\sqrt{ac}}u_0'(z_2) - \frac{1}{c}v_0'(z_1) - \frac{1}{c}v_0'(z_2)\right)\Bigg],$$

т.е. функции (8) удовлетворяют уравнениям системы (1). Кроме того, эти функции удовлетворяют условиям (6), поскольку

$$u(x,0) = \frac{u_0(x) + u_0(x)}{2} + 0 = u_0(x), \quad v(x,0) = 0 + \frac{v_0(x) + v_0(x)}{2} = v_0(x).$$

Следовательно, функции (8) действительно являются решением задачи (1), (6). $\square$

3. Решение однородной гиперболической системы с нелинейностью. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + a\dfrac{\partial v}{\partial y} + bv^2 = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + c\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{9}$$

a, b и c — действительные числа, не равные нулю, причем $ac > 0$, $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ — неизвестные функции достаточной гладкости, x и y — независимые переменные, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Введем обозначение

$$A = A(x, y) = 2bcxy - b\sqrt{\frac{c}{a}}\,(y^2 - acx^2)\ln\frac{y + \sqrt{ac}x}{y - \sqrt{ac}x} + 4aC(y^2 - acx^2), \tag{10}$$

где C — произвольная постоянная.

Предложение 3. *Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $ac > 0$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Тогда система* (9) *имеет решение вида*

$$u(x, y) = \frac{4ay}{A(x, y)} \quad \left(\textit{или} \quad u = \frac{4ay}{A}\right), \tag{11}$$

$$v(x, y) = \frac{4acx}{A(x, y)} \quad \left(\textit{или} \quad v = \frac{4acx}{A}\right). \tag{12}$$

Доказательство. Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-4ay \cdot A'_x}{A^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4a}{A} - \frac{4ay \cdot A'_y}{A^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4ac}{A} - \frac{4acx \cdot A'_x}{A^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{4acx \cdot A'_y}{A^2},$$

где

$$A'_x = \frac{\partial A(x, y)}{\partial x} = 2bcy - b\sqrt{\frac{c}{a}}\left(-2acx \cdot \ln\frac{y + \sqrt{ac}x}{y - \sqrt{ac}x} + 2\sqrt{ac}y\right) - 8a^2Ccx,$$

$$A'_y = \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = 2bcx - b\sqrt{\frac{c}{a}}\left(2y \cdot \ln\frac{y + \sqrt{ac}x}{y - \sqrt{ac}x} - 2\sqrt{ac}x\right) + 8aCy,$$

получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial v}{\partial y} + bv^2 = -\frac{4ay \cdot A'_x}{A^2} + a\frac{-4acx \cdot A'_y}{A^2} + b\frac{16a^2c^2x^2}{A^2} = \frac{-4ay \cdot A'_x - 4a^2cx \cdot A'_y + 16a^2c^2x^2}{A^2} = 0,$$

так как для числителя этой дроби справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} &-4ay \cdot A'_x - 4a^2cx \cdot A'_y + 16a^2c^2x^2 = \\ &= -4ay\left(2bcy - b\sqrt{\frac{c}{a}}\left(-2acx \cdot \ln\frac{y + \sqrt{ac}x}{y - \sqrt{ac}x} + 2\sqrt{ac}y\right) - 8a^2Ccx\right) - \\ &- 4a^2cx\left(2bcx - b\sqrt{\frac{c}{a}}\left(2y \cdot \ln\frac{y + \sqrt{ac}x}{y - \sqrt{ac}x} - 2\sqrt{ac}x\right) + 8aCy\right) + 16a^2bc^2x^2 = \\ &= b\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot \ln\frac{y + \sqrt{ac}x}{y - \sqrt{ac}x} \cdot (-8a^2cxy + 8a^2cxy) + \\ &+ \Big(-8abcy^2 + 8abcy^2 + 32a^3cCxy - 8a^2bc^2x^2 - 8a^2bc^2x^2 - 32a^3cCxy + 16a^2bc^2x^2\Big) = 0. \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4ac}{A} - \frac{4acx \cdot A'_x}{A^2} + c\left(\frac{4a}{A} - \frac{4ay \cdot A'_y}{A^2}\right) = \frac{4acA - 4acx \cdot A'_x + 4acA - 4acy \cdot A'_y}{A^2} = 0,$$

так как для выражения в числителе справедливы равенства

$$
\begin{aligned}
&4acA - 4acx\cdot A'_x + 4acA - 4acy\cdot A'_y = 8acA - 4acx\cdot A'_x - 4acy\cdot A'_y = \\
&\qquad = 8ac\left(2bcxy - b\sqrt{\frac{c}{a}}(y^2-acx^2)\ln\frac{y+\sqrt{ac}x}{y-\sqrt{ac}x} + 4aC(y^2-acx^2)\right) - \\
&\qquad - 4acx\left(2bcy - b\sqrt{\frac{c}{a}}\left(-2acx\cdot\ln\frac{y+\sqrt{ac}x}{y-\sqrt{ac}x} + 2\sqrt{ac}y\right) - 8a^2Ccx\right) - \\
&\qquad - 4acy\left(2bcx - b\sqrt{\frac{c}{a}}\left(2y\cdot\ln\frac{y+\sqrt{ac}x}{y-\sqrt{ac}x} - 2\sqrt{ac}x\right) + 8aCy\right) = \\
&= b\sqrt{\frac{c}{a}}\ln\frac{y+\sqrt{ac}x}{y-\sqrt{ac}x}\Big(-8acy^2 + 8a^2c^2x^2 - 8a^2c^2x^2 + 8acy^2\Big) + 16abc^2xy + 32a^2cC(y^2-acx^2) - \\
&\qquad - 8abc^2xy + 8abc^2xy + 32a^3c^2Cx^2 - 8abc^2xy - 8abc^2xy + 32a^2cCy^2 = \\
&\qquad\qquad = 32a^2cCy^2 - 32a^3c^2Cx^2 + 32a^3c^2Cx^2 - 32a^2cCy^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Следовательно, функции (11) и (12) являются решением системы (9). □

Пусть $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $ac>0$, $(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$, $v_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $u_0\in\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$, $y_0>\sqrt{ac}|x_0|$ и выполняются условия

$$u(x_0,y_0)=u_0,\quad v(x_0,y_0)=v_0. \tag{13}$$

Введем обозначение

$$
\begin{aligned}
&B = B(x,y) = 2bcv_0(y_0x - x_0y)(y_0y + acx_0x) - \\
&\quad - b\sqrt{\frac{c}{a}}\,v_0\big(y_0^2 - acx_0^2\big)\big(y^2-acx^2\big)\left(\ln\frac{y+\sqrt{ac}x}{y-\sqrt{ac}x} - \ln\frac{y_0+\sqrt{ac}x_0}{y_0-\sqrt{ac}x_0}\right) + 4acx_0(y^2-acx^2).
\end{aligned}\tag{14}
$$

Предложение 4. *Пусть $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $ac>0$, $(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$, $v_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $u_0\in\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$, $y_0>\sqrt{ac}|x_0|$. Если $v_0y_0=cu_0x_0$, то начально-краевая задача для системы (9) при условиях (13) имеет решение вида*

$$u(x,y)=\frac{4av_0(y_0^2-acx_0^2)y}{B(x,y)}\qquad\left(\textit{или}\quad u=\frac{4av_0(y_0^2-acx_0^2)y}{B}\right), \tag{15}$$

$$v(x,y)=\frac{4acv_0(y_0^2-acx_0^2)x}{B(x,y)}\qquad\left(\textit{или}\quad v=\frac{4acv_0(y_0^2-acx_0^2)x}{B}\right). \tag{16}$$

Доказательство. Так как

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-4av_0(y_0^2-acx_0^2)y\cdot B'_x}{B^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4av_0(y_0^2-acx_0^2)}{B} - \frac{4av_0(y_0^2-acx_0^2)y\cdot B'_y}{B^2},\\
&\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4acv_0(y_0^2-acx_0^2)}{B} - \frac{4acv_0(y_0^2-acx_0^2)x\cdot B'_x}{B^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-4acv_0(y_0^2-acx_0^2)x\cdot B'_y}{B^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&B'_x = \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} = 2bcv_0\big(y_0^2y + 2ax_0y_0x - acx_0^2y\big) - \\
&\quad - b\sqrt{\frac{c}{a}}\,v_0(y_0^2-acx_0^2)\left(-2acx\left(\ln\frac{y+\sqrt{ac}x}{y-\sqrt{ac}x} - \ln\frac{y_0+\sqrt{ac}x_0}{y_0-\sqrt{ac}x_0}\right) + 2\sqrt{ac}y\right) - 8a^2c^2x_0x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&B'_y = \frac{\partial B(x,y)}{\partial y} = 2bcv_0(y_0^2x - 2x_0y_0y - acx_0^2x) - \\
&\quad - b\sqrt{\frac{c}{a}}\,v_0\big(y_0^2-acx_0^2\big)\left(2y\left(\ln\frac{y+\sqrt{ac}x}{y-\sqrt{ac}x} - \ln\frac{y_0+\sqrt{ac}x_0}{y_0-\sqrt{ac}x_0}\right) - 2\sqrt{ac}x\right) + 8acx_0y,
\end{aligned}
$$

получаем следующие равенства:

(i) для первого уравнения системы (9):

$$\frac{\partial u}{\partial}x + a\frac{\partial v}{\partial y} + bv^2 =$$
$$= \frac{-4av_0(y_0^2 - acx_0^2)y \cdot B'_x}{B^2} + a \cdot \frac{-4acv_0(y_0^2 - acx_0^2)x \cdot B'_y}{B^2} + b\frac{16a^2c^2v_0^2(y_0^2 - acx_0^2)^2x^2}{B^2} =$$
$$= \frac{v_0(y_0^2 - acx_0^2)}{B^2} \cdot \left(-4ay \cdot B'_x - 4a^2cx \cdot B'_y + 16a^2bc^2v_0(y_0^2 - acx_0^2)x^2\right) = 0,$$

поскольку второй множитель обращается в нуль:

$$-4ay \cdot B'_x - 4a^2cx \cdot B'_y + 16a^2bc^2v_0(y_0^2 - acx_0^2)x^2 = -4ay\Bigg(2bcv_0\left(y_0^2y + 2ax_0y_0x - acx_0^2y\right) -$$
$$- b\sqrt{\frac{c}{a}}v_0(y_0^2 - acx_0^2)\left(-2acx\left(\ln\frac{y+\sqrt{ac}x}{y-\sqrt{ac}x} - \ln\frac{y_0+\sqrt{ac}x_0}{y_0-\sqrt{ac}x_0}\right) + 2\sqrt{ac}y\right) - 8a^2c^2x_0x\Bigg) -$$
$$-4a^2cx\Bigg(2bcv_0(y_0^2x - 2x_0y_0y - acx_0^2x) -$$
$$- b\sqrt{\frac{c}{a}}v_0(y_0^2 - acx_0^2)\left(2y\left(\ln\frac{y+\sqrt{ac}x}{y-\sqrt{ac}x} - \ln\frac{y_0+\sqrt{ac}x_0}{y_0-\sqrt{ac}x_0}\right) - 2\sqrt{ac}x\right) + 8acx_0y\Bigg) +$$
$$+ 16a^2bc^2v_0(y_0^2 - acx_0^2)x^2 =$$
$$= b\sqrt{\frac{c}{a}}v_0(y_0^2 - acx_0^2)\left(\ln\frac{y+\sqrt{ac}x}{y-\sqrt{ac}x} - \ln\frac{y_0+\sqrt{ac}x_0}{y_0-\sqrt{ac}x_0}\right)(8a^2cxy - 8a^2cxy) +$$
$$+ (y_0^2 - acx_0^2)\Big(-8abcv_0y^2 + 8abcv_0y^2 - 8a^2bc^2v_0x^2 - 8a^2bc^2v_0x^2 + 16a^2bc^2v_0x^2\Big) -$$
$$- 16a^2bc^2x_0y_0v_0xy + 32a^3c^2x_0xy + 16a^2bc^2x_0y_0v_0xy - 32a^3c^2x_0xy = 0;$$

(ii) для второго уравнения системы (9):

$$\frac{\partial v}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} =$$
$$= \frac{4acv_0(y_0^2 - acx_0^2)}{B} - \frac{4acv_0(y_0^2 - acx_0^2)x \cdot B'_x}{B^2} + c\left(\frac{4av_0(y_0^2 - acx_0^2)}{B} - \frac{4av_0(y_0^2 - acx_0^2)y \cdot B'_y}{B^2}\right) =$$
$$= \frac{4acv_0(y_0^2 - acx_0^2)}{B^2} \cdot \left(B - x \cdot B'_x + B - y \cdot B'_y\right) = 0,$$

так как второй множитель, в свою очередь, обращается в нуль:

$$B - cx \cdot B'_x + B - y \cdot B'_y = 2\Bigg\{2bcv_0(y_0x - x_0y)(y_0y + acx_0x) -$$
$$- b\sqrt{\frac{c}{a}}v_0(y_0^2 - acx_0^2)(y^2 - acx^2)\left(\ln\frac{y+\sqrt{ac}x}{y-\sqrt{ac}x} - \ln\frac{y_0+\sqrt{ac}x_0}{y_0-\sqrt{ac}x_0}\right) + 4acx_0(y^2 - acx^2)\Bigg\} -$$
$$- x \cdot \Bigg\{2bcv_0(y_0^2y + 2ax_0y_0x - acx_0^2y) -$$
$$- b\sqrt{\frac{c}{a}}v_0(y_0^2 - acx_0^2)\left(-2acx\left(\ln\frac{y+\sqrt{ac}x}{y-\sqrt{ac}x} - \ln\frac{y_0+\sqrt{ac}x_0}{y_0-\sqrt{ac}x_0}\right) + 2\sqrt{ac}y\right) - 8a^2c^2x_0x\Bigg\} -$$
$$- y \cdot \Bigg\{2bcv_0(y_0^2x - 2x_0y_0y - acx_0^2x) -$$

$$- b\sqrt{\frac{c}{a}} v_0 (y_0^2 - acx_0^2) \left(2y \left(\ln \frac{y + \sqrt{ac}x}{y - \sqrt{ac}x} - \ln \frac{y_0 + \sqrt{ac}x_0}{y_0 - \sqrt{ac}x_0} \right) - 2\sqrt{ac}x \right) + 8acx_0 y \Bigg\} =$$

$$= b\sqrt{\frac{c}{a}} v_0 (y_0^2 - acx_0^2) \left(\ln \frac{y + \sqrt{ac}x}{y - \sqrt{ac}x} - \ln \frac{y_0 + \sqrt{ac}x_0}{y_0 - \sqrt{ac}x_0} \right) \left(-2(y^2 - acx^2) - 2acx^2 + 2y^2 \right) +$$
$$+ \left(y_0^2 - acx_0^2 \right) \Big(4bcv_0 - 2bcv_0 + 2bcv_0 + 2bcv_0 - 2bcv_0 - 2bcv_0 \Big) xy +$$
$$+ \Big(-4bcv_0 y_0 + 8ac + 4bcv_0 y_0 - 8ac \Big) x_0 (y^2 - acx^2) = 0.$$

Следовательно, функции (15) и (16) удовлетворяют уравнениям системы (9). Кроме того, функции (15) и (16) удовлетворяют условиям (13), поскольку, учитывая, что

$$B(x_0, y_0) = 4acx_0 (y_0^2 - acx_0^2),$$

из (15) находим

$$u(x_0, y_0) = \frac{4av_0 (y_0^2 - acx_0^2) y_0}{B(x_0, y_0)} = u_0;$$

согласно условию $v_0 y_0 = cu_0 x_0$ из (16) получаем

$$v(x_0, y_0) = \frac{4acv_0 (y_0^2 - acx_0^2) x_0}{B(x_0, y_0)} = v_0. \qquad \square$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев А. А., Огородников Е. Н.* Применение матричных интегродифференциальных операторов в постановке и решении нелокальных краевых задач для систем уравнений гиперболического типа// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2001. — № 12. — С. 45–53.
2. *Гражданцева Е. Ю., Солодуша С. В.* Об одном аналитическом решении нелинейного дифференциального уравнения в частных производных// в кн.: Proc. 7th Int. Conf. “Nonlinear Analysis and Extremal Problems” (Иркутск, 2022). — Иркутск, 2022. — С. 42–44.
3. *Картвелишвили Л. Н.* Принципы расчета гидравлического удара и их развитие// Природоустройство. — 2012. — № 4. — С. 72–77.
4. *Кошляков Н.С.* Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.
6. *Мышкис А. Д., Филимонов А. М.* О глобальной непрерывной разрешимостисмешанной задачи для одномерных гиперболических систем квазилинейных уравнений// Диффер. уравн. — 2008. — *44*, № 3. — С. 394–407.
7. *Полянин А. Д, Зайцев В. Ф., Журов А. И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. — М.: Физматлит, 2005.
8. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их применение в газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
9. *Тарасевич В. В.* Развитие теории и методов расчета гидродинамических процессов в напорных трубопроводных системах/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — Новосибирск, 2017.
10. *Тихонов А. Н, Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
11. *Assanova A. T., Zholamankyzy A.* Problem with data on the characteristics for a loaded system of hyperbolic equations// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2021. — *31*, № 3. — С. 353–364.

Гражданцева Елена Юрьевна
Иркутский государственный университет;
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения РАН, Иркутск
E-mail: `grelyur@mail.ru`