



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 43–53
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-43-53

УДК 517.977.5

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЗАМЫКАЕМЫЕ ОБРАТНЫЕ СВЯЗИ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2023 г. Н. М. ДМИТРУК

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления линейной дискретной системой с неизвестными ограниченными возмущениями, которую требуется за конечное время перевести с гарантией на терминальное множество, обеспечивая при этом минимум гарантированного значения терминального критерия качества. Обсуждается два подхода к построению оптимальных обратных связей в рассматриваемой задаче: размыкаемая обратная связь, которая определяется на основе оптимальных гарантирующих программ, и замыкаемая обратная связь на основе оптимальных стратегий управления с замыканиями. Обсуждаются недостатки первого подхода и предлагается эффективный метод построения оптимальной замыкаемой обратной связи в режиме реального времени.

Ключевые слова: линейная система, возмущение, оптимальное управление, обратная связь, управление в реальном времени.

CLOSED-LOOP STATE FEEDBACK IN LINEAR PROBLEMS OF TERMINAL CONTROL

© 2023 N. M. DMITRUK

ABSTRACT. We consider the optimal control problem for a linear discrete system with unknown limited disturbances, which must be transferred to a terminal set in a finite time, while providing a minimum guaranteed value of the terminal quality criterion. We discuss two approaches to constructing optimal feedbacks: the disconnectable feedback, which is determined through optimal guarantee programs, and the closed feedback based on optimal control strategies with closures. We discuss disadvantages of the first approach and propose an effective method of constructing optimal closed real-time feedback.

Keywords and phrases: linear system, disturbance, optimal control, feedback, real-time control.

AMS Subject Classification: 93C05, 93B52, 49N05

1. Введение. Задачи оптимального управления динамическими системами, подверженными действию неизвестных возмущений или содержащими другие неопределенности, для которых требуется получить гарантированный результат, рассматриваются в литературе с конца 1960-х гг. (см. [9, 10]). Для таких задач требуется строить решение в виде обратной связи, поскольку оптимальные программы (в случае, если они существуют) в значительной степени недооценивают потенциальные возможности системы управления.

Оптимальная обратная связь в задачах оптимального управления системами с возмущениями может быть определена различными способами. Простейший из них в работах [2, 5, 6, 13] получил название оптимальной размыкаемой обратной связи. При ее построении семейство, в которое

Работа выполнена при поддержке Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (НИР 1.2.04.1).

погружается исходная задача оптимального управления, есть семейство задач построения оптимальных гарантирующих программ. В то время как такой подход отчасти решает проблему консервативности программного решения, он неприменим в случае когда исходная задача не имела программного решения.

В [2, 5, 6, 13, 14] для формирования обратной связи предлагается использовать не оптимальные гарантирующие программы, а оптимальные стратегии, учитывающие зависимость управляющих воздействий от информации не только о текущих, но и о будущих состояниях процесса управления. Такие оптимальные обратные связи получили название замыкаемых (см. [2, 5, 6]). В терминологии приведенных работ замкнутая обратная связь совпадает с решением динамического программирования, а замыкаемая обратная связь представляет собой компромисс между последним и размыкаемой обратной связью с точки зрения качества процесса управления и вычислительных затрат.

Настоящая работа примыкает к работам [2, 5, 6, 12, 13], в которых стратегия управления определяется в предположении о коррекции управлений в несколько заданных будущих моментов времени. В отличие от [2, 5, 6] предлагается новый метод построения оптимальной стратегии (см. подход в [8, 12]), трудоемкость которого сравнима с трудоемкостью построения оптимальной программы, что делает его применимым для построения замыкаемой обратной связи в режиме реального времени.

2. Постановка задачи. Оптимальная размыкаемая обратная связь. Рассмотрим дискретную линейную стационарную систему управления с неизвестным ограниченным возмущением

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \dots, T-1. \quad (1)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы (1), $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r$ — управление, $w(t) \in W \subset \mathbb{R}^p$ — неизвестное возмущение в момент времени t ; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$; множества доступных значений управления U и возмущения W имеют вид

$$U = \{u \in \mathbb{R}^r : u_{\min} \leq u \leq u_{\max}\}, \quad W = \{w \in \mathbb{R}^p : \|w\|_{\infty} \leq w_{\max}\},$$

где $\|z\|_{\infty} = \max_i |z_i|$.

Для системы (1) рассмотрим задачу о ее переводе в момент времени T на заданное терминальное множество

$$X_T = \{x \in \mathbb{R}^n : Hx \leq g\}, \quad H \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad g \in \mathbb{R}^m,$$

с гарантией, т.е. при всех возможных реализациях возмущения, при минимуме гарантированного значения линейного терминального критерия качества $c^T x(T)$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Для решения поставленной задачи будем строить обратные связи. Простейшая оптимальная обратная связь, которую можно предложить в рассматриваемой задаче, основана на оптимальных программных решениях (см. [2, 8]).

Задача построения оптимальной гарантирующей программы имеет вид

$$\begin{aligned} J(0, x_0) &= \min_u \max_w c^T x(T), \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &\in U, \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \\ Hx(T) &\leq g \quad \forall w(t) \in W, \quad t = 0, 1, \dots, T-1. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение задачи (2) — оптимальная гарантирующая программа $u^0(\cdot) = (u^0(t), t = 0, 1, \dots, T-1)$, зависит только от времени t и доставляет минимум гарантированному значению критерия качества $\max_w c^T x(T)$ при условии выполнения терминального ограничения для всех возможных реализаций возмущения $w(\cdot)$.

Погрузим задачу (2) в семейство задач

$$\begin{aligned} J(\tau, z) &= \min_u \max_w c^\top x(T), \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(\tau) = z, \\ u(t) &\in U, \quad t = \tau, \tau+1, \dots, T-1, \\ Hx(T) &\leq g \quad \forall w(t) \in W, \quad t = \tau, \tau+1, \dots, T-1, \end{aligned} \quad (3)$$

зависящее от позиции процесса управления (τ, z) , где $\tau = 0, 1, \dots, T-1$, $z \in X_\tau \subseteq \mathbb{R}^n$, X_τ — множество всех состояний z , для которых в момент времени τ разрешима задача (3).

Пусть $u^0(\cdot|\tau, z) = (u^0(t|\tau, z), t = \tau, \tau+1, \dots, T-1)$, — оптимальная программа задачи (3) для позиции (τ, z) . Оптимальную обратную связь на основе оптимальных программ определим как функцию

$$u^0(\tau, z) = u^0(\tau|\tau, z), \quad z \in X_\tau, \quad \tau = 0, 1, \dots, T-1. \quad (4)$$

В работе [2] такая обратная связь названа *оптимальной размыкаемой обратной связью*.

Пусть в конкретном процессе управления реализуется траектория $x^*(\tau)$, $\tau = 0, 1, \dots, T-1$ (зависит от конкретной реализации возмущения); при этом текущие состояния $x^*(\tau)$ в момент τ доступны для полных и точных измерений. Функция

$$u^*(\tau) = u^0(\tau, x^*(\tau)), \quad \tau = 0, 1, \dots, T-1, \quad (5)$$

называется *реализацией оптимальной размыкаемой обратной связи* (4) в рассматриваемом процессе управления (см. [2]).

Нетрудно видеть, что для вычисления реализации (5) в конкретном процессе управления знать оптимальную обратную связь (4) для всех позиций (τ, z) , $z \in X_\tau$, $\tau = 0, 1, \dots, T-1$, не обязательно. Достаточно уметь вычислять значения $u^*(\tau)$ для состояний $x^*(\tau)$ по ходу процесса управления, т.е. в реальном времени (см. [7]). Устройство, способное вычислять значения реализации $u^*(\tau)$ в реальном времени, называется *оптимальным регулятором* (см. [7]).

Оптимальный регулятор осуществляет управление системой (1) по принципу размыкаемой обратной связи в реальном времени согласно следующему алгоритму.

Алгоритм реализации оптимальной размыкаемой обратной связи.

Для всех $\tau = 0, 1, \dots, T-1$:

- (i) измерить $x^*(\tau)$;
- (ii) решить задачу (3) при $z = x^*(\tau)$, найти ее оптимальную программу $u^0(\cdot|\tau, x^*(\tau))$;
- (iii) подать управление $u^*(\tau) = u^0(\tau|\tau, x^*(\tau))$ на вход системы (1).

Указанный алгоритм работы оптимального регулятора реализуем при условии разрешимости задачи построения оптимальной гарантирующей программы (2) для начальной позиции $(0, x_0)$. Это условие называется условием начальной разрешимости.

Предложение 1. Пусть задача (2) имеет решение. Тогда задача (3) также имеет решение при всех $\tau = 1, 2, \dots, T-1$. Кроме того, выполняются следующие неравенства для оптимального значения критерия качества:

$$J(\tau, x^*(\tau)) \leq J(\tau-1, x^*(\tau-1)), \quad \tau = 1, 2, \dots, T-1.$$

Доказательство предложения 1 непосредственно следует из того факта, что $u^0(t|\tau-1, x^*(\tau-1))$, $t = \tau, \tau+1, \dots, T-1$, т.е. сужение решения, полученного в предыдущий момент времени $\tau-1$, на промежуток управления $\{\tau, \tau+1, \dots, T-1\}$, является допустимым управлением для задачи (3) для позиции $(\tau, x^*(\tau))$.

Обсудим условие начальной разрешимости, т.е. существования решения задачи (2). Терминальные ограничения этой задачи выполняются с гарантией тогда и только тогда (см. [2, 8]), когда для номинальной системы (системы без возмущений)

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \dots, T-1,$$

найдется управление $u(t) \in U$, $t = 0, 1, \dots, T-1$, переводящее ее на «суженное» терминальное множество:

$$x_0(T) \in \bar{X}_T = \{x \in \mathbb{R}^n : Hx \leq g - \gamma\},$$

где $\gamma = (\gamma_i, i = 1, 2, \dots, m)$,

$$\gamma_i = w_{\max} \sum_{t=0}^{T-1} \|h_i^\top A^t M\|_1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \|z\|_1 = \sum_i |z_i|.$$

Отсюда следует, что условие начальной разрешимости может не выполняться по двум причинам: (i) множество $\bar{X}_T$ пусто; (ii) множество достижимости номинальной системы не имеет общих точек с $\bar{X}_T$. В обоих этих случаях оптимальная размыкаемая обратная связь, очевидно, не может быть реализована (см. примеры 2 и 3 в разделе 5).

При реализации алгоритма необходимо эффективно реализовать шаг (ii), на котором по ходу процесса управления решается задача (3). Эта задача может быть сведена сначала к детерминированной задаче оптимального управления, а затем к задаче линейного программирования (см. [8]). При этом информацию о решении $u^0(\cdot | \tau - 1, x^*(\tau - 1))$ в предыдущий момент времени $\tau - 1$ нужно использовать в качестве начального приближения для итераций в текущий момент времени τ (см. подходы, описанные в [1, 3, 7]). Это позволяет значительно ускорить процесс решения задачи для (3) в позиции $(\tau, x^*(\tau))$.

3. Оптимальная стратегия управления и замыкаемая обратная связь. Начальная неразрешимость задачи (2) — частая проблема, возникающая при реализации оптимальной размыкаемой обратной связи. Для ее преодоления дополним постановку задачи из раздела 2 предположением о том, что до начала управления известно, что система (1) будет замкнута (см. [2, 8, 12]) в некоторые фиксированные моменты времени $T_j \in \{1, 2, \dots, T-1\}$, $j = 1, 2, \dots, N$, $T_1 < T_2 < \dots < T_N$, которые будем называть *моментами замыкания*. Моменты замыкания разбивают интервал управления на $\Delta_j = \{T_j, T_j + 1, \dots, T_{j+1} - 1\}$, $j = 0, 1, \dots, N$, где считается, что $T_0 = 0$, $T_{N+1} = T$.

Пусть $u_j(\cdot) = (u_j(t) \in U, t \in \Delta_j)$ — управление, $w_j(\cdot) = (w_j(t) \in W, t \in \Delta_j)$ — возмущение на Δ_j ,

$$U_j = U^{T_{j+1}-T_j} = \underbrace{U \times \dots \times U}_{T_{j+1}-T_j \text{ раз}}, \quad W_j = W^{T_{j+1}-T_j}.$$

Обозначим через $x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j)$ состояние системы (1) в момент T_{j+1} при начальном состоянии $x(T_j) = x_j$, управлении $u_j(\cdot) \in U_j$ и возмущении $w_j(\cdot) \in W_j$, а через

$$X(T_{j+1}|x_j, u_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j), w_j(\cdot) \in W_j\},$$

— множество состояний, в которых может оказаться система (1) в момент времени T_{j+1} .

Относительно моментов замыкания предполагаем, что в каждый момент T_j можно будет: (i) точно измерить текущее состояние $x^*(T_j)$ системы; (ii) в зависимости от измеренного $x^*(T_j)$ выбрать новое управление $u_j(t|x^*(T_j))$, $t \in \Delta_j$.

Согласно сделанному предположению процесс управления будет организован следующим образом. Выбирается управление $u_0(\cdot|x_0) \in U_0$, которое используется в моменты времени $t \in \Delta_0$. В момент T_1 измеряется текущее состояние системы $x^*(T_1)$ и вычисляется управление $u_1(\cdot|x^*(T_1)) \in U_1$, которое применяется на Δ_1 . Продолжая этот процесс, в момент времени T_j измеряется реализующееся состояние $x^*(T_j)$ и строится управление $u_j(\cdot|x^*(T_j)) \in U_j$ для Δ_j .

Состояния $x^*(T_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$, заранее (в момент $t = 0$) не известны; известно только, что $x^*(T_j) \in X(T_j|x_{j-1}, u_{j-1})$. Поэтому решение задачи управления, поставленной в разделе 2, будем искать в виде *стратегии управления* $\pi_N(0, x_0)$ с N моментами замыкания $T_1, \dots, T_N$, которую определим рекуррентно на основе стратегий $\pi_{N-j}(T_j, x_j)$ с $N-j$ моментами замыкания, $j = N-1, N-2, \dots, 1$:

$$\begin{aligned} \pi_1(T_{N-1}, x_{N-1}) &= \{u_{N-1}(\cdot|x_{N-1}); u_N(\cdot|x_N), x_N \in X(T_N|x_{N-1}, u_{N-1})\}, \\ \pi_{N-j}(T_j, x_j) &= \{u_j(\cdot|x_j); \pi_{N-j-1}(T_{j+1}, x_{j+1}), x_{j+1} \in X(T_{j+1}|x_j, u_j)\}, \\ \pi_N(0, x_0) &= \{u_0(\cdot|x_0); \pi_{N-1}(T_1, x_1), x_1 \in X(T_1|x_0, u_0)\}. \end{aligned}$$

Траекторию системы управления (1), соответствующую стратегии $\pi_N(0, x_0)$ и возмущению $w(\cdot) = (w_0(\cdot), w_1(\cdot), \dots, w_N(\cdot))$, определим, следуя [8, 13], как последовательное решение систем:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu_0(t|x_0) + Mw_0(t), & x(0) &= x_0, & t &\in \Delta_0, \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu_j(t|x(T_j)) + Mw_j(t), & x(T_j) &= x(T_j|x_{j-1}, u_{j-1}, w_{j-1}), & t &\in \Delta_j, \end{aligned}$$

$j = 1, 2, \dots, N$. Положим $X_{N+1} = X_T$ и введем в рассмотрение множества $X_N, \dots, X_1$ согласно правилам

$$X_j = \{x_j \in \mathbb{R}^n : \exists u_j(\cdot|x_j) \in U_j, X(T_{j+1}|x_j, u_j) \subseteq X_{j+1}\}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

т.е. множество X_j составим из всех точек x_j , для которых существует управление $u_j(t|x_j)$, $t \in \Delta_j$, переводящее систему (1) с гарантией на множество X_{j+1} .

Согласно [2, 8], эти множества будем называть *множествами замыкания*. Далее предполагаем, что все множества замыкания $X_1, X_2, \dots, X_N$ не пустые.

Стратегия управления $\pi_N(0, x_0)$ называется допустимой (см. [8]), если все составляющие ее управления $u_j(\cdot|x_j) \in U_j$ таковы, что

$$X(T_{j+1}|x_j, u_j) \subseteq X_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Оптимальная стратегия $\pi_N^0(0, x_0)$ определяется (см. [8]) управлениями $u_j^0(t|x_j)$, $t \in \Delta_j$, которые, согласно принципам динамического программирования, находятся из уравнения Беллмана

$$V_j(x_j) = \min_{u_j \in U_j} \max_{w_j \in W_j} V_{j+1}(x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j)), \quad j = N, N-1, \dots, 0,$$

где $V_{N+1}(x) = c^\top x$ при $x \in X_{N+1}$, $V_{N+1}(x) = +\infty$ при $x \notin X_{N+1}$.

На основе стратегий управления определим оптимальную замыкаемую обратную связь. Погрузим рассматриваемую задачу в семейство задач, в котором процесс управления начинается в момент времени τ из начального состояния $x(\tau) = z$, $\tau = 0, 1, \dots, T-1$, $z \in \mathbb{R}^n$.

Для позиции (τ, z) с $\tau \in \Delta_j$ решением задачи в классе стратегий с замыканиями будет оптимальная стратегия с $N-j$ моментами замыкания $T_{j+1}, T_{j+2}, \dots, T_N$:

$$\pi_{N-j}^0(\tau, z) = \{u_j^0(\cdot|\tau, z); \pi_{N-j-1}^0(T_{j+1}, x_{j+1}), x_{j+1} \in X(T_{j+1}|\tau, z, u_j^0)\},$$

где $u_j^0(\cdot|\tau, z) \in U^{T_{j+1}-\tau}$ определена на промежутке $\Delta_j(\tau) = \{\tau, \tau+1, \dots, T_{j+1}-1\}$:

$$u_j^0(\cdot|\tau, z) = \arg \min_{u_j} \max_{w_j} V_{j+1}(x(T_{j+1}|\tau, z, u_j, w_j)); \quad (6)$$

$x(T_{j+1}|\tau, z, u_j, w_j)$ — состояние системы (1) в момент T_{j+1} при начальном состоянии $x(\tau) = z$, управлении $u_j(\cdot) \in U^{T_{j+1}-\tau}$ и возмущении $w_j(\cdot) \in W^{T_{j+1}-\tau}$; $X(T_{j+1}|\tau, z, u_j)$ — множество состояний, в которых может оказаться система (1) в момент времени T_{j+1} .

Обозначим через X_τ^π множество всех состояний $z \in \mathbb{R}^n$, для которых существует оптимальная стратегия $\pi_{N-j}^0(\tau, z)$.

Оптимальную замыкаемую обратную связь определим следующим образом:

$$u_\pi^0(\tau, z) = u_j^0(\tau|\tau, z), \quad z \in X_\tau^\pi, \quad \tau \in \Delta_j, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (7)$$

Как и в случае с оптимальной размыкаемой обратной связью (см. раздел 2), в реальном процессе управления обратная связь (7) не используется полностью, для всех $z \in X_\tau^\pi$, нужны лишь ее значения вдоль реализующейся траектории $x^*(\tau)$, $\tau = 0, 1, \dots, T$. Функция

$$u_\pi^*(\tau) = u_\pi^0(\tau, x^*(\tau)) = u_j^0(\tau|\tau, x^*(\tau)), \quad \tau \in \Delta_j, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

называется *реализацией оптимальной замыкаемой обратной связи* в конкретном процессе управления, а устройство, способное вычислять значения реализации $u_\pi^*(\tau)$ в реальном времени — оптимальным регулятором.

Оптимальный регулятор осуществляет управление системой (1) в реальном времени согласно следующему алгоритму, выполняемому для всех $\tau = 0, 1, \dots, T-1$.

Алгоритм реализации оптимальной замыкаемой обратной связи.

- (i) Измерить $x^*(\tau)$, определить j : $\tau \in \Delta_j$;
- (ii) решить задачу построения оптимальной стратегии $\pi_{N-j}^0(\tau, x^*(\tau))$ для текущей позиции и найти управление (6);
- (iii) подать управление $u_\pi^*(\tau) = u_j^0(\tau | \tau, x^*(\tau))$ на вход системы (1).

Для реализации приведенного алгоритма работы оптимального регулятора, осуществляющего управление системой (1) по принципу замыкаемой обратной связи, необходимо в режиме реального времени решать минимаксные задачи (6), которые в подробной записи имеют вид

$$\begin{aligned} V(\tau, x^*(\tau)) &= \min_{u_j} \max_{w_j} V_{j+1}(x(T_{j+1})), \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu_j(t) + Mw_j(t), \quad x(\tau) = x^*(\tau), \\ u_{\min} &\leq u_j(t) \leq u_{\max}, \quad t \in \Delta_j(\tau), \\ x(T_{j+1}) &\in X_{j+1} \quad \forall w_j(t) \in W, \quad t \in \Delta_j(\tau). \end{aligned} \quad (8)$$

Как и в случае реализации оптимальной размыкаемой обратной связи, очевидно, имеет место следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть задача (8) имеет решение для позиции $(0, x_0)$. Тогда задача (8) имеет решение при всех $\tau = 1, 2, \dots, T-1$ и, кроме того, выполняется неравенство для оптимального значения критерия качества:

$$V(\tau, x^*(\tau)) \leq V(\tau-1, x^*(\tau-1)), \quad \tau = 1, 2, \dots, T-1.$$

Эффективный метод решения задач вида (8) был предложен в [8]. В следующем разделе приведем основные результаты из [8] и обсудим применение этого метода в режиме реального времени.

4. Метод построения оптимальной стратегии управления и реализации оптимальной замыкаемой обратной связи. Перепишем минимаксную задачу (8) в эквивалентном виде (см. [11, с. 134])

$$\begin{aligned} V(\tau, x^*(\tau)) &= \min_{u_j, \alpha} \alpha, \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu_j(t) + Mw_j(t), \quad x(\tau) = x^*(\tau), \\ u_{\min} &\leq u_j(t) \leq u_{\max}, \quad t \in \Delta_j(\tau), \\ x(T_{j+1}) &\in X_{j+1}(\alpha) \quad \forall w_j(t) \in W, \quad t \in \Delta_j(\tau), \end{aligned} \quad (9)$$

где $X_{j+1}(\alpha) = \{x \in X_{j+1} : V_{j+1}(x) \leq \alpha\}$.

Множества $X_j(\alpha)$, $j = 1, 2, \dots, N$, при фиксированном значении параметра α являются выпуклыми многогранниками. Иногда удается точно найти нормали к граням этих многогранников, но в большинстве случаев приходится прибегать к более простым внешним многогранным аппроксимациям

$$\bar{X}_j(\alpha) = \left\{ x_j \in \mathbb{R}^n : p_{ji}^\top x_j \leq f_{ji}(\alpha), \quad i = 1, 2, \dots, m_j \right\}, \quad (10)$$

где $p_{ji} \in \mathbb{R}^n$, $\|p_{ji}\| = 1$,

$$f_{ji}(\alpha) = \max_{x_j} p_{ji}^\top x_j, \quad x_j \in X_j(\alpha), \quad i = 1, 2, \dots, m_j. \quad (11)$$

Для формулировки основного результата, позволяющего получить простое представление для аппроксимации $\bar{X}_j(\alpha)$ с линейной зависимостью от параметра α в правой части неравенства, введем в рассмотрение матрицы и векторы

$$\begin{aligned} P_{N+1} &= \begin{pmatrix} H \\ c^\top \end{pmatrix}, \quad g_{N+1} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{N+1} = \begin{pmatrix} 0_m \\ 1 \end{pmatrix}, \\ P_j &= \begin{pmatrix} p_{ji}^\top \\ k = 1, 2, \dots, K_{ji} \\ i = 1, 2, \dots, m_j \end{pmatrix}, \quad g_j = \begin{pmatrix} f_{ji}^k - \lambda_{j+1}^\top y_{ji}^k a_{ji}^k \\ k = 1, 2, \dots, K_{ji} \\ i = 1, 2, \dots, m_j \end{pmatrix}, \quad \lambda_j = \begin{pmatrix} \lambda_{j+1}^\top y_{ji}^k \\ k = 1, 2, \dots, K_{ji} \\ i = 1, 2, \dots, m_j \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Элементы матриц (12) таковы: f_{ji}^k — оптимальное значение, а y_{ji}^k — оптимальное решение следующей задачи линейного программирования при $\alpha = a_{ji}^k$:

$$\begin{aligned} f_{ji}(\alpha) &= \min_y (g_{j+1} + \lambda_{j+1}\alpha - \chi_j(T_j))^\top y + c_{ji}, \\ (P_{j+1}A^{T_{j+1}-T_j})^\top y &= p_{ji}, \quad y \geq 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$c_{ji} = \sum_{t \in \Delta_j} \left([-p_{ji}^\top A^{T_j-t-1} B]_+ u_{\max} - [p_{ji}^\top A^{T_j-t-1} B]_+ u_{\min} \right),$$

$[z]_+ = \max\{z, 0\}$ — положительная срезка для $z \in \mathbb{R}$; $[z]_+ = ([z_j]_+, j = 1, \dots, r)$, $z \in \mathbb{R}^r$;

$$\chi_j(\tau) = \left(\begin{array}{c} \chi_{ji}(\tau) \\ k = 1, 2, \dots, K_{ji} \\ i = 1, 2, \dots, m_j \end{array} \right) : \quad \chi_{ji}(\tau) = w_{\max} \sum_{t \in \Delta_j(\tau)} \|p_{j+1i}^\top A^{T_{j+1}-t-1} M\|_1.$$

Отметим, что задачи (13) эквивалентны задачам, двойственным к задачам (11). Они решаются рекуррентно, начиная с $j = N$.

В качестве значения параметра α , при котором решается каждая конкретная задача (13), выбирается любая точка a_{ji}^k из промежутка $[\alpha_{ji}^{k+1}, \alpha_{ji}^k]$, $k = 1, 2, \dots, K_{ji}$. Указанные промежутки находятся из условия, что оптимальное решение задачи (13) остается постоянным при $\alpha \in [\alpha_{ji}^{k+1}, \alpha_{ji}^k]$,

$$\alpha_{ji}^1 = \alpha_{\max} > \alpha_{ji}^2 > \dots > \alpha_{ji}^{K_{ji}} > \alpha_{ji}^{K_{ji}+1} = \alpha_{\min}, \quad (14)$$

$\alpha_{\min}$ — минимальное значение параметра α , при котором задачи (13) имеют конечное решение (оказывается одинаковым для всех задач), $\alpha_{\max}$ — оценка сверху на оптимальное значение критерия качества $V(0, x_0)$. Схема, которая позволяет эффективно найти значения (14), приведена в [8]; там же доказано следующее утверждение.

Предложение 3. Для аппроксимаций (10) имеют место представления

$$\bar{X}_j(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : P_j x \leq g_j + \lambda_j \alpha\}, \quad \alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}], \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

С учетом представления (15) задача (9) аппроксимируется задачей вида

$$\begin{aligned} \min_{u_j, \alpha} \alpha, \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu_j(t) + Mw_j(t), \quad x(\tau) = x^*(\tau), \\ u_{\min} &\leq u_j(t) \leq u_{\max}, \quad t \in \Delta_j(\tau), \\ P_{j+1}x(T_{j+1}) &\leq g_{j+1} + \lambda_{j+1}\alpha \quad \forall w_j(t) \in W, \quad t \in \Delta_j(\tau), \end{aligned}$$

которая может быть сведена к задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} \min_{u_j, \alpha} \alpha, \\ \sum_{t \in \Delta_j(\tau)} P_{j+1}A^{T_{j+1}-t-1}Bu_j(t) - \lambda_{j+1}\alpha &\leq g_{j+1} - \chi_j(\tau) - P_{j+1}A^{T_{j+1}-\tau}x^*(\tau), \\ u_{\min} &\leq u_j(t) \leq u_{\max}, \quad t \in \Delta_j(\tau). \end{aligned} \quad (16)$$

В результате решения задачи (16) будет построено субоптимальное управление $\bar{u}_j^0(t|\tau, z)$, $t \in \Delta_j(\tau)$, задачи (8), оценка субоптимальности которого зависит от точности аппроксимации множеств замыкания и может быть оценена в каждом конкретном примере (см. [8, 12]).

Теперь в алгоритме реализации оптимальной замыкаемой обратной связи на шаге (ii) будем решать задачу (16) и на шаге (iii) на вход системы в момент τ подавать управление $\bar{u}_\pi^*(\tau) = \bar{u}_j^0(\tau|\tau, x^*(\tau))$.

Построение множеств $\bar{X}_j(\alpha)$, $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, $j = 1, 2, \dots, N$, является достаточно трудоемкой процедурой. Однако из приведенных результатов и вида задачи (16), следует, что они могут быть построены до начала процесса управления и не требуют модификации в реальном времени. Это существенное улучшение по сравнению с алгоритмом, приведенным в [2].

В режиме реального времени решается только задача (16). Для нее удобно использовать адаптивный метод решения задач линейного программирования (см. [4]) или симплекс-метод. При этом необходимо различать две ситуации:

- (a) $\tau = T_j, j = 1, 2, \dots, N$;
- (b) $\tau \in \Delta_j(\tau) \setminus \{T_j\}, j = 1, 2, \dots, N$.

Рассмотрим сначала ситуацию (b). Поскольку задача (16) для текущего интервала Δ_j уже решалась в момент $\tau - 1$ для позиции $(\tau - 1, x^*(\tau - 1))$, известна структура ее решения: оптимальная опора (для адаптивного метода) или оптимальный базис (для симплекс-метода), а также соответствующие множители Лагранжа (потенциалы и оценки). В работах [?, 1, 2], посвященных реализациям алгоритмов работы оптимальных регуляторов для различных классов задач оптимального управления, показано, что выбор оптимальной опоры/базиса предыдущей задачи в качестве начальной в текущий момент времени τ позволяет быстро получать оптимальные решения для позиции $(\tau, x^*(\tau))$.

В ситуации (a) в момент $\tau = T_j$ происходит переход от промежутка Δ_{j-1} к промежутку Δ_j . Соответственно, меняется целевое множество с $X_j(\alpha)$ на $X_{j+1}(\alpha)$, и структура предыдущего решения в момент $\tau - 1$ непригодна для использования в текущий момент τ . Здесь можно предложить два подхода.

В первом подходе сразу после решения задачи (16) для позиции $(T_j, x^*(T_j))$ (для $j = 0$ эта задача решена до начала процесса управления) сразу решить задачу (16) для позиции $(T_{j+1}, x_0(T_{j+1}|x^*(T_j), \bar{u}_j^0))$, где $x_0(T_{j+1}|x^*(T_j), \bar{u}_j^0)$ — состояние номинальной системы для начального состояния $x_0(T_j) = x^*(T_j)$ и субоптимального управления $\bar{u}_j^0(\cdot)$. Эта задача может решаться параллельно с процессом управления на промежутке Δ_j , а затем ее оптимальная опора/базис принимаются в качестве начального приближения для решения задачи (16) для позиции $(T_{j+1}, x^*(T_{j+1}))$.

Второй подход применим в случае, если решение задачи (16) для позиции $(T_{j+1}, x_0(T_{j+1}|x^*(T_j), \bar{u}_j^0))$ удастся построить за время до наступления момента $T_j + 1$. Тогда в каждый момент $\tau \in \Delta_j$ оптимальный регулятор будет успевать решать две задачи: задачу (16) для текущей позиции $(\tau, x^*(\tau))$ и задачу для позиции $(T_{j+1}, x_0(T_{j+1}|\tau, x^*(\tau), \bar{u}_j^0))$. При решении второй задачи заготавливается и в режиме реального времени корректируется оптимальная опора/базис, которая будет использована в качестве начальной в момент $\tau = T_{j+1}$.

5. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим задачу из [8, 12]:

$$x_2(T) \rightarrow \max,$$

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0,9950 & 0,0998 \\ -0,0998 & 0,9950 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0998 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0998 \end{pmatrix} w(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$x(T) \in X_T = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_{\min} \leq x_1 \leq g_{\max}\}, \quad |u(t)| \leq 1, \quad |w(t)| \leq 0,5, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

где $T = 120$, $g_{\min} = 2$, $g_{\max} = 10$. В задаче (17) для начальной позиции $(0, x_0)$ существует оптимальная гарантирующая программа $u^0(\cdot)$; она доставляет критерию качества гарантированное значение $J(x_0) = 1,501102$. Как следует из предложения 1, оптимальная размыкаемая обратная связь в рассматриваемой задаче может быть реализована согласно алгоритму из раздела 2. Для эксперимента был выбран процесс управления, в котором реализовалось возмущение

$$w(t) = \begin{cases} -0,5, & t \in \{0, 1, \dots, 9\} \cup \{41, 42, \dots, 72\} \cup \{104, 105, \dots, 119\}, \\ 0,5, & t \in \{10, 11, \dots, 40\} \cup \{73, 74, \dots, 103\}. \end{cases}$$

Реализация оптимальной размыкаемой обратной связи $u^*(\cdot)$ и соответствующие ей траектории $x_1^*(\cdot)$, $x_2^*(\cdot)$ представлены на рис. 1 (штриховые линии). К терминальному моменту времени удается достичь значения критерия качества $x_2^*(T) = 3,328877$.

В рассматриваемом процессе минимальное время решения задач (3) для текущих позиций $(\tau, x^*(\tau))$ адаптивным методом (см. [4]) составило 0,41 мс, максимальное — 2,62 мс, среднее — 0,91 мс.

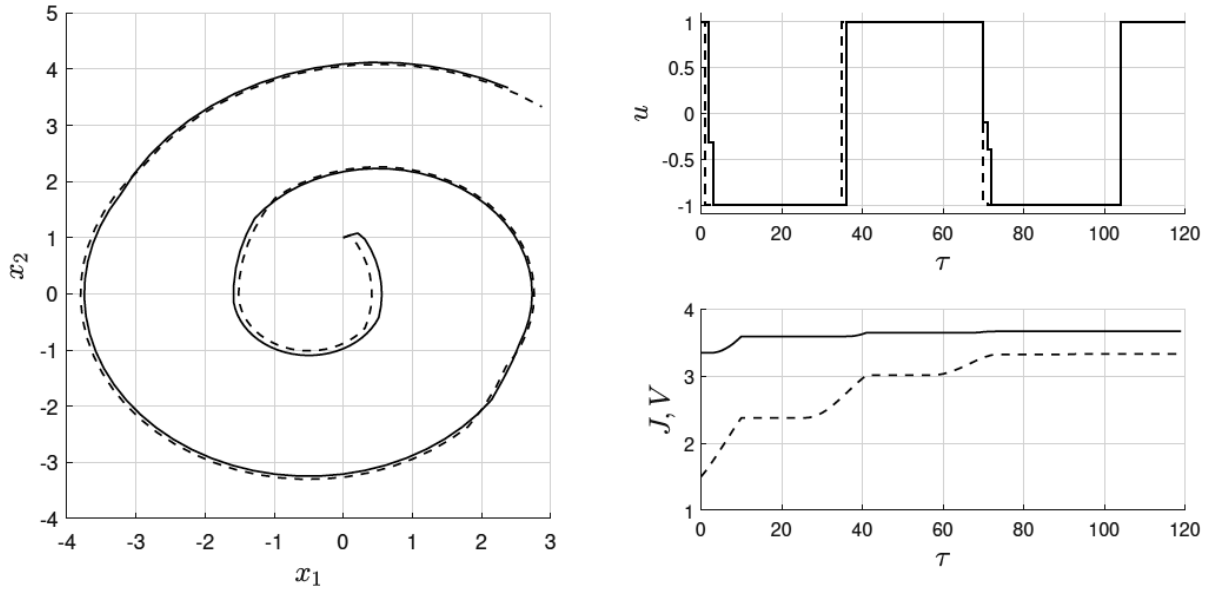


Рис. 1. Фазовые траектории, реализации обратных связей и сравнение критериев качества в примере 1.

Для построения оптимальной замыкаемой обратной связи были выбраны 5 моментов замыкания: $T_1 = 20$, $T_2 = 40$, $T_3 = 60$, $T_4 = 80$, $T_5 = 100$. Субоптимальная стратегия для позиции $(0, x_0)$ гарантирует оптимальное значение критерия качества $V(0, x_0) = 3,347376$ при точности аппроксимации множеств замыкания $6 \cdot 10^{-4}$.

Реализация оптимальной замыкаемой обратной связи согласно алгоритму раздела 3 для рассмотренного выше процесса и соответствующие траектории изображены на рис. 1 сплошными линиями. На рис. 1 также представлено сравнение изменения значений критерия качества $J(\tau, x^*(\tau))$ и $V(\tau, x^*(\tau))$. При использовании оптимальной замыкаемой обратной связи получено значение критерия качества равное $x_2^*(T) = 3,666780$.

Минимальное время решения задач (16) составило 0,3 мс, максимальное — 6,36 мс, среднее — 0,96 мс, что сравнимо со временем решения задач (3) при реализации размыкаемой обратной связи.

Пример 2. Если в примере 1 принять $g_{\max} = 3,5$, то задача (2) для начальной позиции $(0, x_0)$ не имеет решения, поскольку множество $\bar{X}_T = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2 + \gamma \leq x_1 \leq 3,5 - \gamma\}$ с $\gamma = 3,9206138$ оказывается пустым. Оптимальная замыкаемая обратная связь, однако, существует и совпадает с построенной реализацией в примере 1 для рассмотренного выше процесса.

Пример 3. Рассмотрим динамическую систему и критерий качества примера 1, изменив начальное состояние, терминальное множество X_T и множество возможных значений возмущения W :

$$\begin{aligned}
 & x_2(T) \rightarrow \max, \\
 & x(t+1) = \begin{pmatrix} 0,9950 & 0,0998 \\ -0,0998 & 0,9950 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0998 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0998 \end{pmatrix} w(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \\
 & x(T) \in X_T = \{x \in \mathbb{R}^2 : 8 \leq x_1 + x_2 \leq 13, -6 \leq x_1 - x_2 \leq -1\}, \\
 & |u(t)| \leq 1, \quad |w(t)| \leq 0,2, \quad t = 0, 1, \dots, T-1.
 \end{aligned}$$

Для выбранных новых параметров не существует оптимальной гарантирующей программы для позиции $(0, x_0)$. Этот пример демонстрирует случай, когда множество $\bar{X}_T$ не пусто, однако это

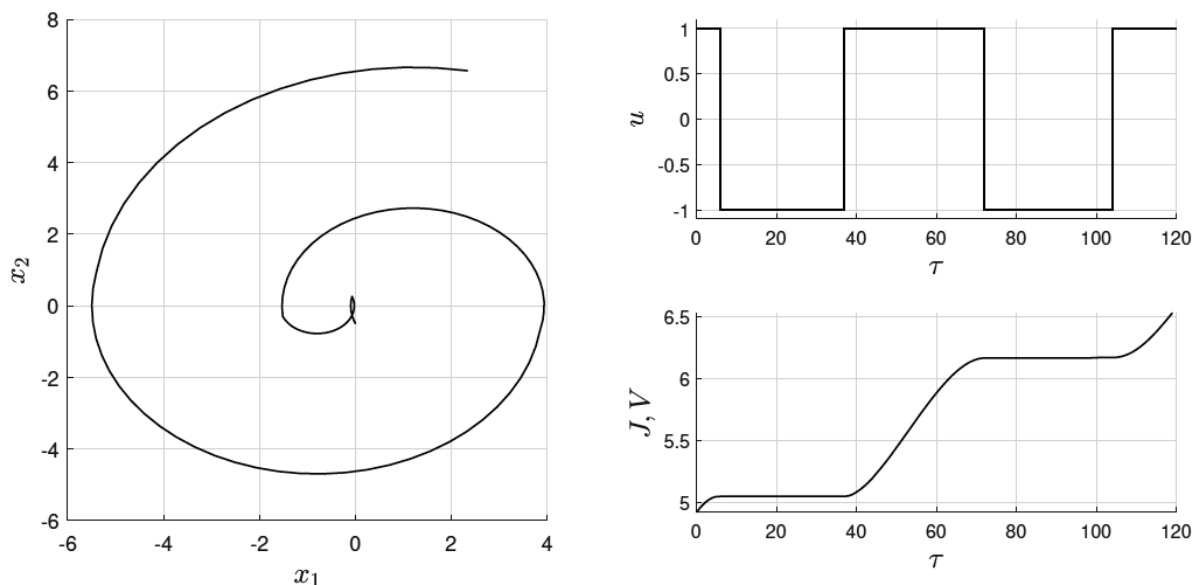


Рис. 2. Фазовая траектория, реализация оптимальной замыкаемой обратной связей и улучшение критерия качества в примере 2.

множество недостижимо из выбранного начального состояния x_0 . Таким образом, оптимальная размыкаемая обратная связь в рассматриваемом примере не может быть реализована.

Однако оптимальная стратегия управления для позиции $(0, x_0)$ существует, если выбрать, например, моменты замыкания $T_1 = 40$, $T_2 = 80$. При этом $V(0, x_0) = 4,916932$, и график улучшения значения $V(\tau, x^*(\tau))$, $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$, в процессе управления замыкаемой обратной связи изображен на рис. 2. Также на рис. 2 представлены реализация $\bar{u}_\pi^*(\tau)$, $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$, и соответствующая ей фазовая траектория $x^*(\tau)$, $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$.

Минимальное время решения задач (16) составило 0,31 мс, максимальное — 3,56 мс, среднее — 0,82 мс.

6. Заключение. В работе исследована проблема построения оптимальных обратных связей в задаче минимизации гарантированного значения терминального критерия качества на траекториях линейной дискретной системы с неизвестными ограниченными возмущениями. Основное внимание уделяется построению оптимальных замыкаемых обратных связей, основанных на оптимальных стратегиях управления с замыканиями и вопросу их реализации в режиме реального времени. Показано, что с применением метода, предложенного в [8] для построения оптимальных стратегий, реализация замыкаемой обратной связи по трудоемкости вычислений сравнима с реализацией размыкаемой обратной связи, которая определяется на основе оптимальных гарантирующих программ. При этом использование замыканий позволяет строить обратные связи в тех случаях, когда оптимальных программ в задаче не существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2000. — 40, № 6. — С. 838–859.
2. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2004. — 44, № 2. — С. 265–286.
3. Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М. Оптимизация многомерных систем управления с параллелепипедными ограничениями // Автомат. телемех. — 2002. — 63, № 3. — С. 3–26.

4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления. — Минск, 1984.
5. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костина Е. А. Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления. I. Однократное замыкание// Автомат. телемех. — 1996. — 57, № 7. — С. 121–130.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костина Е. А. Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления. II. Многократно замыкаемые обратные связи// Автомат. телемех. — 1996. — 57, № 8. — С. 90–99.
7. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче// Докл. АН СССР. — 1991. — 320, № 6. — С. 1294–1299.
8. Дмитрук Н. М. Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2022. — 28, № 3. — С. 66–82.
9. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. — М.: Наука, 1985.
10. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1978.
11. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. — New York: Cambridge Univ. Press, 2004.
12. Kastsiukevich D. A., Dmitruk N. M. A method for constructing an optimal control strategy in a linear terminal problem// J. Belarus. State Univ. Math. Inform. — 2021. — № 2. — P. 38–50.
13. Kostyukova O., Kostina E. Robust optimal feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances// Math. Program. — 2006. — 107, № 1–2. — P. 131–153.
14. Lee J. H., Yu Z. Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters// Automatica. — 1997. — 33, № 15. — P. 763–781.

Дмитрук Наталия Михайловна

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

E-mail: dmitrukn@bsu.by