



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 54–64
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-54-64

УДК 517.977.5

МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОЗИЦИОННОГО ПРИНЦИПА МИНИМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2023 г. В. А. ДЫХТА

Аннотация. Позиционный принцип минимума — это необходимое условие глобальной оптимальности, усиливающее принцип максимума Понтрягина и большинство известных условий экстремальности для гладких и негладких задач. Его конструктивную основу составляют итерации позиционного спуска по функционалу, базирующиеся на использовании экстремальных стратегий относительно явно заданной слабо убывающей функции — решения соответствующего неравенства Гамильтона—Якоби. Рассматриваются основные методы, позволяющие повысить эффективность итераций позиционного спуска в ситуациях неопределенности экстремальных стратегий и «застревания» на явно неоптимальном процессе. Детально исследован позиционный спуск со скользящего режима, т.е. с допустимого процесса овыпукленной задачи с обобщенными управлениями — регулярными вероятностными мерами. На этой основе получен позиционный принцип минимума для скользящих режимов.

Ключевые слова: принцип максимума, экстремаль, позиционный спуск, скользящий режим.

METHODS FOR IMPROVING THE EFFICIENCY OF THE POSITIONAL MINIMUM PRINCIPLE IN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

© 2023 V. A. DYKHTA

ABSTRACT. The positional minimum principle is a necessary condition of global optimality, which strengthen the Pontryagin maximum principle and various extremal conditions for smooth and nonsmooth problems. It is based on iterations of the positional descent over the functional related to extremal strategies with respect to a solution of the corresponding Hamilton–Jacobi inequality. We discuss the main methods that allow one to increase the efficiency of positional descent iterations for uncertain extreme strategies and «stuck» on clearly nonoptimal processes. The positional descent from the sliding mode was examined in detail, i.e., from an admissible process of the convex problem with generalized controls, which are regular probability measures. Based on these ideas, we obtain the positional minimum principle for sliding modes.

Keywords and phrases: maximum principle, extremal, positional descent, sliding mode.

AMS Subject Classification: 49K15, 49L99

1. Введение. Статья посвящена необходимым условиям глобальной оптимальности в форме позиционного принципа минимума для следующей задачи (P):

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

$$J[x, u] = l(x(t_1)) \rightarrow \inf.$$

Здесь $(x, u) \in AC(T, \mathbb{R}^n) \times L_\infty(T, U)$ — допустимые пары функций, где U — компакт в $\mathbb{R}^m$. Вектор-функция $f(t, x, u)$ предполагается непрерывной, локально липшицевой по x и удовлетворяющей условию сублинейного роста на $T \times \mathbb{R}^n \times U$; целевую функцию $l(x)$ считаем гладкой на $\mathbb{R}^n$.

Ясно, что задача (P) является негладкой из-за предположений на f . При дополнительном предположении непрерывной дифференцируемости f по x получим гладкую задачу (P_s).

Через Σ будем обозначать множество всех допустимых пар $\sigma = (x, u)$, а через $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u}) \in \Sigma$ — пару, исследуемую на оптимальность. ввв

Как известно (см. [5, 6]), общий позиционный принцип минимума является необходимым условием глобальной оптимальности, которое базируется на использовании позиционных управлений спуска (как правило, разрывных). Эти управления находятся по образцу динамического программирования как селекторы экстремального отображения

$$U_\varphi(t, x) = \operatorname{Argmin}_{u \in U} \varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u), \quad (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

где $\varphi(t, x)$ — липшицево по (t, x) , гладкое по x решение неравенства

$$\begin{aligned} \varphi_t(t, x) + \min_{u \in U} \varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u) &\leq 0, \\ \varphi(t_1, x) &= l(x) - l(\bar{x}(t_1)) \end{aligned} \quad (4)$$

для слабо убывающих (u -стабильных) функций (см. [10, 12]). Это свойство означает, в частности, существование траектории $x_*(\cdot)$ овыпукленной системы (1), (2) для которой

$$l(x_*(t_1)) - l(\bar{x}(t_1)) = \varphi(t_1, x_*(t_1)) \leq \varphi(t_0, x_0). \quad (5)$$

Если при этом окажется, что $\varphi(t_1, x_*(t_1)) < 0$, то траектория x_* бракует $\bar{\sigma}$ в силу плотности множества траекторий системы (1), (2) в ее овыпукленном расширении (неравенство $\varphi(t_0, x_0) \leq 0$ в (5) при этом может не выполняться).

Таков исходный замысел позиционного спуска на основе неравенства (4) и его проксимального [12] (или Дини [10]) обобщения с непрерывными решениями. Этот замысел можно трансформировать в необходимое условие оптимальности, зависящее от φ , который мы называем общим позиционным принципом минимума (кратко, GF-ПМ). Его теоретическая общность обусловлена произвольностью структуры мажорант φ (их нелинейностью) и негладкостью. В этих предположениях GF-ПМ анонсирован в [13].

2. Позиционный принцип минимума в гладкой задаче. По сфере приложений и естественной логике градаций условий оптимальности на первом месте стоит, безусловно, «простой» позиционный принцип минимума (F-ПМ) с явно заданной квазилинейной мажорантой:

$$\varphi^\psi(t, x) = l(x) - l(\bar{x}(t)) + (\psi(t) - l_x(\bar{x}(t))) \cdot (x - \bar{x}(t)) + r(t). \quad (6)$$

Здесь $\psi(\cdot)$ — котраектория процесса $\bar{\sigma}$ (в случае гладкой задачи (P_s)), т.е. решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -H_x(t, \bar{x}(t), \psi, \bar{u}(t)), \quad \psi(t_1) = l_x(\bar{x}(t_1)), \quad (7)$$

$H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot f(t, x, u)$ — функция Понтрягина, а «поправка» $r(\cdot)$ обеспечивает слабое убывание функции (6). Эта функция, а также ее φ -экстремальное отображение (3), полностью определяются котраекторией $\psi(\cdot)$ (помимо целевой функции l и исследуемой траектории, что естественно), так что обозначение U_φ лучше сменить на U_ψ .

Фактически это все, что нужно для формулировки F-ПМ, остались лишь технические обозначения. Обозначим через $\mathcal{V}_\psi$ множество селекторов $\{v(t, x)\}$ отображения $U_\psi(t, x)$ и через $\mathcal{X}(v)$ пучок кривых Эйлера (конструктивных движений Красовского—Субботина, соответствующий

селектору $v(t, x) \in \mathcal{V}_\psi$, дополненный решениями типа Каратеодори; см. [8, 10, 12]). Тогда базовый F-ПМ формулируется следующим образом [5, 6, 13].

Теорема 1. *Для оптимальности пары $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ в задаче (P_s) необходимо, чтобы траектория $\bar{x}$ была оптимальной в следующей ψ -присоединенной задаче:*

$$l(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in \mathcal{X}(v), \quad v \in \mathcal{V}_\psi. \quad (8)$$

Хотя это необходимое условие формулируется в рамках конструкций принципа максимума Понтрягина (ПМП), оно является его существенным вариационным усилением: конечномерное условие минимума функции H по управлению —

$$H(t, \bar{x}(t), \psi(t), \bar{u}(t)) = \min_{u \in U} H(t, \bar{x}(t), \psi(t), u), \quad t \in T, \quad (9)$$

— сменило условие минимума по $x(\cdot)$ в бесконечномерной задаче (8) на траекторию $\bar{x}(\cdot)$.

Формально усиление теоремой 1 ПМП устанавливает следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть пара $(\bar{x}, \bar{u})$ удовлетворяет теореме 1 (т.е. F-ПМ).*

- (а) *если $\bar{x}$ — решение типа Каратеодори, соответствующее борелевскому селектору $\bar{v} \in \mathcal{V}_{\bar{\psi}}$ со свойством $\bar{v}(t, \bar{x}(t)) = \bar{u}(t)$ п.в. на T , то пара $(\bar{x}, \bar{u})$ — экстремаль Понтрягина в задаче (P_s) с котраекторией $\bar{\psi}$;*
- (б) *более общо, если $\bar{x}$ — кривая Эйлера (конструктивное движение), соответствующая селектору $\bar{v} \in \mathcal{V}_{\bar{\psi}}$, то $\bar{x}$ — траектория понтрягинской экстремали в овыпукленной задаче (со P_s) в паре с некоторым обобщенным управлением $\bar{\mu}_t$ и котраекторией $\bar{\psi}$.*

Эта лемма существенно обобщает лемму 1.3.1 из [7].

Важнейшей особенностью F-ПМ является его неотрывная связь с методом решения задачи итерациями позиционного спуска, венцом которых он и является. F-ПМ в полном объеме включает в себя технологию позиционных итераций, и собственно основным способом ее реализации посвящена данная статья.

3. Методы выхода из «ловушек застревания». Начнем со следующего определения, которое лишь на первый взгляд далеко от технологии спуска.

Определение 1. Программное управление $u(\cdot) \in \mathcal{U} := L_\infty(T, U)$ назовем совместимым с траекторией $\bar{x}$, если оно генерирует $\bar{x}$, т.е. система (1) при $u = u(\cdot)$ имеет решение $\bar{x}$.

Обозначим через $\mathcal{U}(\bar{x})$ множество всех управлений, программно совместимых с $\bar{x}$, а через $\Sigma(\bar{x})$ — множество допустимых пар $\sigma = (\bar{x}, u)$ с различными $u \in \mathcal{U}(\bar{x})$.

Элементарное (и давно замеченное) приложение определения 1 следующее: если некоторая пара $\sigma_* \in \Sigma(\bar{x})$ не экстремальна, то она и все пары из $\Sigma(\bar{x})$ не оптимальны.

К другим, более практичным приложениям, обратимся чуть далее, а сейчас введем давно назревшее определение *позиционной экстремали*, которое без определения 1 было бы дефектным. Но предварительно обратим внимание, что теперь мы можем рассматривать сопряженную систему (7) при любом $u \in \mathcal{U}(\bar{x})$, что порождает множество соответствующих котраекторий $\Psi(\bar{x})$. Аналогично, в левой части условия минимума (9) черту над управлением можно убрать — допустимо любое $u \in \mathcal{U}(\bar{x})$.

Определение 2. Пару $(\bar{x}, \bar{u})$ (или любую пару $(\bar{x}, u) \in \Sigma(\bar{x})$) назовем позиционной экстремалью задачи (P_s) , если траектория $\bar{x}$ оптимальна в присоединенной задаче (8) хотя бы при одной $\psi \in \Psi(\bar{x})$.

Это определение очень осторожно: оно не требует перебора всех $\psi \in \Psi(\bar{x})$, что может оказаться невозможным. С другой стороны, если для некоторой пары $\sigma_* \in \Sigma(\bar{x})$ с котраекторией $\psi_* \in \Psi(\bar{x})$ F-ПМ не выполнен ($\bar{x}$ не оптимальна в ψ_* -задаче), то бракуются сразу все процессы из $\Sigma(\bar{x})$.

В технологическом плане типичная ситуация для эффективного использования понятия совместимых управлений такова. На стартовой паре $\bar{\sigma}$ экстремальное отображение $U_{\bar{\psi}}$ не имеет селекторов спуска, или же множество его неоднозначности столь «массивно», что порождает

чрезмерную неопределенность. Тогда можно перейти к другой паре $\tilde{\sigma} \in \Sigma(\bar{x})$, с которой спуск реализуем. Отметим, что, как правило, известно некоторое параметрическое семейство совместимых управлений, что предоставляет свободу выбора селекторов спуска. Хорошей иллюстрацией этого приема является пример 2.1.1 из [7] (там же можно найти и другие примеры этого плана).

Описанный способ подмены стартовой пары совместимой с ней, как и все последующие, связан с эффектом «застревания» — невозможностью спуститься с исследуемой неоптимальной траектории. Довольно простой другой способ в этом случае — переход к квазиэкстремальному отображению $U_{\psi\varepsilon}(t, x)$ из управлений ε -минимума функции H . Далее оперирование селекторами этого отображения ничем не отличается от стандартного варианта. Но в случае, если на данной паре исследуется ε -оптимальность в задаче (P_s) , то в ψ -присоединенной задаче траектория $\bar{x}$ должна быть тоже ε -оптимальной.

Следующий способ повышения эффективности F-ПМ — это *вогнутое возмущение функционала* или, кратко, антирегуляризация (термины условны). Этот метод, привлекательный своей необычностью и глубиной спуска, состоит в следующем. Фиксируется некоторый неотрицательный выпуклый функционал $\omega(\sigma, \bar{\sigma})$ со свойством $\omega[\bar{\sigma}, \bar{\sigma}] = 0$ (как правило, квадратичный) и формируется однопараметрическое возмущение

$$V_{\omega\gamma}[\sigma] = J[\sigma] - \gamma\omega[\sigma, \bar{\sigma}] \quad (10)$$

функционала J с параметром $\gamma > 0$. Рассматривается задача минимизации функционала $V_{\omega\gamma}$ на множестве Σ . Ясно, что если пара $\bar{\sigma}$ не оптимальна в задаче (P_s) , то она тем более не оптимальна в возмущенной задаче при любом $\gamma > 0$, причем глубина нарушения минимума оценивается порядком ω . Следовательно, потенциал спуска в возмущенной задаче выше, чем в исходной, и остается отследить сопровождается ли он спуском в задаче (P_s) .

Антирегуляризация лишь на первый взгляд похожа на широко известный метод регуляризации с параметром $\gamma < 0$ в (10), а в действительности является его антиподом. Целью А. Н. Тихонова, основоположника метода регуляризации (однопараметрического вариационного принципа в современной терминологии), было обеспечение единственности минимума выпуклого функционала путем возмущения квадратом нормы в гильбертовом пространстве. Популярные ныне замечательные вариационные принципы Экланда и Борвейна—Прейса в различных вариантах [11] — это глубокие обобщения идей Тихонова.

Обратимся к примерам.

Пример 1.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \quad x(-1) = 0, \quad |u| \leq 1, \\ J[x, u] &= \int_{-1}^0 u^2(t^2 + \alpha x) dt \rightarrow \min, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Это упрощенный вариант примера, предложенного А. А. Милутиным, в котором $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u}) \equiv 0$ строго удовлетворяет ПМП на полуотрезке $[-1, 0)$ при всех $\alpha > 0$, а также необходимым условиям Лежандра и Якоби. Однако сильного (и даже понтрягинского) минимума на $\bar{\sigma}$ нет при достаточно больших α — эту гипотезу подсказывает структура интегранта.

Применим метод антирегуляризации с

$$\omega[\sigma, \bar{\sigma}] = \int_{[-1, 0]} u^2(t) dt.$$

Тогда для возмущенной задачи

$$H^{\omega\gamma} = (t^2 + \alpha x - \gamma)u^2$$

является вогнутой функцией при достаточно больших $\gamma > 0$ (хватит больше $1 + \alpha$). Но тогда имеются всего два селектора: $u = \pm 1$. Очевиден выбор $u^* \equiv -1$, при котором

$$J[\sigma^*] = \frac{2 - 3\alpha}{6} < 0 = J[\bar{\sigma}],$$

если $\alpha > 2/3$. Полученное улучшение нелокально как по управлению, так и по траекториям.

Однако полученная оценка сверху значений параметра, при которых экстремаль $\bar{\sigma}$ не оптимальна, является довольно грубой. Это показали численные расчеты, проведенные независимо Т. С. Зароднюк и С. П. Сорокиным, причем этот факт особенно не удивил: антирегуляризацию «включили» без предварительного обращения к F-ПМ и какого-либо заикливания. Обратимся к F-ПМ.

Легко убедиться, что при $\bar{\psi} \equiv (0, 1)$, соответствующей $\bar{\sigma}$, экстремальное отображение $U_{\bar{\psi}}(t, x)$ таково:

$$U_{\bar{\psi}}(t, x) = \begin{cases} 0, & g(t, x) > 0, \\ \{-1, +1\}, & g(t, x) < 0, \\ [-1, 1], & g(t, x) = 0, \end{cases}$$

где $g(t, x) = t^2 + \alpha x$. Очевидно, что при любом выборе $v(t, x) \in U_{\bar{\psi}}(t, x)$ генерируется лишь исходная траектория $\bar{x} \equiv 0$. Поэтому выберем квазиэкстремальный селектор

$$v^\varepsilon(t, x) = \begin{cases} -\varepsilon, & g(t, x) > 0, \\ -1, & g(t, x) \leq 0, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ и выбор -1 во второй подобласти принудительный: он учитывает предпочтительность отрицательных значений траекторий для спуска. Селектор v^ε порождает управление $u^\varepsilon = -\varepsilon$ на отрезке времени $[-1, \tau]$, где момент переключения τ определяется из условия пересечения траектории $\{x^\varepsilon(t) = -\varepsilon(t+1), t \geq -1\}$ с параболой $g(t, x) = 0$. Тем самым полностью определяются управление $u^\varepsilon(\cdot)$, траектория $x^\varepsilon(\cdot)$ и значение функционала

$$J[\sigma^\varepsilon] = -\frac{1}{3} \varepsilon \alpha \sqrt{\varepsilon \alpha} + o(\varepsilon^2) < 0 \quad \forall \alpha > 0$$

на соответствующей паре σ^ε . Этот ответ, дискредитирующий $\bar{\sigma}$ при всех $\alpha > 0$, не улучшаем.

Пример 2.

$$\dot{x} = u_2, \quad x(0) = 0, \quad u = (u_1, u_2) \in [-1, 1]^2,$$

$$J[x, u] = \int_0^1 (x^2 + 4xu_1 + u_1^2) dt \rightarrow \min.$$

В этом примере Габасова—Кирилловой (см. [1, с. 145]) на особой классической экстремали $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u}) \equiv 0$ нет даже слабого минимума: вторая вариация принимает отрицательные значения.

Между тем наиболее сильные нелокальные квадратичные условия понтягинского минимума для особых экстремалей Понтрягина — многоточечные условия Срочно для обычных процессов (см. [9]), Варги — для обобщенных (см. [15]), а также интегральное условие — не бракуют $\bar{\sigma}$ (см. [1]).

Применим F-ПМ. Поскольку для $\bar{\sigma}$ $\bar{\psi} \equiv 0$, то отображение $U_{\bar{\psi}}(x)$ определяется из задачи

$$4xu_1 + u_1^2 \rightarrow \min, \quad u \in U.$$

Она оставляет совершенно свободным u_2 , а u_1 находится из условия стационарности как $\tilde{u}_1 = -2x$ пока оно будет допустимо в зависимости от неопределенной функции $x(t)$.

Для $\bar{x} \equiv 0$ нет совместимых управлений; поэтому, чтобы избавиться от неопределенности с выбором u_2 , применим антирегуляризацию с

$$\omega[\sigma, \bar{\sigma}] = \int_{[0,1]} u_2^2(t) dt.$$

Тогда функция $H^{\omega\gamma} = H - \gamma u_2^2$ вогнута по u_2 и имеет две точки минимума $u_2 = \pm 1$. Выбор $\tilde{u}_2 = -1$ предпочтительней в силу смешанного слагаемого в интегранте.

В итоге получим пару $\tilde{\sigma}$, для которой

$$\tilde{x}(t) = -t, \quad \tilde{u}_2 \equiv -1, \quad \tilde{u}_1 = \begin{cases} 2t, & t \in [0, 1/2), \\ +1, & t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

и стационарное значение $\tilde{u}_1$ скорректировано с учетом его допустимости лишь до $t = 1/2$, а при $t > 1/2$ — условие минимума H .

Легко подсчитать, что $J[\tilde{\sigma}] = -5/6 < 0 = J[\bar{\sigma}]$; следовательно, глобального минимума на $\tilde{\sigma}$ нет, что, конечно, грубее вывода об отсутствии слабого минимума. Но F-ПМ и антирегуляризация поддерживали реноме условий глобальной оптимальности в плане решения задачи в целом, и не только по глубине спуска с $\bar{\sigma}$: можно проверить, что $\tilde{\sigma}$ — экстремаль Понтрягина с одной точкой переключения управления.

В рассмотренных примерах финальные процессы F-ПМ не тестировались достаточными условиями оптимальности, что было бы естественно. И тому есть веские причины. В примере 1 это вырождение (особость) ПМП в конечный момент времени. В примере 2 одна компонента управления входит линейно, а другая нелинейно (квадратично). Между тем типичные достаточные условия сильного и понтрягинского минимумов для этих двух классов задач различаются, так что в примере их надо как-то комбинировать. В общем, оба примера нетривиальны с позиций достаточности.

Отметим, что к ним применимы метод бипозиционных функций и нестандартная двойственность для обобщенно-линейных и квадратичных задач (см. [1, 7]), но и этот подход не дал существенных продвижений в части достаточности.

Иной метод выхода из «ловушки застревания» описывает следующая лемма.

Лемма 2. *Предположим, что в задаче (P_s) градиент $l_x(x)$ удовлетворяет условию Липшица на $\mathbb{R}^n$. Пусть допустимые пары $(x^1, u^1), \dots, (x^k, u^k)$ равнозначны по функционалу с $\bar{\sigma}$, т.е. $J[x^1, u^1] = \dots = J[x^k, u^k] = J[\bar{x}, \bar{u}]$, и хотя бы одна из этих пар не является экстремалью Понтрягина в задаче (P_s) .*

Рассмотрим частично овыпукленную по Гамкрелидзе управляемую систему

$$\dot{x} = \alpha_1 f(t, x, u^1(t)) + \dots + \alpha_k f(t, x, u^k(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

с весовыми управлениями $\alpha_i(\cdot) \in L_\infty$. Если существуют такие $\alpha_i^(\cdot)$, что набор функций*

$$s^* = (x^*(\cdot), \alpha_i^*(\cdot), u^i(\cdot), i = \overline{1, k})$$

является экстремалью Понтрягина в задаче $(\text{co } P_s)$, то справедливо неравенство $J[s^] \leq J[\bar{\sigma}]$ (т.е. возможен спуск из $\bar{\sigma}$ по функционалу).*

Доказательство. Доказательство леммы базируется на точной формуле приращения функционала (см. [6, 7]) со свободной липшицевой функцией $\psi(t)$, удовлетворяющей лишь условию трансверсальности. Процесс наиболее глубокого спуска с пары $\bar{\sigma}$ находится минимизацией ΔJ по тройкам $\gamma = (x(\cdot), \psi(\cdot), u(\cdot))$, что приводит к условию биекстремальности искомой тройки в задаче (P_s) . Затем естественный логический переход к биекстремальности в овыпукленной задаче при уже имеющихся $u^k(\cdot)$ (это важно) завершает доказательство. $\square$

Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пример 3.

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = u^2 - x_1^2, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad |u| \leq 1,$$

$$J = \frac{1}{2}(x_2(1) - 1)^2 \rightarrow \inf.$$

Возьмем $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u}) \equiv 0$ с котраекторией $\bar{\psi} \equiv (0, -1)$ и значением функционала $J[\bar{\sigma}] = 1/2$. Тогда $H(x, \bar{\psi}, u) = x_1^2 - u^2$ и $U_{\bar{\psi}} = \{\pm 1\}$, так что $\bar{\sigma}$ не экстремальна. Два элементарных селектора отображения $U_{\bar{\psi}}$ — управления $u^1 \equiv +1$, $u^2 \equiv -1$ — генерируют траектории

$$x^1(t) = \left(t, \frac{(1-t)^2}{2} - \frac{1}{2} \right), \quad x^2(t) = \left(-t, \frac{(1-t)^2}{2} - 1 \right)$$

соответственно и пары σ^1, σ^2 . Для них $J[\sigma^1] = J[\sigma^2] = 9/8 > J[\bar{\sigma}]$, так что спуск с не оптимальной пары $\bar{\sigma}$ по элементарным селекторам оказался невозможным. Но можно применить лемму 2 к равнозначным парам σ^1, σ^2 (формально можем считать, например, что σ^1 является стартовой парой, а не $\bar{\sigma}$).

Нетрудно убедиться, что в овыпукленной системе

$$\dot{x}_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \dot{x}_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - x_1^2, \quad x(0) = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

экстремальной в расширенной задаче может быть только траектория с $x_1^*(t) \equiv 0$. Но тогда $x_2^*(t) = t$, $\alpha_1^* = \alpha_2^* = 1/2$, и $J[s^*] = 0$ на соответствующем скользящем режиме s^* , т.е. овыпуклением достигается не только спуск с $\bar{\sigma}$ и σ^i , но и абсолютный инфимум функционала.

4. Обобщение на негладкие задачи. Рассмотрим кратко, как распространяется F-ПМ на негладкую задачу (P) , приняв в качестве базового необходимого условия оптимальности принцип максимума Кашкоч—Лоясиевича (кратко, ПМКЛ) в его расширенной версии статьи [14]. Важнейшее достоинство ПМКЛ — он справедлив как для гладких задач (усиливая ПМП), так и для негладких (усиливая результаты типа Кларка).

Определение 3. Вектор-функцию $\hat{f}: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{co } f(t, x, U)$ назовем L -совместимой с траекторией $\bar{x}$, если

- (а) $\hat{f}(t, \bar{x}(t)) = \dot{\bar{x}}(t)$ почти всюду на T ;
- (б) функция $\hat{f}(t, x)$ измерима по t , липшицева по x и ограничена на ограниченных множествах.

Согласно теореме о селекторе Лоясиевича (см. [14]) для любой траектории включения $\dot{x} \in \text{co } f(t, x, U)$ функция $\hat{f}$ с указанными свойствами существует.

Используя свойства функции $\hat{f}$, введем сопряженное включение Кларка

$$\dot{\psi}(t) \in -\psi(t)\partial\hat{f}(t, \bar{x}(t)), \quad \psi(t_1) = l_x(\bar{x}(t_1)). \quad (11)$$

Тогда ПМКЛ можно сформулировать следующим образом.

Условие $M(\hat{f}, \psi)$. Если траектория $\bar{x}$ оптимальна в задаче (P) , то для любой L -совместимой с $\bar{x}$ функции $\hat{f}(t, x)$ существует такое решение ψ дифференциального включения (11), что

$$\psi(t) \cdot \dot{\bar{x}}(t) = h(t, \bar{x}(t), \psi(t)) \quad \text{почти всюду на } T.$$

Здесь $h(t, x, \psi) = \min\{H(t, x, \psi, u) \mid u \in U\}$ — нижний гамильтониан задачи.

Введем следующие обозначения:

- (i) $\mathcal{F}(\bar{x})$ — множество L -совместимых с $\bar{x}$ селекторов $\hat{f}(t, x)$;
- (ii) $\Psi(\hat{f}, \bar{x})$ — множество всех решений дифференциального включения (11) при фиксированном $\hat{f} \in \mathcal{F}(\bar{x})$;
- (iii) для $\psi \in \Psi(\hat{f}, \bar{x})$ определим функцию φ^ψ по формуле (6) и отображения $U_\psi(t, x)$, $\mathcal{V}_\psi, \mathcal{X}(v)$ аналогично разделу 2.

Тогда F-ПМ, доставляющий вариационное усиление ПМКЛ, формулируется следующим образом.

Теорема 2. Если траектория $\bar{x}$ оптимальна в задаче (P) , то для любого селектора $\hat{f} \in \mathcal{F}(\bar{x})$ существует такая функция $\psi \in \Psi(\hat{f}, \bar{x})$, что $\bar{x}$ оптимальна в ψ -присоединенной задаче (8).

Пример 4.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \quad \dot{x}_2 = u_1|x_1| + u_2, \quad x(0) = (0, 0), \\ |u_1| &\leq 1, \quad u_2 \in [-1, 0], \quad J = -x_2(1) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Пусть $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u}) \equiv 0$. Тогда $\bar{\sigma}$ — экстремаль Кларка с котраекторией $\bar{\psi} \equiv (0, -1)$ (напомним, что мы используем условие минимума H по $u \in U$ в силу граничного условия в (11)). Возьмем позиционное управление $w(x_1) = (0, \omega(x_1))$, где $\omega(x_1)$ — липшицева функция с условием $\omega(0) = 0$.

Легко видеть, что $w(x_1)$ совместимо с $\bar{x}$. Положим $\hat{f}(x) = w(x_1)$. Тогда $\hat{f} \in \mathcal{F}(\bar{x})$, и сопряженное включение (11) принимает вид

$$(\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2) \in (s\psi_1, 0), \quad \psi_1(1) = 0, \quad \psi_2(1) = -1,$$

где s — любой элемент обобщенного градиента Кларка. Очевидно, что единственным решением этого включения является $\bar{\psi}$. Следовательно, ПМКЛ для $\bar{\sigma}$ выполнен, оставляя $\bar{\sigma}$ подозрительной на оптимальность.

Однако для этой $\bar{\psi}$ множество $U_{\bar{\psi}}(x) = \{v^* = (1, 0)\}$ одноэлементно и не генерирует траекторию $\bar{x}$, т.е. она даже не допустима в $\bar{\psi}$ -присоединенной задаче. Поэтому $\bar{x}$ не удовлетворяет F-ПМ, т.е. теореме 2, и она не оптимальна. Единственный селектор v^* — это обычное управление $u^* \equiv (1, 0)$, для которого $x_1^*(t) = t$, $x_2^*(t) = t^2/2$, $J[x^*, u^*] = -1/2 < 0 = J[\bar{\sigma}]$. Нетрудно усмотреть, что σ^* — глобально оптимальный процесс.

Нетрудно привести пример гладкой задачи, в которой F-ПМ бракует экстремаль ПМКЛ, и, как следствие, экстремаль Понтрягина.

5. F-ПМ для скользящих режимов. Хотя предыдущие результаты относились к задаче (P) со стандартными управлениями $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, со скользящими режимами (или обобщенными управлениями) нам уже приходилось сталкиваться в леммах 1, 2. Но вообще-то они являются спутниками итераций позиционного спуска (основы F-ПМ), ибо конструктивные движения в общем случае являются решениями овыпукленной системы (1), (2) [8], т.е. траекториями скользящих режимов. Если итогом некоторой итерации окажется скользящий режим (что вполне возможно при невыпуклом множестве скоростей $f(t, x, U)$), то процесс спуска придется оборвать. Для его продолжения необходим F-ПМ для скользящих режимов, т.е. для овыпукленной задачи (со P).

Один из вариантов такого обобщения фактически описан в предыдущем пункте. Действительно, поскольку, согласно теореме Лоясиевича, каждая траектория скользящего режима (т.е. включения $\dot{x} \in \text{co } f(t, x, U)$) генерируется L -совместимым селектором $\hat{f}$ отображения со $f(t, x, U)$, то задачу (со P) можно ставить на множестве S пар $s = (x(t), \hat{f}(t, x), t \in T, x \in \mathbb{R}^n)$ с позиционным управлением. Тогда для оптимальности пары $\bar{s} = (\bar{x}, \hat{f})$ будет необходимо условие $M(\hat{f}, \psi)$, в формулировке которого следует заменить задачу (P) на (со P). Это будет ПМКЛ для $\bar{s}$; F-ПМ для $\bar{s}$ получим из теоремы 2 той же заменой задач.

Отметим, что при использовании данного подхода поиск селектора $\hat{f}$ для исследуемой траектории $\bar{x}$ можно вести с помощью позиционных управлений, совместимых с $\bar{x}$ (как в примере 4), или — на базе теоремы Каратеодори об овыпуклении множеств — искать в форме

$$\begin{aligned} \hat{f}(t, x) &= \sum_{i=0}^n \alpha_i(t) f(t, x, u^i(t)), \\ \alpha_i(t) &\geq 0, \quad \sum_{i=0}^n \alpha_i(t) = 1, \quad u^i(t) \in \mathcal{U}, \quad i = 0, \dots, n. \end{aligned} \tag{12}$$

Необходимо признать, что при таком описании всевозможных управлений $\hat{f}$ овыпукленной системы, которые могут быть селекторами отображения $U_{\psi}(t, x)$, придется столкнуться с существенными затруднениями: $2(n+1)$ управляющих параметров необходимо представить в форме обратной связи. Видимо поэтому более традиционен другой подход к построению позиционных управлений в задаче (со P) (смешанных стратегий), который выработан в теории дифференциальных игр (см. [8, 10]). В отличие от описания овыпукленной системы в форме (12) с управлениями-функциями (этот подход восходит к Р. В. Гамкрелидзе; см. [2, предложение 8.3]), альтернативный подход использует в качестве управлений регулярные вероятностные меры на компакте U . Пространство таких мер обозначается через $\text{grm}(U)$, но для краткости обозначим его через M . Заметим, что основные свойства этого пространства кратко изложены в [8] (см. также [2]).

Функция $\mu_t : T \rightarrow M$ называется обобщенным управлением, если она слабо измерима, т.е. функция

$$t \rightarrow \int_U g(u) d\mu_t$$

измерима при любой $g \in C(U)$. Множество M обобщенных управлений выпукло и секвенциально слабо* компактно.

Если $\mu_t \in M$, то соответствующая траектория находится как решение Каратеодори уравнения

$$\dot{x} = \langle \mu_t, f(t, x, u) \rangle := \int_U f(t, x, u) d\mu_t =: F(t, x). \quad (13)$$

Множество S пар (x, μ_t) , связанных этим уравнением с условием $x(t_0) = x_0$, состоит из скользящих режимов, т.е. допустимых пар задачи (со P).

Далее при изложении F-ПМ для смешанных стратегий будем предполагать для простоты, что рассматривается гладкая задача (со P_s), и, кроме того, опустим оперирование совместимыми стратегиями.

Начнем с ПМП для пары $\bar{s} = (\bar{x}, \bar{\mu}_t) \in S$. Определим функцию (см. (13))

$$\tilde{H}(t, x, \psi, \mu_t) = \psi \cdot F(t, x) \quad (14)$$

и котраекторию $\bar{\psi}$ как решение уравнения

$$\dot{\bar{\psi}} = -\tilde{H}_x(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}, \bar{\mu}_t), \quad \bar{\psi}(t_1) = l_x(\bar{x}(t_1)).$$

Тогда ПМП для $\bar{s}$ состоит в следующем условии минимума (см. [2, § 7.1]):

$$\tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{\mu}_t) = \min_{u \in U} H(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t), u) \quad \text{почти всюду на } T. \quad (15)$$

Заметим, что в силу равенства (14) слева стоит интеграл по множеству U ; поэтому равенство (15) означает, что почти всюду на T оптимальная мера $\bar{\mu}_t$ сосредоточена на множестве точек минимума в операции справа.

Имея котраекторию $\bar{\psi}$, введем квазилинейную мажоранту $\varphi^{\bar{\psi}}$ по формуле (6) и вектор-функцию $p^{\bar{\psi}}(t, x) = \varphi_x^{\bar{\psi}}(t, x)$. Определим множество

$$M_{\bar{\psi}}(t, x) = \operatorname{Argmin}_{m \in M} \tilde{H}(t, x, p(t, x), m),$$

где индекс « ψ » у функции $p(t, x)$ опущен. Мету $\mu_{tx} : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow M_{\bar{\psi}}(t, x)$ назовем $\bar{\psi}$ -экстремальной смешанной стратегией, если для любого $t \in T$ и любой непрерывной (скалярной или векторной) функции $g(u)$ на U функция

$$x \rightarrow \int_U g(u) d\mu_{tx}$$

измерима по Борелю. Множество таких стратегий обозначим через $M_{\bar{\psi}}$. Для любого селектора $\mu_{tx} \in M_{\bar{\psi}}$ в [8] описано построение ломаных Эйлера и их равномерных пределов — движений, соответствующих смешанной стратегии μ_{tx} . Пучок таких движений обозначим через $\mathcal{X}(\mu)$. Таким образом, возникает множество пар $(x(\cdot), \mu_{tx})$ с одной стратегией.

Теперь надлежит распространить функционал $J[\sigma]$ на такие пары, необходимые для F-ПМ. Мы сделаем это по следующему правилу:

$$J[x, \mu] = \inf_{\Pi(x)} \varliminf_{i \rightarrow \infty} J[x_{\Delta_i}, \mu_{\Delta_i}],$$

где Π — множество всех последовательностей $\{\Delta_i, x_{\Delta_i}, \mu_{\Delta_i}\}$, состоящих из разбиений Δ_i отрезка T точками дробления τ_i (диаметры разбиений $|\Delta_i| \rightarrow 0$), ломаных Эйлера $x_{\Delta_i} \rightarrow x$ в $C(T, \mathbb{R}^n)$, мер μ_{Δ_i} , которые стратегия μ_{tx} ставит в соответствие позиции $(\tau_i, x_{\Delta_i}(\tau_i))$.

Данное полунепрерывное снизу доопределение функционала на пары движение-стратегия нацелено на получение возможно меньшего его значения. В теории дифференциальных игр используется другое доопределение, нацеленное на получение гарантированной оценки качества стратегии.

Отметим, что введенные множества M , $M_{\bar{\psi}}(t, x)$, $\mathcal{M}_{\bar{\psi}}$, $\mathcal{X}(\mu)$, совершенно аналогичны по смыслу множествам U , $U_{\bar{\psi}}(t, x)$, $\mathcal{V}_{\bar{\psi}}$, $\mathcal{X}(v)$, участвующим в формулировке F-ПМ исходной задачи. Обратим также внимание, что если $\bar{s} = (\bar{x}, \bar{\mu}_t)$ — экстремаль Понтрягина в задаче $(\text{со } P_s)$, то выполняется включение $\bar{\mu}_t \in M_{\bar{\psi}}(t, \bar{x}(t))$ на T .

F-ПМ для скользящих режимов сформулируем следующим образом.

Теорема 3. Если пара $\bar{s} = (\bar{x}, \bar{\mu})$ оптимальна в задаче $(\text{со } P_s)$, то траектория $\bar{x}$ оптимальна в следующей $\bar{\psi}$ -присоединенной задаче:

$$l(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in \mathcal{X}(\mu), \quad \mu \in \mathcal{M}_{\bar{\psi}}.$$

ПМП для овыпукленной задачи следует из этой теоремы, т.е. для задачи $(\text{со } P_s)$ имеет место аналог леммы 1. Доказательство этого утверждения вполне аналогично случаю задачи (P_s) .

6. Заключение. В статье рассмотрены основные методы повышения эффективности позиционного спуска по функционалу для гладких и негладких задач оптимального управления. Эти методы, базирующиеся на использовании свойств слабо убывающих решений неравенства Гамильтона—Якоби, являются неотъемлемой частью теории позиционного принципа минимума — вариационного усиления большинства необходимых условий оптимальности типа классического принципа максимума Понтрягина.

В ближайшей перспективе наиболее важной представляется задача обобщения данных результатов на задачи с терминальными ограничениями. В этом направлении пока получены лишь первые результаты, требующие апробации и теоретического совершенствования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973.
2. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1977.
3. Дыхта В. А. Квадратичные условия минимума на выпуклом множестве и метод скользящих режимов в задаче оптимального управления // в кн.: Методы расширения задач теории управления на основе принципа расширения. — Новосибирск: Наука, 1990.
4. Дыхта В. А. Двойственные условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах, квадратичных по состоянию // Тр. Междунар. конф. «Динамика систем и процессы управления—2014», посв. 90-летию со дня рожд. акад. Н. Н. Красовского (Екатеринбург, 15-20 сентября 2014 г.). — Екатеринбург, 2011. — С. 171–178.
5. Дыхта В. А. Вариационные необходимые условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах оптимального управления // Докл. РАН. — 2015. — 462, № 6. — С. 653–656.
6. Дыхта В. А. Позиционные усиления принципа максимума и достаточные условия оптимальности // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2015. — 21, № 2. — С. 73–86.
7. Дыхта В. А., Самсонов О. Н. Неравенства Гамильтона—Якоби и вариационные условия оптимальности. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2015.
8. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Физматлит, 1974.
9. Сточко В. А. Многоточечные условия оптимальности для особых управлений // в кн.: Численные методы анализа. — Иркутск: Изд-во СЭИ СО РАН, 1976. — С. 43–50.
10. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. — М.-Ижевск: Ин-т компьютер. иссл., 2003.
11. Borwein J. M., Zhu Q. J. Techniques of Variational Analysis. — New York: Springer, 2005.
12. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. Qualitative properties of trajectories of control systems: A survey // J. Dynam. Control Syst. — 1995. — 1, № 1. — P. 1–48.
13. Dykhtha V. A. On variational necessary optimality conditions with descent feedback controls strengthening maximum principle // in: Differential Equations and Optimal Control/ Proc. Int. Conf. Dedicated to the Centenary of the Birth of Academician E. F. Mishchenko (Moscow, June 7-9, 2022). — Moscow: Steklov Mathematical Institute RAS, 2022. — P. 38–42.

14. *Kaškosz B.* Extremality, controllability, and abundant subsets of generalized control systems// J. Optim. Theory Appl. — 1999. — 101, № 1. — P. 73–108.
15. *Warga J. A.* A second order condition that strengthens Pontryagin's maximum principle// J. Differ. Equations. — 1978. — 28, № 2. — P. 284–307.

Дыхта Владимир Александрович
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
Сибирского отделения РАН, Иркутск;
Иркутский государственный университет
E-mail: dykhta@gmail.com