ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 65–70
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-65-70

УДК 517.928

ОБ АСИМПТОТИКЕ ЗАДАЧИ ГУРСА СО СТЕПЕННЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

© 2023 г. **И. В. ЗАХАРОВА**

Аннотация. В работе рассматривается задача Гурса для уравнения в частных производных, содержащего малый параметр ε в коэффициенте при старшей производной. При $\varepsilon = 0$ понижения порядка уравнения не происходит, но появляется особенность, имеющая характер степенного пограничного слоя. Построено решение сингулярно возмущенной задачи Гурса в виде формального ряда по степеням малого параметра и показан асимптотический характер построенного ряда.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение, асимптотическое интегрирование, степенной пограничный слой, задача Гурса.

ON THE ASYMPTOTICS OF THE GOURSAT PROBLEM WITH A POWER BOUNDARY LAYER

© 2023 **I. V. ZAKHAROVA**

Abstract. In this paper, we consider the Goursat problem for a partial differential equation containing a small parameter ε in the coefficient of the highest derivative. For $\varepsilon = 0$, the order of the equation does not decrease, but a singularity appears, which has the nature of a power boundary layer. A solution of the singularly perturbed Gaussian problem is constructed in the form of a formal series in powers of the small parameter. The asymptotic nature of the constructed series is proved.

Keywords and phrases: singularly perturbed differential equation, asymptotic integration, power boundary layer, Goursat problem.

AMS Subject Classification: 34E15

1. Введение. Дифференциальные уравнения с особенностями находят применение в задачах гидро- и аэродинамики. Среди таких задач отдельное место занимают задачи, в которых при $\varepsilon = 0$ порядок уравнения не понижается, но уравнение становится вырождающимся на границе области. Впервые такие уравнения были изучены английским исследователем Дж. Лайтхиллом на примере уравнения

$$(x + \varepsilon y)y' + k(x)y = h(x).$$

Трудность для асимптотического анализа вносит описание пограничного слоя, возникающего в точках задания дополнительных условий. Если в дифференциальном уравнении при старшей производной множителем является только ε, то пограничный слой описывается экспоненциальной функцией в терминах одной переменной. Когда в уравнении при старшей производной присутствует коэффициент вида $(\varepsilon + x)$, пограничный слой является степенным. Для таких задач в [4] показан способ описания пограничного слоя в терминах двух переменных. Здесь же приведены примеры смешанных задач для уравнений в частных производных, при решении которых возникает явление степенного пограничного слоя. Структура и доказательство утверждений о структуре степенного пограничного слоя содержится в [2].

2. Постановка задачи. Теорию степенного пограничного слоя [3] применим для построения асимптотического разложения решения следующей задачи Гурса:

$$(\varepsilon + z)U_{xz}(x, z, \varepsilon) + \alpha(x, z)U_x(x, z, \varepsilon) = f(x, z, \varepsilon), \tag{1}$$

$$U(x, 0, \varepsilon) = \mu(x, \varepsilon), \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \tag{2}$$

$$U(0, z, \varepsilon) = \gamma(z, \varepsilon), \quad 0 \leqslant z \leqslant b, \tag{3}$$

где ε — малый параметр,

$$f(x, z, \varepsilon) = f_0(x, z) + \varepsilon f_1(x, z) + \cdots + \varepsilon^n f_n(x, z) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

$$\gamma(z, \varepsilon) = \gamma_0(z) + \varepsilon\gamma_1(z) + \cdots + \varepsilon^n\gamma_n(z) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

$$\mu(x, \varepsilon) = \mu_0(x) + \varepsilon\mu_1(x) + \cdots + \varepsilon^n\mu_n(x) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Функции $\alpha(x, z)$, $f(x, z, \varepsilon)$ для простоты будем считать бесконечно дифференцируемыми, а $\gamma(z, \varepsilon)$, $\mu(x, \varepsilon)$ — непрерывно дифференцируемыми; $\alpha(x, 0) > 0$; $\gamma(0, \varepsilon) = \mu(0, \varepsilon)$.

3. Алгоритм построения асимптотики задачи. Для уравнения (1) введём обозначение

$$U_x(x, z, \varepsilon) = y(x, z, \varepsilon).$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$(\varepsilon + z)y'_z(x, z, \varepsilon) + \alpha(x, z)y(x, z, \varepsilon) = f(x, z, \varepsilon), \tag{4}$$

$$y(x, 0, \varepsilon) = 0, \tag{5}$$

где $\alpha(x, 0) > 0$. Следуя работе [4], решение задачи (4),(5) будем искать как сумму двух функций:

$$y(x, z, t, \varepsilon) = w(x, z, \varepsilon) + g(x, z, t, \varepsilon), \quad t = \frac{z}{\varepsilon}. \tag{6}$$

Регулярную часть решения $w(x, z, \varepsilon)$ представим рядом

$$w(x, z, \varepsilon) = w_0(x, z) + \varepsilon w_1(x, z) + \cdots + \varepsilon^n w_n(x, z) + O(\varepsilon^{n+1}). \tag{7}$$

Степенной пограничный слой $g(x, z, t, \varepsilon)$ будем строить в виде произведения двух функций:

$$g(x, z, t, \varepsilon) = v(x, z, \varepsilon)\bar{v}(x, t, \varepsilon),$$

где

$$v(x, z, \varepsilon) = v_0(x, z) + \varepsilon v_1(x, z) + \cdots + \varepsilon^n v_n(x, z) + O(\varepsilon^{n+1}), \tag{8}$$

$$\bar{v}(x, t, \varepsilon) = \bar{v}_0(x, t) + \varepsilon\bar{v}_1(x, t) + \cdots + \varepsilon^n\bar{v}_n(x, t) + O(\varepsilon^{n+1}). \tag{9}$$

Тогда

$$g(x, z, t, \varepsilon) = g_0(x, z, t) + \varepsilon g_1(x, z, t) + \cdots + \varepsilon^n g_n(x, z, t) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

где

$$g_0(x, z, t) = v_0(x, z)\bar{v}_0(x, t),$$

$$g_1(x, z, t) = v_1(x, z)\bar{v}_0(x, t) + v_0(x, z)\bar{v}_1(x, t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$g_k(x, z, t) = \sum_{i=0}^{k} v_{k-i}(x, z)\bar{v}_i(x, t).$$

Подставляя разложение (7) в уравнение (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим уравнения для определения функций $w_i(x, z)$:

$$z\frac{dw_i(x, z)}{dz} + \alpha(x, z)w_i(x, z) = h_i(x, z),$$

где

$$h_0(x, z) = f_0(x, z), \quad h_i(x, z) = f_i(x, z) - \frac{dw_{i-1}(x, z)}{dz}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots.$$

Предполагая, что для всех $w_i(x, z)$ выполняется условие

$$|w_i(x, 0)| < \infty,$$

найдём:

$$w_i(x,z) = z^{-\alpha(x,0)} \int\limits_0^z \zeta^{\alpha(x,0)-1} h_i(x,\zeta)\varphi(x,\zeta,z)d\zeta.$$

Полученная таким образом функция $w(x,z,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (4) с точностью до слагаемых, содержащих ε^{n+1}.

Пограничный слой будем искать как решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (4). Оно имеет следующий вид:

$$(\varepsilon+z)v'_z(x,z,\varepsilon)\bar{v}(x,t,\varepsilon) + \frac{\varepsilon+z}{\varepsilon}v(x,z,\varepsilon)\bar{v}_t(x,t,\varepsilon) + \alpha(x,z)v(x,z,\varepsilon)\bar{v}(x,t,\varepsilon) = 0.$$

Преобразовав последнее равенство, получим уравнения для определения функций $v(x,z,\varepsilon)$ и $\bar{v}(x,t,\varepsilon)$:

$$(\varepsilon+z)v_z(x,z,\varepsilon) + (\alpha(x,z)-\alpha(x,-\varepsilon))v(x,z,\varepsilon) = 0, \tag{10}$$

$$(1+t)\bar{v}_t(x,t,\varepsilon) + \alpha(x,-\varepsilon)\bar{v}(x,t,\varepsilon) = 0, \tag{11}$$

где

$$\alpha(x,-\varepsilon) = \alpha(x,0) - \alpha_1(x,0)\varepsilon + \alpha_2(x,0)\varepsilon^2 + \dots .$$

Подставим в уравнения (10), (11) соответственно выражения (8), (9) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим уравнения для определения функций $v_i(x,z)$ и $\bar{v}_i(x,t)$:

$$z\frac{dv_i(x,z)}{dz} + (\alpha(x,z)-\alpha(x,0))v_i(x,z) = p_i(x,z), \tag{12}$$

$$p_0(x,z) = 0, \quad p_i(x,z) = -\frac{dv_{i-1}(x,z)}{dz} + \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j}\alpha_{i-j}(x,0)v_j(x,z), \quad i = 1,2,3,\dots,$$

$$(1+t)\frac{\bar{v}_i(x,t)}{dt} + \alpha(x,0)\bar{v}_i(x,t) = g_i(x,t), \tag{13}$$

$$g_0(x,t) = 0, \quad g_i(x,t) = \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j-1}\alpha_{i-j}(x,0)\bar{v}_j(x,t), \quad i = 1,2,3,\dots .$$

Функции $v_i(x,z)$ определим из условий

$$v_i(x,0) = 1, \tag{14}$$

а функции $\bar{v}_i(x,t)$ — из условий

$$w_0(x,0) + \bar{v}_0(x,0) = \dot{\mu}_0(x), \quad w_1(x,0) + \bar{v}_0(x,0) + \bar{v}_1(x,0) = \dot{\mu}_1(x), \quad \dots . \tag{15}$$

Интегрируя уравнения (12) при условиях (14), получим выражения для функций $v_i(x,z)$:

$$v_i(x,z) = \int\limits_0^z H_i(x,\zeta)\varphi(x,0,\zeta)d\zeta + \varphi(x,0,z),$$

где $H_i(x,\zeta)$ — известные функции.

Интегрируя уравнения (13) с учётом соответствующих условий (15), получим выражения для функций $\bar{v}_i(x,t)$. Например, при $i=0$ получим

$$\bar{v}_0(x,t) = (\dot{\mu}_0(x) - w_0(x,0))(1+t)^{-\alpha(x,0)}.$$

Таким образом, решение (6) можно представить в виде

$$y(x,z,t,\varepsilon) = w_n(x,z,\varepsilon) + g_n(x,z,t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Возвращаясь к функции $U(x,z,\varepsilon)$ с учётом обозначения $U_x(x,z,\varepsilon) = y(x,z,\varepsilon)$ и условия (2), получим

$$U(x,z,\varepsilon) = \int\limits_0^x y(\xi,z,t,\varepsilon)d\xi + \gamma(z,\varepsilon).$$

В частности, нулевое приближение имеет вид

$$U(x,z,\varepsilon) \sim u_0(x,z) = \bar{U}(x,z) + \int\limits_0^x \frac{\dot{\mu}_0(\xi) - w_0(\xi,0)}{(1+t)^{\alpha(\xi,0)}} \varphi(\xi,0,z)d\xi + \gamma_0(z). \tag{16}$$

В последнем выражении функция $\bar{U}(x,z)$ является решением предельного вырождающегося уравнения, которое получается из уравнения (1) при $\varepsilon = 0$:

$$z\bar{U}_{xz}(x,z) + \alpha(x,z)\bar{U}_x(x,z) = f_0(x,z), \tag{17}$$

где $\bar{U}(x,z) = U(x,z,0)$, причём

$$\dot{U}_x(x,0) = \frac{f_0(x,0)}{\alpha(x,0)} \neq \dot{\mu}_0(x).$$

При переходе от допредельной задачи к предельной мы теряем одно условие.

Решение предельного уравнения при условии $\bar{U}(0,z) = \gamma_0(z)$ имеет вид

$$\bar{U}(x,z) = \int\limits_0^x z^{\alpha(\zeta,0)} \int\limits_0^z f_0(\xi,\zeta)\varphi(x,\zeta,z)\zeta^{\alpha(\zeta,0)-1}d\zeta d\xi,$$

где

$$\varphi(x,\zeta,z) = \exp\left(-\int\limits_\zeta^z \frac{\alpha(x,\zeta_1) - \alpha(x,0)}{\zeta_1} d\zeta_1 \right).$$

4. Оценка остаточного члена. Для начала проведём рассуждения для случая $n = 0$.

Рассмотрим нулевое приближение к решению задачи (4), (5):

$$y(x,z,\varepsilon) = w_0(x,z) + v_0(x,z)\bar{v}_0(x,t).$$

Тогда её решение можно представить в виде

$$y(x,z,\varepsilon) = w_0(x,z) + v_0(x,z)\bar{v}_0(x,t) + \varepsilon R_1(x,z,\varepsilon). \tag{18}$$

Найдём уравнение, которому удовлетворяет $R_1(x,z,\varepsilon)$. Прежде заметим, что имеют место равенства

$$(\varepsilon + z)\frac{dg_0(x,z,t)}{dz} + \alpha(x,z)g_0(x,z,t) = \varepsilon \frac{dv_0(x,z)}{dz}\bar{v}_0(x,t),$$
$$(\varepsilon + z)\frac{dw_0(x,z)}{dz} + \alpha(x,z)w_0(x,z) = \varepsilon \frac{dw_0(x,z)}{dz}.$$

Подставляя выражение (18) в уравнение (4) и условие (5), с учётом последних равенств получим:

$$(\varepsilon + z)\frac{dR_1(x,z,\varepsilon)}{dz} + \alpha(x,z)R_1(x,z,\varepsilon) = \alpha_1(x,z,t,\varepsilon), \tag{19}$$

где

$$\alpha_1(x,z,t,\varepsilon) = \frac{f(x,z,\varepsilon) - f_0(x,z)}{\varepsilon} - \frac{dw_0(x,z)}{dz} - \frac{dv_0(x,z)}{dz}\bar{v}_0(x,t), \quad R_1(x,0,\varepsilon) = 0.$$

Сведём дифференциальное уравнение (19) к интегральному:

$$R_1(x,z,\varepsilon) = \varepsilon \int\limits_0^z M(x,z,\zeta,\varepsilon)R_1(x,\zeta,\varepsilon)d\zeta + b_1(x,z,\varepsilon).$$

Проводя аналогичные рассуждения для $n = 1$, получим следующие равенства:

$$(\varepsilon + z)\frac{d(w_0(x,z) + \varepsilon w_1(x,z))}{dz} + \alpha(x,z)(w_0(x,z) + \varepsilon w_1(x,z)) = \varepsilon^2 \frac{dw_1(x,z)}{dz},$$
$$(\varepsilon + z)\frac{dg_1(x,z,t)}{dz} + \alpha(x,z)g_1(x,z,t) = \frac{dv_0(x,z)}{dz}\bar{v}_1(x,t) + \frac{dv_1(x,z)}{dz}\bar{v}_0(x,t).$$

С учётом последних выражений задача для определения $R_2(x,z,\varepsilon)$ будет иметь вид

$$(\varepsilon+z)\frac{dR_2(x,z,\varepsilon)}{dz}+\alpha(x,z)R_2(x,z,\varepsilon)=\alpha_2(x,z,t,\varepsilon), \quad R_2(x,0,\varepsilon)=0,$$

где

$$\alpha_2(x,z,t,\varepsilon)=\frac{f(x,z,\varepsilon)-f_0(x,z)-\varepsilon f_1(x,z)}{\varepsilon^2}-\frac{dw_1(x,z)}{dz}-\frac{dv_0(x,z)}{dz}\bar{v}_1(x,t)-\frac{dv_1(x,z)}{dz}\bar{v}_0(x,t).$$

Переходя к интегральному уравнению, получим:

$$R_2(x,z,\varepsilon)=\varepsilon\int\limits_0^z M(x,z,\zeta,\varepsilon)R_2(x,\zeta,\varepsilon)d\zeta+b_2(x,z,\varepsilon),$$

где $M(x,z,\zeta,\varepsilon)$, $b_1(x,z,\varepsilon)$, $b_2(x,z,\varepsilon)$ — известные функции.

Обозначим остаточный член решения задачи (4), (5) через $\varepsilon^{n+1}R_{n+1}(x,z,t,\varepsilon)$. Тогда для любого n уравнение для определения $R_{n+1}(x,z,t,\varepsilon)$ будет иметь вид

$$(\varepsilon+z)\frac{dR_{n+1}(x,z,t,\varepsilon)}{dz}+\alpha(x,z)R_{n+1}(x,z,t,\varepsilon)=c_{n+1}(x,z,t,\varepsilon) \tag{20}$$

с условием

$$R_{n+1}(x,0,\varepsilon)=0,$$

где

$$c_{n+1}(x,z,t,\varepsilon)=\frac{f(x,z,\varepsilon)-\sum\limits_{i=0}^{n}\varepsilon^i f_i(x,z)}{\varepsilon^{n+1}}-\frac{dw_n(x,z)}{dz}-\sum_{j=0}^{n}\frac{dv_j(x,z)}{dz}\bar{v}_{n-j}(x,t).$$

Уравнение (20) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, в котором x является параметром:

$$R_{n+1}(x,z,\varepsilon)=\varepsilon\int\limits_0^z M(x,z,\zeta,\varepsilon)R_{n+1}(x,\zeta,\varepsilon)d\zeta+b_{n+1}(x,z,\varepsilon),$$

где

$$M(x,z,\zeta,\varepsilon)=\frac{1}{1+\varepsilon}z^{-\alpha(x,0)}\alpha(x,0)\zeta^{\alpha(x,0)-1},$$

$$b_{n+1}(x,z,\varepsilon)=-\frac{1}{1+\varepsilon}z^{-\alpha(x,0)}\int\limits_0^z \alpha_{n+1}(x,\zeta,\varepsilon)\varphi(x,\zeta,z)\zeta^{\alpha(x,0)}d\zeta.$$

Интегрируя $R_{n+1}(x,z,\varepsilon)$ по x, получим выражение для остаточного члена задачи (1)–(3).

5. Применение метода регуляризации для построения асимптотики задачи Гурса. Многие методы построения асимптотических решений сингулярно возмущенных задач нашли широкое приложение в практике. Каждый из них позволяет решать определённый круг задач. Однако у всех этих методов есть общее свойство: асимптотическое, равномерно пригодное во всей рассматриваемой области решение является составным. Полученное выше решение задачи (1)–(3) также является составным, т.е. каждый член асимптотики является суммой двух слагаемых, описывающих отдельно зону пограничного слоя и зону вне его.

В настоящее время разработан метод построения решений сингулярно возмущенных задач — метод регуляризации (см. [5]), который позволяет записать решение сингулярно возмущённой задачи без отдельного описания области пограничного слоя. При этом пограничные эффекты описываются дополнительными независимыми переменными, вводимыми по спектру некоторого оператора.

В [1] на примере задачи Гурса показано применение идеи метода регуляризации к построению асимптотики решений малоизученного класса задач со степенным погранслоем.

Для уравнения (4) вводится регуляризирующая функция по формуле:

$$\tau = -\int\limits_0^z \frac{\alpha(x,s)}{\varepsilon+s}\,ds \equiv g(x,z,\varepsilon). \tag{21}$$

Далее ищется решение расширенной задачи

$$(\varepsilon+z)\frac{\partial\tilde{y}(x,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z}+\frac{\partial\tilde{y}(x,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+\alpha(x,z)\tilde{y}(x,z,\tau,\varepsilon)=f(x,z,\varepsilon),\quad \tilde{y}(x,0,0,\varepsilon)=\dot{\mu}(x,\varepsilon)$$

в виде ряда классической теории возмущений:

$$\tilde{y}(x,z,\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\tilde{y}_i(x,z,\tau).$$

Рекуррентные соотношения для определения коэффициентов ряда имеют вид:

$$z\frac{\partial\tilde{y}_0}{\partial z}-\alpha(x,z)\frac{\partial\tilde{y}_0}{\partial\tau}+\alpha(x,z)\tilde{y}_0=f_0(x,z), \tag{22}$$

$$\tilde{y}_0(x,0,0)=\dot{\mu}_0(x), \tag{23}$$

$$z\frac{\partial\tilde{y}_i}{\partial z}-\alpha(x,z)\frac{\partial\tilde{y}_i}{\partial\tau}+\alpha(x,z)\tilde{y}_i=f_i(x,z)-\frac{\partial\tilde{y}_{i-1}}{\partial z}, \tag{24}$$

$$\tilde{y}_i(x,0,0)=\dot{\mu}_i(x). \tag{25}$$

Решение задач (22)–(25) строится в пространстве безрезонансных решений, описанном в [5]. Так, решение задачи (22)–(23) имеет вид

$$\tilde{y}_0(x,z,\tau)=z^{-\alpha(x,0)}\varphi(x,0,z)\int\limits_0^z f_0(x,\xi)\varphi(x,\xi,0)\xi^{a(x,0)-1}d\xi+\dot{\mu}_0(x)e^{\tau}.$$

С учётом обозначения $U_x(x,z,\varepsilon)=y(x,z,\varepsilon)$ и формулы (21) для главного члена асимптотики задачи (1)–(3) получено выражение

$$U_0(x,z)=\int\limits_0^x z^{-\alpha(\zeta,0)}\varphi(\zeta,0,z)\int\limits_0^z f_0(\zeta,\xi)\varphi(\zeta,\xi,0)\xi^{a(\zeta,0)-1}\,d\xi\,d\zeta+$$
$$+\int\limits_0^x\dot{\mu}_0(\zeta)\exp\left(-\int\limits_0^z\frac{a(\zeta,s)}{\varepsilon+s}d\,s\right)d\,\zeta+\gamma_0(z).$$

Сравнивая последнее равенство с равенством (16), приходим к выводу, что, полученные разными методами, они отличаются только вторыми слагаемыми. Слагаемые, отвечающие за регулярную часть решения, полностью совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Захарова И. В.* Построение асимптотических решений некоторых вырождающихся дифференциальных уравнений с малым параметром// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *212*. — С. 50–56.
2. *Ломов С. А., Ломов И. С.* Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во МГУ, 2011.
3. *Ломов С. А.* Степенной пограничный слой в задачах с сингулярным возмущением// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1966. — *30*, № 3. — С. 525–572.
4. *Ломов С. А.* Степенной пограничный слой в задачах с малым параметром// Докл. АН СССР. — 1963. — *148*, № 3. — С. 516–519.
5. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.

Захарова Ирина Валентиновна
Иркутский государственный университет
E-mail: `zair@math.isu.ru`