ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 80–88
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-80-88

УДК 517.957

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ С НУЛЕВЫМ ФРОНТОМ ЭВОЛЮЦИОННОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2023 г. **А. Л. КАЗАКОВ, П. А. КУЗНЕЦОВ, Л. Ф. СПЕВАК**

Аннотация. В работе представлена теорема существования и единственности нетривиального аналитического решения задачи с заданным нулевым фронтом для нелинейной эволюционной параболической системы «хищник-жертва». В частных случаях построены точные решения посредством редукции к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, наследующей все особенности исходной постановки. Для численного решения рассмотренной задачи предложен алгоритм, основанный на методе частных решений. Выполнен вычислительный эксперимент.

Ключевые слова: нелинейная параболическая система, теорема существования, точное решение, метод частных решений, вычислительный эксперимент.

ON SOME ZERO-FRONT SOLUTIONS OF AN EVOLUTION PARABOLIC SYSTEM

© 2023 **A. L. KAZAKOV, P. A. KUZNETSOV, L. F. SPEVAK**

Abstract. We present an existence and uniqueness theorem for a nontrivial analytical zero-front solution of a problem for a nonlinear evolution parabolic predator-prey system. In special cases, we construct exact solutions by reduction to the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations, which inherits all features of the original problem. We propose an algorithm for the numerical solution of the problem based on the method of specific solutions and present the result of computational experiments.

Keywords and phrases: nonlinear parabolic system, existence theorem, exact solution, particular solutions method, computational experiment.

AMS Subject Classification: 35K40, 35K57

1. Введение. Рассматривается нелинейная эволюционная параболическая система следующего вида (см. [10]):

$$u_t = \alpha_1 u_x + \alpha_2 u v_{xx} + \alpha_3 v_x u_x + f(u,v), \quad v_t = \beta_1 v_x + \beta_2 v u_{xx} + \beta_3 u_x v_x + g(v,u). \tag{1}$$

Здесь $u(t,x)$, $v(t,x)$ — искомые функции; t, x — независимые переменные; α_i, β_i, $i = 1, 2, 3,$ — произвольные константы; $f(u,v)$, $g(v,u)$ — известные функции, которые предполагаются достаточно гладкими. Также потребуем, чтобы выполнялось равенство $f(0,0) = g(0,0) = 0$, что обеспечивает существование у системы (1) тривиального решения $u = 0$, $v = 0$. Система (1) является обобщением системы «хищник-жертва», использующейся в математической биологии для описания популяционной динамики двух взаимодействующих видов — хищников v и жертв u (см. [20]).

Результаты получены в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа» (проект № 121041300058-1).

Для системы (1) представляют интерес (см. [20, с. 10]) решения с нулевыми фронтами, удовлетворяющие условию

$$u(t,x)\big|_{x=a(t)} = 0, \quad v(t,x)\big|_{x=b(t)} = 0. \tag{2}$$

Фронт для каждой неизвестной функции отождествляется с границей ареала соответствующей популяции, который, как известно, способен меняться в связи с миграцией (см. [3]), вызванной в данном случае взаимодействиями типа «хищник-жертва». Естественно предполагать, что при приближении к фронту численность животных постепенно снижается до нуля, тем самым непрерывно стыкуясь с нулевым фоном (тривиальным решением). Подобные решения нелинейных параболических уравнений обычно именуются (в зависимости от интерпретации) тепловыми (см. [4, 11]), фильтрационными (см. [12]) или диффузионными (см. [18]) волнами. Ранее такого рода математические конструкции рассматривались для задач механики сплошных сред [1]. Между тем, параболические уравнения и системы в последнее время стали широко применяться в математической биологии (см. [13, 22]).

Ранее авторами были начаты работы по построению решений с нулевым фронтом для нелинейной параболической системы «хищник-жертва» (см. [9]). Настоящая работа является их непосредственным продолжением. Помимо теоремы существования и единственности, являющейся обобщением ранее доказанной, построены новые точные решения рассматриваемого типа, предложен вычислительный алгоритм, позволяющий с достаточной точностью решать задачу (1), (2), а также задачу для системы ОДУ, к которой сводится построение точных решений. Алгоритм основан на методе частных решений (см. [16]) и методе двойственной взаимности (см. [21]). Выполнен вычислительный эксперимент, который показал эффективность предложенного алгоритмического подхода. Численное исследование рассмотренной задачи проводится впервые.

2. Теорема существования. Для задачи (1), (2) в общей постановке получить аналитические результаты пока не удается, поскольку метод характеристических рядов (см. [15]) для раскрытия особенности здесь, к сожалению, оказался неприменим. Поэтому рассмотрим случай, когда нулевые фронты для искомых функций совпадают. Пусть $a(t) = b(t)$ и краевые условия имеют вид

$$u(t,x)\big|_{x=a(t)} = v(t,x)\big|_{x=a(t)} = 0. \tag{3}$$

Для задачи (1), (3) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в задаче* (1), (3) *функции* $f(u,v)$, $g(v,u)$ *и* $a(t)$ *аналитичны в окрестностях точек* $u = v = 0$ *и* $t = 0$ *соответственно, причем* $f(0,0) = g(0,0) = 0$. *Пусть также выполняются следующие ограничения*:

(i) $u_x(t,a(t)) \not\equiv 0$, $v_x(t,a(t)) \not\equiv 0$;

(ii) $\alpha_1 + a'(0) \neq 0$, $\beta_1 + a'(0) \neq 0$;

(iii) *числа* $(-\alpha_3)/\alpha_2$ *и* $(-\beta_3)/\beta_2$ *не являются натуральными*; *кроме того,* $\alpha_{2,3} \neq 0$, $\beta_{2,3} \neq 0$.

Тогда задача (1), (3) *имеет единственное нетривиальное решение, аналитическое в окрестности точки* $(0, a(0))$.

Доказательство. Поскольку аналогичные теоремы ранее неоднократно встречались в работах авторов [6, 18] (см. также [2]) и, более того, для частного случая подробное обоснование теоремы было недавно опубликовано (см. [9]), доказательство здесь излагается кратко.

Для удобства введем новую переменную $z = x - a(t)$. Задача (1), (3) примет вид

$$\begin{aligned} u_t &= (\alpha_1 + a')u_z + \alpha_2 u v_{zz} + \alpha_3 v_z u_z + f(u,v), \\ v_t &= (\beta_1 + a')v_z + \beta_2 v u_{zz} + \beta_3 u_z v_z + g(v,u), \end{aligned} \tag{4}$$

$$u(t,z)\big|_{z=0} = v(t,z)\big|_{z=0} = 0. \tag{5}$$

Решение построим в виде рядов Тейлора

$$u(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\frac{z^n}{n!}, \quad u_n(t) = \frac{\partial^n u}{\partial z^n}\Big|_{z=0}; \quad v(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)\frac{z^n}{n!}, \quad v_n(t) = \frac{\partial^n v}{\partial z^n}\Big|_{z=0}. \tag{6}$$

Определим коэффициенты. Из краевого условия (5) следуют равенства $u_0 = v_0 = 0$. Учитывая их, положим $z = 0$ в системе (4). Получим систему

$$(\alpha_1 + a')u_1 + \alpha_3 v_1 u_1 = 0, \quad (\beta_1 + a')v_1 + \beta_3 u_1 v_1 = 0. \tag{7}$$

По условию (i) теоремы 1 справедливы неравенства $u_1 \not\equiv 0$, $v_1 \not\equiv 0$. Отсюда, разрешая (7), получим формулы

$$v_1 = -\frac{\alpha_1 + a'}{\alpha_3}, \quad u_1 = -\frac{\beta_1 + a'}{\beta_3}. \tag{8}$$

Отметим, что из системы (7) и условия (ii) теоремы 1 также следует, что $u_1 \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $v_1 \equiv 0$. Пользуясь алгоритмом, предложенным ниже, несложно показать, что случай $u_1 \equiv 0$, $v_1 \equiv 0$ приводит к тривиальному решению задачи.

Продифференцировав систему (4) один раз по z и положив $z = 0$, получим коэффициенты

$$v_2 = \frac{u_1' - f_1}{u_1(\alpha_2 + \alpha_3)} = \frac{a'' + \beta_3 f_1}{(\beta_1 + a')(\alpha_2 + \alpha_3)}, \quad u_2 = \frac{v_1' - g_1}{v_1(\beta_2 + \beta_3)} = \frac{a'' + \alpha_3 g_1}{(\alpha_1 + a')(\beta_2 + \beta_3)}. \tag{9}$$

Здесь и далее для удобства будем использовать обозначения

$$f_n = \frac{\partial^n f}{\partial z^n}\Big|_{z=0}, \quad g_n = \frac{\partial^n g}{\partial z^n}\Big|_{z=0}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что в [9] функции f и g имеют вполне определенный вид, соответствующий обобщенной модели Лотки—Вольтерра, и обладают всеми указанными в условии доказываемой теоремы свойствами.

Остальные коэффициенты определяются аналогично — дифференцированием по z. Применяя к первому уравнению системы (4) оператор $\partial^n[\cdot]/\partial z^n\big|_{z=0}$, $n = 2, 3, \ldots$, получим равенство

$$u_n' = (\alpha_1 + a')u_{n+1} + \alpha_2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k v_{n+2-k} + \alpha_3 \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_{k+1} v_{n+1-k} + f_n. \tag{10}$$

Выделим в (10) коэффициенты с индексом $n + 1$:

$$u_n' = (\alpha_1 + a')u_{n+1} + \alpha_2 n u_1 v_{n+1} + \alpha_2 \sum_{k=2}^{n} C_n^k u_k v_{n+2-k} + \alpha_3 u_1 v_{n+1} + \alpha_3 u_{n+1} v_1 + \alpha_3 \sum_{k=2}^{n} C_n^{k-1} u_k v_{n+2-k} + f_n.$$

Приводя подобные слагаемые $(\alpha_1 + a')u_{n+1}$ и $\alpha_3 u_{n+1} v_1$, выразим коэффициент v_{n+1}:

$$v_{n+1} = \frac{\beta_3}{(\beta_1 + a')(\alpha_2 n + \alpha_3)} \left[\sum_{k=2}^{n} \left(\alpha_2 C_n^k + \alpha_3 C_n^{k-1}\right) u_k v_{n+2-k} + f_n - u_n' \right], \quad n \geqslant 2. \tag{11}$$

Аналогично находим коэффициент u_{n+1}:

$$u_{n+1} = \frac{\alpha_3}{(\alpha_1 + a')(\beta_2 n + \beta_3)} \left[\sum_{k=2}^{n} \left(\beta_2 C_n^k + \beta_3 C_n^{k-1}\right) v_k u_{n+2-k} + g_n - v_n' \right], \quad n \geqslant 2. \tag{12}$$

Видно, что аналитичность коэффициентов возможна лишь при выполнении неравенств

$$\beta_1 + a'(0) \neq 0, \quad \alpha_1 + a'(0) \neq 0, \quad \alpha_2 n + \alpha_3 \neq 0, \quad \beta_2 n + \beta_3 \neq 0.$$

Первые два из этих неравенств те же, что и в условии (ii). Так как n может быть любым натуральным числом, то третье и четвертое неравенства, которые в [9] выполняются a priori, можно записать в виде $-\alpha_3/\alpha_2 \notin \mathbb{N}$, $-\beta_3/\beta_2 \notin \mathbb{N}$, что соответствует условию (iii).

Таким образом, коэффициенты рядов (6) определяются однозначно по рекуррентным формулам $u_0 = v_0 = 0$, (8), (9), (11), (12). При этом они являются аналитическими функциями в окрестности точки $t = 0$.

Сходимость доказывается методом мажорант по следующей схеме в три этапа. Осветим их кратко. На первом этапе в задаче (4), (5) делается замена

$$u = u_1 z + z^2 U(t, z), \quad v = v_1 z + z^2 V(t, z),$$

представляющая собой частичное разложение искомых функций в ряды Тейлора (6). Теперь U и V — новые неизвестные функции. Задача сведется к системе

$$\begin{aligned} &4V + 5zV_z + z^2V_{zz} = p_0(t) + zp_1(t,U,V,U_t) + z^2p_2(t,U,V,U_z,V_z) + z^3p_3(z,t,U,V,U_z,V_z,V_{zz}),\\ &4U + 5zU_z + z^2U_{zz} = q_0(t) + zq_1(t,V,U,V_t) + z^2q_2(t,V,U,V_z,U_z) + z^3q_3(z,t,V,U,V_z,U_z,U_{zz}). \end{aligned} \tag{13}$$

Вид функций p_i, q_i, $i = 0,1,2,3$, не приводится в силу крайней громоздкости, отметим лишь, что все они будут аналитическими по своим переменным в окрестности начала координат. Отсюда следует, что для них можно подобрать мажоранты.

На втором этапе доказывается, что при выполнении мажорантных оценок

$$\begin{gathered} U\big|_{z=0} \ll W_0(t), \quad V\big|_{z=0} \ll W_0(t), \qquad U_z\big|_{z=0} \ll W_1(t), \quad V_z\big|_{z=0} \ll W_1(t),\\ p_0(t),\ q_0(t) \ll \psi_0(t), \quad p_1,\ q_1 \ll \psi_1(t,W,W,W_t), \quad p_2,\ q_2 \ll \psi_2(t,W,W,W_z,W_z),\\ p_3,\ q_3 \ll \psi_3(z,t,W,W,W_z,W_z,W_{zz}) \end{gathered}$$

решение задачи

$$W_{zz} = \frac{\partial\psi_1(t,W,W,W_t)}{\partial z} + \psi_2(t,W,W,W_z,W_z) + z\psi_3(z,t,W,W,W_z,W_z,W_{zz}), \tag{14}$$

$$W(t,z)\big|_{z=0} = W_0(t), \quad W_z(t,z)\big|_{z=0} = W_1(t) \tag{15}$$

мажорирует решение системы (13). В этом можно убедиться, построив эти решения в виде рядов Тейлора

$$\begin{gathered} U(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n\frac{z^n}{n!}, \quad V(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n\frac{z^n}{n!}, \quad W(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n\frac{z^n}{n!},\\ U_n(t) = \frac{\partial^n U}{\partial z^n}\Big|_{z=0}, \quad V_n(t) = \frac{\partial^n V}{\partial z^n}\Big|_{z=0}, \quad W_n(t) = \frac{\partial^n W}{\partial z^n}\Big|_{z=0}. \end{gathered}$$

На третьем этапе мы приводим задачу (14), (15) к типу Ковалевской, дифференцируя уравнение (14) по z, разрешая его относительно W_{zzz} и добавляя третье краевое условие $W_{zz}(t,0) = W_2(t)$. Все входные данные аналитичны; следовательно, согласно теореме Коши—Ковалевской, полученная задача имеет единственное аналитическое решение. Теорема доказана. □

3. Точные решения. В этом разделе получим некоторые точные решения уравнения (1) с нулевым фронтом. Их построение сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка.

Конкретизируем вид системы (1). Пусть

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0; \quad \alpha_2,\alpha_3,\beta_2,\beta_3 \neq 0; \quad f(u,v) = Av^{\gamma-\xi}u^{\xi}, \quad g(v,u) = Bu^{\gamma-\eta}v^{\eta}.$$

Здесь A, B, γ, ξ, $\eta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $0 \leqslant \xi \leqslant \gamma$, $0 \leqslant \eta \leqslant \gamma$. Тогда (1) примет вид

$$u_t = \alpha_2 u v_{xx} + \alpha_3 v_x u_x + Av^{\gamma-\xi}u^{\xi}, \quad v_t = \beta_2 v u_{xx} + \beta_3 u_x v_x + g(v,u) = Bu^{\gamma-\eta}v^{\eta}. \tag{16}$$

Следуя [5, 7], будем искать точные решения (16) при помощи анзаца

$$u = \phi(t)r(y), \quad v = \phi(t)s(y), \quad y = -\frac{z}{a(t)} = 1 - \frac{x}{a(t)}, \tag{17}$$

где $x = a(t)$ — уравнение нулевого фронта (см. (3)). Подставив выражение (17) в систему (16) и умножив на $a^2(t)/\phi^2(t)$, получим

$$\begin{aligned} &\alpha_2 r(y)s''(y) + \alpha_3 r'(y)s'(y) + \frac{a(t)}{\phi(t)}a'(t)(y-1)r'(y) + \frac{a^2(t)}{\phi^2(t)}\Big[A\phi^{\gamma}(t)s^{\gamma-\xi}(y)r^{\xi}(y) - \phi'(t)r(y)\Big] = 0,\\ &\beta_2 s(y)r''(y) + \beta_3 s'(y)r'(y) + \frac{a(t)}{\phi(t)}a'(t)(y-1)s'(y) + \frac{a^2(t)}{\phi^2(t)}\Big[B\phi^{\gamma}(t)r^{\gamma-\eta}(y)s^{\eta}(y) - \phi'(t)s(y)\Big] = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Для редукции (18) к системе ОДУ относительно $r(y)$, $s(y)$ в данном случае необходимо и достаточно выполнения следующих равенств:

$$\frac{a(t)a'(t)}{\phi(t)} = \text{const}, \quad \frac{a^2(t)\phi'(t)}{\phi^2(t)} = \text{const}, \quad \phi^{\gamma-2}(t)a^2(t) = \text{const}\,. \tag{19}$$

Пусть $\phi'(t) \neq 0$. Подставив первое уравнение (19) во второе, получим

$$\frac{a(t)a''(t)}{[a'(t)]^2} = \text{const} = C. \tag{20}$$

Здесь возможны два подслучая: $C = 1$ и $C \neq 1$.

Сначала рассмотрим случай, когда $C = 1$. Тогда решение (20) имеет вид

$$a(t) = \lambda \exp(\mu t),$$

где μ, λ — ненулевые константы. Можно убедиться, что необходимыми и достаточными условиями того, чтобы выполнялись все соотношения из (19), является равенство $\gamma = 1$, и тогда $\phi(t) = \lambda^2 \exp(2\mu t)$. Система ОДУ для нахождения $r(y)$, $s(y)$ принимает вид

$$\begin{aligned} &\alpha_2 r(y)s''(y) + \alpha_3 r'(y)s'(y) + \mu(y-1)r'(y) + As^{1-\xi}(y)r^{\xi}(y) - 2\mu r(y) = 0, \\ &\beta_2 s(y)r''(y) + \beta_3 s'(y)r'(y) + \mu(y-1)s'(y) + Br^{1-\eta}(y)s^{\eta}(y) - 2\mu s(y) = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Далее, пусть $C \neq 1$. Тогда решение (20) имеет вид

$$a(t) = (\mu t + \lambda)^{\omega},$$

где $\mu \neq 0$, $\lambda > 0$, $\omega > 0$ — константы. Необходимым и достаточным условием того, чтобы выполнялись все соотношения из (19), является равенство $\gamma = 2(\omega - 1)/(2\omega - 1)$, и тогда $\phi(t) = \omega(\mu t + \lambda)^{2\omega - 1}$. Система для нахождения $r(y)$, $s(y)$ принимает вид

$$\begin{aligned} &\alpha_2 r(y)s''(y) + \alpha_3 r'(y)s'(y) + \mu(y-1)r'(y) + As^{\gamma-\xi}(y)r^{\xi}(y) + \frac{2\mu r(y)}{\gamma - 2} = 0, \\ &\beta_2 s(y)r''(y) + \beta_3 s'(y)r'(y) + \mu(y-1)s'(y) + Br^{\gamma-\eta}(y)s^{\eta}(y) + \frac{2\mu s(y)}{\gamma - 2} = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

При этом возникают дополнительные требования $\gamma \neq 1$, $\gamma \neq 2$, $(\omega - 1)/(2\omega - 1) > 0$, откуда $\omega \in (-\infty, 1/2) \cup (1, +\infty)$.

Можно видеть, что система (22) при $\gamma = 1$ переходит в систему (21); кроме того, не теряя общности рассмотрения, можем принять $\alpha_2 = \beta_2 = 1$. Окончательно получаем следующую систему ОДУ:

$$\begin{aligned} &r(y)s''(y) + \alpha r'(y)s'(y) + \mu(y-1)r'(y) + As^{\gamma-\xi}(y)r^{\xi}(y) + \frac{2\mu r(y)}{\gamma - 2} = 0, \\ &s(y)r''(y) + \beta s'(y)r'(y) + \mu(y-1)s'(y) + Br^{\gamma-\eta}(y)s^{\eta}(y) + \frac{2\mu s(y)}{\gamma - 2} = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

где $\alpha = \alpha_3$, $\beta = \beta_3$. Следует помнить, что при $\gamma = 1$ и $\gamma \neq 1$ система (23) описывает решения различного вида.

Начальные данные для системы (23) следуют из (3) и доказательства теоремы и имеют вид

$$r(0) = 0, \quad r'(0) = \frac{\mu}{\beta}, \quad s(0) = 0, \quad s'(0) = \frac{\mu}{\alpha}. \tag{24}$$

Из проведенных рассуждений следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *При* $\gamma = 1$, $a(t) = \lambda \exp(\mu t)$ *и* $\gamma \neq 1, 2$, $\omega = (\gamma - 2)/(2\gamma - 2)$, $a(t) = (\mu t + \lambda)^{\omega}$ *задача* (16), (3) *допускает редукцию к задаче* (23), (24).

Завершая раздел, отметим, что при $\gamma \in \mathbb{N}$, $\eta, \xi \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ в силу теоремы 1 у задачи (23), (24) существует единственное аналитическое решение. Если же среди γ, η, ξ имеется хотя бы одно нецелое число, вопрос о разрешимости задачи пока открыт.

4. Вычислительный алгоритм. Получить решение задачи (23), (24) аналитически в конечной форме представляется проблематичным. При этом построение ее приближенного решения с достаточной точностью позволит получить решение задачи (16), (3), которое можно использовать в качестве референсного для верификации численного алгоритма решения задачи (1), (3).

Представим систему (23) в следующем виде:

$$r'' = R(r, r', s, s'), \quad s'' = S(r, r', s, s'), \tag{25}$$

где

$$R(r, r', s, s') = -\frac{1}{s(y)}\left(\beta s'(y) r'(y) + \mu(y-1)s'(y) + B r^{\gamma-\eta}(y) s^{\eta}(y) + \frac{2\mu s(y)}{\gamma - 2}\right),$$
$$S(r, r', s, s') = -\frac{1}{r(y)}\left(\alpha r'(y) s'(y) + \mu(y-1)r'(y) + A s^{\gamma-\xi}(y) r^{\xi}(y) + \frac{2\mu r(y)}{\gamma - 2}\right).$$

Решение задачи Коши (25), (24) на отрезке $y \in [0, 1]$ будем искать в виде

$$r(y) = r_p(y) + r_h(y), \quad s(y) = s_p(y) + s_h(y), \tag{26}$$

где $(r_p(y), s_p(y))$ — частное решение системы (25), а $(r_h(y), s_h(y))$ — решение следующей задачи Коши для соответствующей однородной системы:

$$\begin{gathered} r_h'' = 0, \quad s_h'' = 0, \\ r_h(0) = -r_p(0), \quad r_h'(0) = \frac{\mu}{\beta} - r_p'(0), \quad s_h(0) = -s_p(0), \quad s_h'(0) = \frac{\mu}{\alpha} - s_p'(0). \end{gathered} \tag{27}$$

При найденном частном решении решение задачи (27) имеет линейный вид и определяется однозначно. Частное решение системы (25) находится итерационно при нулевом начальном приближении:

$$r_p^{(0)} \equiv 0, \quad s_p^{(0)} \equiv 0, \tag{28}$$

$$r_h^{(n)} = \left(\frac{\mu}{\beta} - \left[r_p^{(n)}\right]'(0)\right) y - r_p^{(n)}(0), \quad s_h^{(n)} = \left(\frac{\mu}{\alpha} - \left[s_p^{(n)}\right]'(0)\right) y - s_p^{(n)}(0), \tag{29}$$

$$r^{(n)} = r_p^{(n)} + r_h^{(n)}, \quad s^{(n)} = s_p^{(n)} + s_h^{(n)}, \tag{30}$$

$$\left[r_p^{(n+1)}\right]'' = R\left(r^{(n)}, \left[r^{(n)}\right]', s^{(n)}, \left[s^{(n)}\right]'\right), \quad \left[s_p^{(n+1)}\right]'' = S\left(r^{(n)}, \left[r^{(n)}\right]', s^{(n)}, \left[s^{(n)}\right]'\right). \tag{31}$$

Система (31) на каждой итерации решается методом двойственной взаимности, с использованием разложения правых частей уравнений по системе радиальных базисных функций (РБФ; см. [14, 17]):

$$\begin{aligned} R\left(r^{(n)}, \left[r^{(n)}\right]', s^{(n)}, \left[s^{(n)}\right]'\right) &= \sum_{i=1}^{m} p_i^{(n+1)} f_i(y), \\ S\left(r^{(n)}, \left[r^{(n)}\right]', s^{(n)}, \left[s^{(n)}\right]'\right) &= \sum_{i=1}^{m} q_i^{(n+1)} f_i(y). \end{aligned} \tag{32}$$

Здесь $f_i(y) = f_i\left(|y - y_i|\right)$ — РБФ, значения которых зависят от расстояния между текущей точкой и заданными точками коллокации $y_1, y_2, \ldots, y_m$, лежащими на отрезке $[0, 1]$; для каждой функции $f_i(y)$ существует такая функция $\widehat{u}_i$, что $f_i = \widehat{u}_i''$. Коэффициенты $p_i^{(n+1)}$, $q_i^{(n+1)}$, $i = 1, \ldots, m$, определяются из систем линейных алгебраических уравнений, получаемых из равенств (32), записанных в точках коллокации. Тогда

$$r_p^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{m} p_i^{(n+1)} \widehat{u}_i(y), \quad s_p^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{m} q_i^{(n+1)} \widehat{u}_i(y). \tag{33}$$

Итерационная процедура (28)–(33) останавливается при достаточной близости n-й и $(n+1)$-й итераций. Точность алгоритма может быть проверена оценкой невязок уравнений системы (23) при подстановке полученного решения.

Рассмотрим теперь задачу (1), (3). Пусть требуется решить ее на заданном конечном промежутке времени. Разобьем этот промежуток на достаточно малые шаги длиной h, и будем строить приближенное решение задачи по шагам. На шаге $t_k = kh$ систему (1) представим в виде

$$u_{xx} = \frac{v_t - \beta_1 v_x - \beta_3 u_x v_x - g(v,u)}{\beta_2 v}, \quad v_{xx} = \frac{u_t - \alpha_1 u_x - \alpha_3 u_x v_x - f(u,v)}{\alpha_2 u}. \tag{34}$$

и рассмотрим систему (34) на отрезке $x \in [0, a(t_k)]$ с граничными условиями

$$u\big|_{x=a(t_k)} = 0, \quad u_x\big|_{x=a(t_k)} = -\frac{\alpha_1 + a'(t_k)}{\alpha_3}, \quad v\big|_{x=a(t_k)} = 0, \quad v_x\big|_{x=a(t_k)} = -\frac{\beta_1 + a'(t_k)}{\beta_3}. \tag{35}$$

Здесь условия на производные следуют из условий (3) и уравнений (1). Фактически задача (34), (35) является обратной задачей Коши на отрезке $x \in [0, a(t_k)]$ и может быть решена с помощью алгоритма (26)–(33). Таким образом, на каждом шаге получим непрерывное по x решение задачи (1), (3).

Подход, подобный рассмотренному в этом разделе, успешно использовался авторами для решения нелинейных параболических уравнений и систем (см. [8,19]). Отличие уравнений (25) и (33) от рассмотренных ранее заключается в более существенной связаности двух уравнений Пуассона, входящих в систему. Сложная нелинейная зависимость второй производной каждой искомой функции от другой функции и ее производной приводит к необходимости модифицировать алгоритм на стадии реализации. Именно, сходимость итерационных процедур существенно зависит от расположения точек коллокации, особенно крайних, а достижение заданной точности требует большего их числа. Подходящие точки коллокации были подобраны в процессе вычислительного эксперимента.

5. Вычислительный эксперимент. Рассмотрим пример применения предложенных в предыдущем разделе алгоритмов численного решения задач (1), (3) и (23),Ё(24).

Численное решение системы (23), (24) было построено при следующих значениях параметров:

$$\gamma = 1, \quad \eta = 0{,}5, \quad \xi = 0{,}5, \quad \alpha = 0{,}5, \quad \beta = 1, \quad \lambda = 1, \quad \mu = 0{,}5, \quad A = 1, \quad B = 1.$$

В качестве РБФ были приняты функции $f_i(y) = |y - y_i|$. Подставляя полученные решения в систему (23) и вычисляя наибольшие на отрезке $[0,1]$ невязки левых частей уравнений, мы получили оценки точности предложенного алгоритма, приведенные в таблице. Можно убедиться, что результаты расчетов демонстрируют сходимость алгоритма относительно числа точек коллокации, и удовлетворительную точность решения.

Таблица 1. Невязки уравнений системы (23)

m	уравнение 1	уравнение 2
21	6.3×10^{-4}	5.2×10^{-4}
51	2.5×10^{-4}	2.1×10^{-4}
101	1.3×10^{-4}	1.4×10^{-4}
201	6.3×10^{-5}	5.2×10^{-5}

Таким образом, построенное решение $(r(y), s(y))$ может быть использовано для построения референсного решения задачи (1), (3):

$$u(t,x) = \lambda^2 \exp(2\mu t) r\left(1 - \frac{x}{\lambda \exp(\mu t)}\right), \quad v(t,x) = \lambda^2 \exp(2\mu t) s\left(1 - \frac{x}{\lambda \exp(\mu t)}\right). \tag{36}$$

Задача (1), (3) была решена при значениях параметров, соответствующих найденному точному решению:

$$\gamma = 1, \quad \eta = 0{,}5, \quad \xi = 0{,}5, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 0{,}5, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 1,$$
$$a(t) = \lambda \exp(\mu t), \quad \lambda = 1, \quad \mu = 0{,}5, \quad A = 1, \quad B = 1, \quad m = 51, \quad h = 0{,}1,\ 0{,}05,\ 0{,}02.$$

Сравнение полученных решений при различных шагах по времени с решением (36) показано на рисунке. Иллюстрация показывает достаточную точность пошагового алгоритма решения задачи (1), (3), а также его сходимость к точному решению с уменьшением шага по времени.

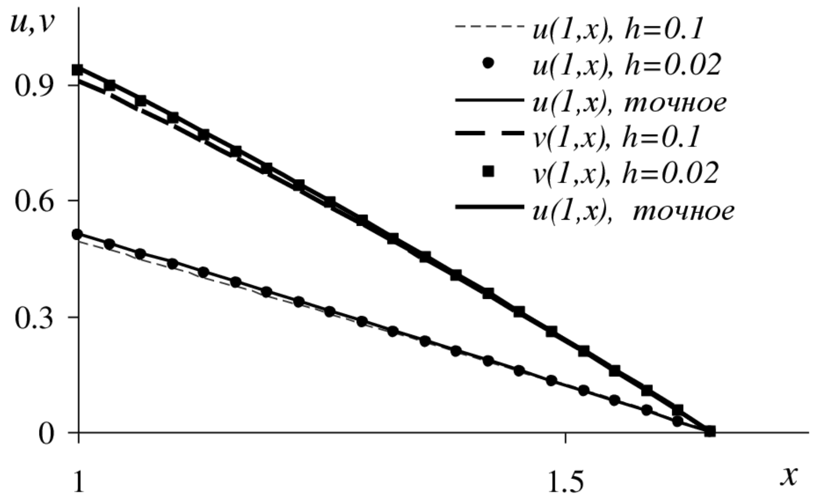

Рис. 1. Сравнение численных решений задачи (1), (3) с точным решением

6. Заключение. В работе исследована задача с заданным нулевым фронтом для системы «хищник-жертва». Обоснована теорема о существовании и единственности аналитического решения, причем доказательство доставляет конструктивную процедуру построения последнего в виде степенного ряда с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами. Найдены новые точные решения рассмотренной задачи, получение которых сводится к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка, наследующей особенность у исходной постановки. Предложены численные алгоритмы решения системы ОДУ, а также исходной системы с помощью методов частных решений и двойственной взаимности. Оценка точности решения системы ОДУ дала хорошие результаты, следовательно, эти решения могут быть использованы для построения референсных решений исходной системы «хищник-жертва». Сравнение пошаговых численных решений системы «хищник-жертва» с найденным референсным решением показало эффективность построенного алгоритма.

Дальнейшие исследования в данном направлении, прежде всего, должны быть связаны с рассмотрением задачи с двумя нулевыми фронтами, которая является более естественной с точки зрения приложений. Также представляет интерес расширение классов функциональных пространств, для которых доказано существование решений рассмотренного вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г. Г., Ентов В. Н., Рыжик В. М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Недра, 1984.
2. *Баутин С. П., Казаков А. Л.* Обобщенная задача Коши и ее приложения. — Новосибирск: Наука, 2006.
3. *Дедю И. И.* Экологический энциклопедический словарь. — Кишинев, 1989.
4. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Физматлит, 1966.
5. *Казаков А. Л.* О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — *16*. — С. 1057–1068.

6. *Казаков А. Л., Кузнецов П. А.* Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах// Сиб. ж. индустр. мат. — 2018. — *24*, № 2 (74). — С. 56–65.
7. *Казаков А. Л., Орлов Св. С., Орлов С. С.* Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности// Сиб. мат. ж. — 2018. — *59*, № 3. — С. 544–560.
8. *Казаков А. Л., Спевак Л. Ф.* Точные и приближенные решения вырождающейся системы реакция-диффузия// Прикл. мех. техн. физ. — 2021. — *62*, № 4. — С. 169—180.
9. *Кузнецов П. А.* Аналитические диффузионные волны в нелинейной параболической модели «хищник-жертва»// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2022. — *28*, № 2. — С. 158–167.
10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
11. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987.
12. *Сидоров А. Ф.* Избранные труды. Математика. Механика. — М.: Физматлит, 2001.
13. *Achouri T., Ayadi M., Habbal A., Yahyaoui B.* Numerical analysis for the two-dimensional Fisher–Kolmogorov—Petrovski—Piskunov equation with mixed boundary condition// J. Appl. Math. Comput. — 2022. — *68*. — P. 3589-–3614.
14. *Chen C. S., Chen W., Fu Z. J.* Recent advances in radial basis function collocation method. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2013.
15. *Courant R., Hilbert D.* Methods of Mathematical Physics. Vol. II. Partial Differential Equations. — New York: Interscience, 2008.
16. *Dou F., Liu Y., Chen C. S.* The method of particular solutions for solving nonlinear Poisson problems// Comput. Math. Appl. — 2019. — *77*, № 2. — P. 501–513.
17. *Fornberg B., Flyer N.* Solving PDEs with radial basis functions// Acta Numer. — 2015. — *24*. — P. 215–258.
18. *Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Lempert A. A.* Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type// Symmetry. — 2020. — *12*, № 6. — 999.
19. *Kazakov A. L., Spevak L. F.* Constructing exact and approximate diffusionwave solutions for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearities// Mathematics. — 2022. — *10*, № 9. — 1559.
20. *Murray J. D.* Mathematical Biology. II: Spatial Models and Biomedical Applications.. — New York: Springer, 2003.
21. *Nardini D., Brebbia C.* A new approach to free vibration analysis using boundary elements// Appl. Math. Model. — 1983. — *7*, № 3. — P. 157–162.
22. *Perthame B.* Parabolic Equations in Biology. Growth, Reaction, Movement and Diffusion. — New York: Springer, 2015.

Казаков Александр Леонидович
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
Сибирского отделения РАН, Иркутск
E-mail: kazakov@icc.ru

Кузнецов Павел Александрович
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
Сибирского отделения РАН, Иркутск
E-mail: kuznetsov@icc.ru

Спевак Лев Фридрихович
Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова
Уральского отделения РАН, Екатеринбург
E-mail: lfs@imach.uran.ru