ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 109–114
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-109-114

УДК 514.75

ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ ГЛАВНЫМИ КРИВИЗНАМИ В $(n+1)$-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2023 г. **Е. Ю. КУЗЬМИНА**

Аннотация. Выяснены условия существования гиперповерхностей в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1}, главные кривизны которых пропорциональны.

Ключевые слова: G-структура, дифференцируемое многообразие, структурная функция, тонкий веер, инициальная пара.

HYPERSURFACES WITH PROPORTIONAL PRINCIPAL CURVATURES IN $(n+1)$-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

© 2023 **E. YU. KUZMINA**

Abstract. In this paper, we find conditions of the existence of hypersurfaces in the $(n+1)$-dimensional Euclidean space E^{n+1} whose main curvatures are proportional.

Keywords and phrases: G-structure, differentiable manifold, structural function, thin fan, initial pair.

AMS Subject Classification: 53A07

1. Введение. Среди всех расслоений G-структуры, определяемые как редукции расслоения реперов $F(M)$ дифференцируемого многообразия M к линейной группе $G \subset GL(n)$, играют значительную роль в современной дифференциальной геометрии. Ш. Черн в [13] ввел понятие G-структуры и в обзорной статье [14] привел много задач из различных разделов дифференциальной геометрии, сводящихся к задачам теории G-структур. Отметим, что понятие G-структуры позволяет описывать большинство геометрических структур единым методом, однако общих теорем о G-структурах мало, причем ответить на некоторые вопросы, даже для конкретной группы Ли, достаточно трудно. Основные результаты по проблеме интегрируемости G структур получены С. Стернбергом [18] и В. Гийеминым [15]. Более широкий класс h-плоских структур, используемых в теории контактных многообразий, исследовал Дж. Монна [17].

При рассмотрении автоморфизмов и локальных автоморфизмов геометрических структур выделяются различия между структурами конечного и бесконечного типов.

Для структуры конечного типа Стернбергом было показано (см. [18]), что группа автоморфизмов является группой Ли. Поэтому изучение транзитивных структур конечного типа сводится к задачам из геометрии однородных пространств группы Ли. При рассмотрении локально-транзитивных G-структур исследование сводится к изучению пар алгебр Ли (см. [3, 6]).

Одним из наиболее простых отображений, не имеющих обратного, является вложение, которое определяет пару структур. G-Структуры на подмногообразиях изучали многие авторы. Так, в [17] рассмотрена связь между контактными и симплектическими многообразиями. Часто приемы построения канонических или полуканонических реперов (см. [7, 8]) можно интерпретировать в терминах теории пар структур, имеющих общую базу. В этом случае подструктура B_0 является редукцией G-структуры B к подгруппе $H \subset G$.

Важнейшим инвариантом геометрических G-структур является структурная функция, введенная Д. Бернардом в [12] и принимающая свои значения в пространстве когомологий Спенсера. Необходимым, а в инволютивном случае и достаточным условием интегрируемости G-структуры является обращение её в нуль. В случае унитарной структурной группы это условие позволяет выделить кэлеровы многообразия.

Однако интересные результаты можно получать только при постоянном значении структурной функции, что позволяет выделить лишь достаточно узкий класс локально транзитивных геометрических структур, не имеющих неголономного продолжения.

При обобщении понятия автоморфизма транзитивной структуры П. Я. Грушко получил в [2] более широкий класс сопряженно транзитивных структур, для которых структурная функция уже не является константой. Для этого класса построен новый инвариант G-структуры, называемый тонким веером, и приведен критерий однородности геометрической структуры. Отметим, что такие структуры устойчивы относительно операций расширения структурной группы и неголономного продолжения (см. [4]).

Понятие инициальной пары (см. [1]) позволяет рассматривать подмногообразия в теории G-структур и посредством обобщения тонкого веера геометрической структуры на пару G-структур (см. [9]) выделять сопряженно транзитивные подмногообразия в E^{n+1}. С гиперповерхностью M в $(n+1)$-ерном евклидовом пространстве E^{n+1} можно связать такой канонический репер $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_{n+1}\}$, что вектор $\boldsymbol{e}_{n+1}$ в любой точке A гиперповерхности M направлен по нормали к поверхности, а векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — по касательным к линиям кривизны, принятым за координатные линии.

Заметим, что n различных главных направлений в окрестности точки A однозначно определяется только в случае различных главных кривизн в этой точке (см., например, [16]), поэтому предполагаем, что в каждой точке гиперповерхности M значения главных кривизн различны между собой. Через B_0 обозначим множество таких реперов во всех точках гиперповерхности M. Через $\mathcal{B}$ обозначим риманову структуру в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1}. Очевидно, $B_0 \subset \mathcal{B}$ — инициальная пара, для которой структурная функция сводится к инвариантам канонического репера.

В [7] приведено построение тонкого веера для гиперповерхностей, на которых можно задать канонический репер, и показано, что он существует только для поверхностей малых размерностей ($\dim E^{n+1} \leqslant 3$). Веер первого порядка существует для гиперповерхностей с постоянными значениями инвариантов канонического репера и гиперповерхностей с пропорциональными между собой инвариантами канонического репера. Поверхностями, обладающими тонким веером, являются окружность и логарифмическая спираль в E^2, цилиндр, конус и цилиндрическая поверхность, образующая которой — логарифмическая спираль в E^3 (см. [16]).

В [7] найдены условия существования гиперповерхностей в евклидовом пространстве E^{n+1}, главные кривизны которых постоянны (в предположении, что все главные кривизны различны между собой). Классификация гиперповерхностей с постоянными главными кривизнами в евклидовом пространстве V^{n+1} приводит к задаче описания представлений V компактных групп Ли G и векторов $v \in V$ с единичными стационарными подгруппами (см. [9, 16]). В данной работе приведены условия существования в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве гиперповерхностей, главные кривизны которых пропорциональны (см. [8]).

2. Построение тонкого веера в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1}. Большинство свойств сопряженно-транзитивных пар геометрических структур нелегко сформулировать без большой подготовки и определений. Далее необходимые понятия и обозначения будем приводить по ходу изложения.

Морфизм $\{k, l, f\}$ геометрической структуры $\mathcal{B}_1$ в геометрическую структуру $\mathcal{B}_2$ задается гомоморфизмом $k : G_1 \to G_2$ структурных групп Ли, линейным отображением $l : V_1 \to V_2$ векторных пространств и гладким отображением $f : B_1 \to B_2$ пространств, причем

$$lgv = kg \cdot lv, \quad fR_g b = R_{kg} fb, \quad l\omega_1 = \omega_2 f^*.$$

Морфизм структуры $\mathcal{B}$ в себя называется сопряженным автоморфизмом, если он обратим.

Если l — вложение, то морфизм называется инициальной парой.

Сопряженным автоморфизмом инициальной пары структур $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ называется сопряженный автоморфизм структуры $\mathcal{B}$ в себя, сохраняющий подструктуру $\mathcal{B}_0$.

Пара структур $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ называется сопряженно транзитивной, если структура $\mathcal{B}$ сопряженно транзитивна и группа сопряженных автоморфизмов пары структур транзитивна на пространстве структуры $\mathcal{B}_0$.

В [2] введен новый инвариант пары геометрических структур — тонкий веер, в терминах которого сформулирован критерий эквивалентности сопряженно транзитивные пар.

Через $\operatorname{Aut} V$ будем обозначать группу всех линейных автоморфизмов векторного пространства V, а N — группу его автоморфизмов, $H \subset N \subset \operatorname{Aut} V$. Пусть R_g — правое действие элемента $g \in G$ на некотором многообразии, G — нормальный делитель в N, TB — касательное расслоение многообразия, $\overline{H}^{2,-1}(V, \widehat{G}; V_0, \widehat{G}_0)$ — относительные когомологии Спенсера (см. [5]).

Футляром $\Phi = \{V, N, H, G, W, Z\}$ называется набор, состоящих из векторного пространства V и таких подгрупп Ли N, H, G, W, Z в $\operatorname{Aut} V$, что

$$Z = H \cap G, \quad H \subset G, \quad W = H \cdot G,$$

причем G — нормальный делитель в N. Подгруппы Ли N, H, G, W, Z называются соответственно фундаментальной, структурной, вспомогательной и основной группами футляра Φ.

Пусть $\Phi = \{V, N, H, G, W, Z\}$ — произвольный футляр, а футляр $\Phi_0 = \{V_0, N_0, H_0, G_0, W_0, Z_0\}$ таков, что $\Phi_0 \subset \Phi$, т.е. $V_0 \subset V$, $N_0 \subset N$, $\overline{H} \subset H$, $W_0 \subset W$, $Z_0 \subset Z$.

Через Λ будем обозначать мультипликативную группу скалярных ненулевых матриц.

Пусть $\overline{Q} \in \Lambda^2 V^* \otimes V$. Через $\overline{\Lambda}^2 V^* \otimes V$ будем обозначать такое пространство $\Lambda^2 V^* \otimes V$, что $\overline{Q}(V_0, V_0) \subset V_0$; кроме того, положим

$$\overline{V^* \otimes \hat{N}} = \Big\{\delta \in V^* \otimes \hat{N} \;\Big|\; \delta V_0 \subset \hat{N}_0 B\Big\}.$$

Определим действие коммутативной группы Ли $\overline{V^* \otimes \hat{N}}$ на прямом произведении

$$\Big(\overline{V^* \otimes \hat{N}}\Big) \times \overline{H}^{2,-1}\Big(V, \hat{Z};\ V_0, \hat{Z}_0\Big).$$

Положим

$$\big(\gamma \circ \overline{\Gamma}\big)(v) = \gamma v + \overline{\Gamma} v, \quad \gamma \in \overline{V^* \otimes \hat{W}}, \quad v \in V, \quad \overline{\Gamma} \in \overline{V^* \otimes \hat{N}}.$$

Далее, выберем такие линейные отображения $r : \hat{W} \to \hat{G}$ и $r_0 : \hat{W}_0 \to \hat{G}_0$, что $r\big|\hat{G} = \mathrm{id}$, $r_0\big|\hat{G}_0 = \mathrm{id}$.

Пусть Δ — некоторое дополнение до V к V_0, т.е. $V = V_0 + \Delta$. Тогда определены естественные проекции $\pi : V_0 \to V$, $\pi_0 : V \to \Delta$, обладающие свойством $v = \pi_0 v + \pi v$, где $v \in V$. Положим

$$\rho\gamma = r_0 \gamma \pi_0 + r \gamma \pi.$$

Таким образом, $\rho\gamma : V \to \hat{G}$ — такое линейное отображение, что $\rho\gamma(V_0) \subset \hat{G}_0$.

Пусть $\overline{\Lambda}^2 V^* \otimes V \to \overline{H}^{2,-1}\big(V, \hat{Z};\ V_0, \hat{Z}_0\big)$ — естественная проекция. Определим действие группы Ли $\overline{V^* \otimes \hat{W}}$ на относительных гомологиях Спенсера $\overline{H}^{2,-1}\big(V, \hat{Z};\ V_0, \hat{Z}_0\big)$ следующим образом: если

$$\gamma \in \overline{V^* \otimes \hat{W}}, \quad \Pi\overline{Q} \in \overline{H}^{2,-1}\big(V, \hat{Z};\ V_0, \hat{Z}_0\big), \quad \overline{Q} \in \overline{\Lambda}^2 V^* \otimes V$$

— представитель $\Pi\overline{Q}$, то

$$\gamma \circ \Pi\overline{Q} = \Pi(\gamma \circ \Pi\overline{Q}),$$

где

$$\big(\gamma \circ \overline{Q}\big)(v_1, v_2) = \overline{Q}(v_1, v_2) - \partial(\rho\gamma)\big(\gamma \circ \overline{Q}\big)(v_1, v_2).$$

Относительным веером $\overline{\varphi}$ называется всякая орбита коммутативной группы Ли

$$\overline{V^* \otimes \widehat{W}} = \Big\{\gamma : V \to \widehat{W} \;\Big|\; \gamma V_0 \subset \widehat{W}_0\Big\}$$

на прямом произведении $\big(\overline{V^* \otimes \hat{N}}\big) \times \overline{H}^{2,-1}\big(V, \hat{Z};\ V_0, \hat{Z}_0\big)$, где $\overline{H}^{2,-1}\big(V, \hat{Z};\ V_0, \hat{Z}_0\big)$ — относительные гомологии Спенсера (см. [5]).

Предположим теперь, что дана инициальная пара G-структур $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$. Пусть $\overline{c}$ — структурная функция инициальной пары $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$. Также будем считать, что для структуры $\mathcal{B}$ существует тонкий веер φ^∞ (см. [2]).

Пусть N, N_0 — такие подгруппы Ли в $\operatorname{Aut} V$, что

$$G \subset N \subset N(G), \quad G_0 \subset N_0 \subset N(G)_0 \cap N(G), \quad N_0 V_0 \subset V_0,$$

причем значения структурной функции $\overline{c}$ пары содержатся в некоторой орбите группы N_0. Зафиксируем точку $b_0 \in B_0$; пусть $\overline{H} = \{g \in N_0 \mid c(b)^g = c(b)\}$ — стационарная подгруппа в N элемента $c(b)$. Выберем такое отображение $a : U_b \to N$ окрестности U_b точки b в группу N, что

$$aB_0 \subset N_0, \quad a(b) = 1,$$
$$R_g U_b = U_b, \quad a(R_g b) = g^{-1} a(b), \quad g \in G, \quad x \in U_b,$$
$$\overline{c}(b) = \overline{c}(b_0)^{a(b)}, \quad x \in U_b \cap B_0,$$
$$c(b) = c(b_0)^{a(b)}, \quad x \in U_b.$$

Если $\tilde{a}$ — другое такое отображение, то

$$\tilde{a}(x) = a(x) \cdot h(x),$$

где $h : U_b \to H$, причем $h(U_b \cap B_0) \subset \overline{H}$ и

$$h(b) = 1, \quad h(R_g b) = h(bx), \quad g \in G, \quad x \in U_b.$$

Если $\overline{H} \subset H$ — стационарная подгруппа в N_0 значения структурной функции пары $\overline{C}$ в точке b_0, то пара $(\overline{\Gamma}, \overline{Q})$, удовлетворяющая условию

$$\overline{\Gamma} v = a^* sv, \quad \overline{Q}(v_1, v_2) = -d\omega(sv_1, sv_2), \quad v, v_1, v_2 \in V,$$

где s — горизонтальная площадка в точкеb_0, является веером $\overline{\varphi}(b_0)$, называемым веером первого приближения инициальной пары $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ в точке $b_0 \in B_0$; при этом $\left(\overline{\Gamma}, \overline{Q}\right)$ называется представителем веера $\overline{\varphi}(b_0)$.

Определим веер k-го приближения по индукции. Пусть значения веера k-го приближения $\overline{\varphi}_k$ содержится в орбите N_0 так, что существует такое отображение a_k окрестности заданной точки $b_0 \in B_0$ в группу N, что

$$a(b_0) = 1, \quad a_k(R_g b) = g^{-1} a_k(b), \quad a_k B_0 \subset N_0,$$
$$\overline{\varphi}_k(b) = \overline{\varphi}_k(b_0)^{a_k(b)}, \quad \varphi_k(b) = \varphi_k(b_0)^{a_k(b)}.$$

Пусть $\overline{H}_{k+1}(b_0) \subset \overline{H}_{k+1}(b)$ — стационарная подгруппа $\overline{\varphi}_k(b)$; тогда

$$\overline{\Gamma}_{k+1}(v) = a_k^* sv, \quad \overline{Q}_{k+1}(v_1, v_2) = -d\omega(sv_1, sv_2), \quad v, v_1, v_2 \in V,$$

является представителем веера $(k+1)$-го приближения $\varphi_{k+1}(b_0)$ в точке b_0. Результат стабилизации

$$\overline{\varphi}_\infty = \lim_{k \to \infty} \overline{\varphi}_k(b_0)$$

называется тонким веером.

Следующее утверждение дает критерий эквивалентности пар геометрических структур.

Теорема 1. *Пусть структуры $\mathcal{B}_1 = \{B_1, \omega_1\}$, $\mathcal{B}_2 = \{B_2, \omega_2\}$ имеют тонкие веера φ_1 и φ_2. Пусть пары структур $B_{01} \subset \mathcal{B}_1$, $B_{02} \subset \mathcal{B}_2$ с отмеченными точками $b_1 \subset B_{01}$, $b_2 \subset B_{02}$ имеют тонкие веера $\overline{\varphi}_1$ и $\overline{\varphi}_2$. Пусть $l : V_1 \to V_2$ — такой изоморфизм, что*

$$lV_{01} \subset V_{02}, \quad Jnt_l G_1 = G_2, \quad Jnt_l G_{01} = G_{02}$$

и

$$\forall x \in B_1 \; \exists z \in B_2 : \; \varphi_1(x)^l = \varphi_2(z), \quad \forall x \in B_{01} \; \exists z \in B_{02} : \; \overline{\varphi}_1(x)^l = \overline{\varphi}_2(z),$$

причем $\varphi_1(b_1)^l = \varphi_2(b_2)$, $\overline{\varphi}_1(b_1)^l = \overline{\varphi}_2(b_2)$.

Если алгебры Ли $\hat{Z}_1$, $\hat{Z}_{01}$ инволютивны и V_{01} включено в квазирегулярный флаг в V_1, то существует такой локальный изоморфизм $\{k, \tilde{l}, f\}$ пары структур $B_{01} \subset \mathcal{B}_1$ в пару структур $B_{02} \subset \mathcal{B}_2$, что $fb_1 = b_2$, $\tilde{l} = l$.

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 3 работы [2].

В [7] доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Для гиперповерхностей в* E^{n+1}, $n \geqslant 2$, *тонкий веер существует в случае либо постоянных главных (различных между собой) кривизн, либо главных кривизн, пропорциональных между собой.*

3. Существование гиперповерхностей с пропорциональными главными кривизнами в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1}. Выясним, существуют ли такие поверхности, главные кривизны которых пропорциональны (в предположении, что все главные кривизны различны между собой). Рассмотрим в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1} структуру

$$\mathcal{B} = o(n+1) \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^1.$$

Уравнения структуры n-мерной поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ запишем в виде

$$d\boldsymbol{r} = \omega^i \boldsymbol{e}_i, \quad d\boldsymbol{e}_i = \omega_i^j \boldsymbol{e}_j, \quad j, i = \overline{1, n+1},$$

где $\omega_i^j = c_{ik}^j \lambda \omega^k$. Считаем c_{ik}^j постоянными, $\lambda = \lambda(x) \in \mathbb{R}^1$. На многообразии B рассмотрим дифференциальную систему

$$\omega^{n+1} = 0, \quad \omega_i^j = c_{ik}^j \lambda \omega^k. \tag{1}$$

Замыкание дифференциальной системы (1) дает еще два уравнения:

$$\omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^{n+1} = 0, \quad \omega_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^j = c_{ik}^j d\lambda \wedge \omega^k + c_{ik}^j d\lambda \wedge \omega^\alpha \wedge \omega^k, \tag{2}$$

или

$$\omega_i^\alpha \wedge c_{\alpha\beta}^{n+1} \lambda \omega^\beta = 0, \quad c_{i\beta}^\alpha c_{\alpha\gamma}^j \lambda^2 \omega^\beta \wedge \omega^\gamma = c_{i\gamma}^j \lambda_\tau \omega^\tau \wedge \omega^k + c_{ik}^j c_{\alpha\beta}^k \lambda^2 \omega^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad d\lambda = \lambda_\tau \omega^\tau, \quad \tau = \overline{1, n}.$$

Следовательно, $c_{\alpha\beta}^{n+1}$ симметричны по $\alpha, \beta \leqslant n$ и

$$\lambda^2 \left[c_{i\beta}^\alpha c_{\alpha\gamma}^j - c_{i\gamma}^\alpha c_{\alpha\beta}^j \right] = \left(\lambda_\beta c_{ij}^j - \lambda_\gamma c_{i\beta}^j \right) + \lambda^2 c_{ik}^j \left(c_{\beta\gamma}^k - c_{\gamma\beta}^k \right)$$

— условия, получающиеся при приравнивании коэффициентов при $\omega^\beta \wedge \omega^\gamma$.

Всякий n-мерный интегральный элемент, проектирующийся изоморфно на подпространство V_0, натянутое на векторы $\{\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \ldots, \boldsymbol{E}_n\}$, имеет вид

$$E = \left\{ s(v + lv) + j_b \gamma v + \mu u \;\middle|\; v \in V_0;\ \gamma \in {V_0}^* \otimes \hat{G},\ \mu : V_0 \to \mathbb{R}^1 \right\},$$

где l_v — подпространство, ортогональное к V_0. Из уравнений (1)–(2) следует, что

$$l = 0, \quad \gamma_i^j(v) = c_{ik}^j \,\lambda\, v^k$$

и

$$\lambda^2 \Big[c_{ip}^\alpha c_{\alpha q}^j - c_{iq}^\alpha c_{\alpha p}^j \Big] = \mu(\boldsymbol{e}_p) c_{iq}^j - \mu(\boldsymbol{e}_q) c_{ip}^j + \lambda^2 c_{ik}^j (c_{pq}^k - c_{qp}^k), \tag{3}$$

где $\mu(\boldsymbol{e}_p) = \lambda_p$, $\mu(\boldsymbol{e}_q) = \lambda_q$. Равенство (3) можно переписать в виде

$$\lambda^2(x) \Big(\big[\Gamma \boldsymbol{e}_p, \Gamma \boldsymbol{e}_q \big] - \Gamma \big(\Gamma \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_q - \Gamma \boldsymbol{e}_q \boldsymbol{e}_p \big) \Big) = \mu(\boldsymbol{e}_p) \Gamma \boldsymbol{e}_q - \mu(\boldsymbol{e}_p) \Gamma \boldsymbol{e}_p.$$

При таких условиях элемент будет интегральным и определяется однозначно, если

$$\widetilde{\mu}(\tilde{E}_p) \Gamma \boldsymbol{e}_q - \widetilde{\mu}(\tilde{E}_q) \Gamma \boldsymbol{e}_p = 0.$$

Если $\Gamma \boldsymbol{e}_i$ фиксирован, то определим произвол отображения μ. Пусть $\widetilde{\mu}(\tilde{E}_p)$, $\widetilde{\mu}(\tilde{E}_q)$ — тоже значения отображения μ в точке x. Тогда

$$\Big[\mu(\boldsymbol{e}_p) - \widetilde{\mu}(\boldsymbol{e}_q) \Big] \Gamma \boldsymbol{e}_q - \Big[\mu(\boldsymbol{e}_q) - \widetilde{\mu}(\boldsymbol{e}_p) \Big] \Gamma \boldsymbol{e}_p = 0.$$

В общем случае при различных $\Gamma \boldsymbol{e}_i$ имеем

$$\mu(\tilde{E}_p) = \widetilde{\mu}(\tilde{E}_p); \quad \mu(\tilde{E}_q) = \widetilde{\mu}(\tilde{E}_q),$$

т.е. $\mu = \widetilde{\mu}$. Следовательно, интегральный элемент E определяется однозначно и размерность расслоения таких интегральных элементов равна $\dim B$.

Выберем теперь в точке $b \in B$ конкретный интегральный элемент

$$E_0 = \left\{ su + j_b \gamma_0 u + \mu_0 u \;\middle|\; u \in V_0 \right\}.$$

Пусть $\{U_i \subset V_0\}$ — квазирегулярный флаг, $\dim U_i = i$, $i = \overline{0, n-1}$. Тогда полярный к $E(U_p)$ элемент H_p имеет вид

$$H_p = \left\{ \left(sw + \tau + v \right) \right\}, \quad w \in V_0, \quad \tau \in \hat{G} = o(n+1), \quad v \in \mathbb{R}^1.$$

Подставляя H_p в систему уравнений (2), получаем $w \in V_0$,

$$\tau_i^j = \lambda(x) c_{ik}^j \omega^k; \quad v \Gamma \boldsymbol{e}_q = \mu(\boldsymbol{e}_p) \tau.$$

Если $q = p$, то $v = \mu$ и $\Gamma \boldsymbol{e}_p = \tau$; если $p \neq q$, то τ пропорционально $\Gamma \boldsymbol{e}_p$.

Условие ординарности элемента E_0 выполняется; следовательно, согласно теореме Картана—Кэлера, существует интегральное подмногообразие размерности n, проходящее через точку b, с касательной плоскостью E_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Грушко П. Я.* Морфизмы геометрических структур// Мат. заметки. — 1977. — *22*, № 5. — С. 844–849.
2. *Грушко П. Я.* О проблеме сопряженной эквивалентности Картана// Сиб. мат. ж. — 1981. — *22*, № 1. — С. 68–80.
3. *Грушко П. Я.* Сопряженно транзитивные структуры конечного типа// Изв. вузов. Мат. — 1981. — № 2. — С. 24–29.
4. *Грушко П. Я.* Сопряженно транзитивные структуры// Сиб. мат. ж. — 1983. — *24*, № 1. — С. 68–78.
5. *Грушко П. Я.* Теорема Бонне для геометрических структур// Мат. заметки. — 1981. — *29*, № 2. — С. 253—264.
6. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1986.
7. *Кузьмина Е. Ю.* Гиперповерхности с постоянными главными кривизнами в евклидовом пространстве V^{N+1}// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *214*. — С. 76–81.
8. *Кузьмина Е. Ю.* Гиперповерхности с пропорциональными главными кривизнами в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве// Мат. 4 Междунар. конф. «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (Иркутск, 19-23 сентября 2022). — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2022. — С. 133–135.
9. *Кузьмина Е. Ю.* Некоторые примеры пар геометрических структур в классической дифференциальной геометрии. — Деп. в ВИНИТИ №4752-84.
10. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1953. — *2*. — С. 275–382.
11. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.
12. *Bernard D.* Sur la geometrie differentielle des G-structures// Ann. Inst. Fourier. — 1960. — *10*. — P. 153–273.
13. *Chern S. S.* Pseudo-groupes continus infinis// Colloq. Int. C.N.R.S. — 1953. — *10*. — P. 119–136.
14. *Chern S. S* The geometry of G-structures// Bull. Am. Math. Soc. — 1966. — *72*. — P. 167–219.
15. *Guillemin V.* The integrability problem for G-structures// Trans. Am. Math. Soc. — 1965. — *116*. — P. 544–560.
16. *Kuzmina E. Yu.* Representations of simple Lie algebras with vectors having a zero stationary subalgebra// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847: 012031*.
17. *Monna G.* Integrabilite des structures de presque contact// Compt. Rend. Acad. Sci.. — *291*. — P. 215–217.
18. *Singer I. M., Sternberg S.* The infinite groups of Lie and Cartan. Part 1. The transitive groups// J. Anal. Math. — 1965. — *15*. — P. 1–114.

Кузьмина Елена Юрьевна
Иркутский государственный университет
E-mail: `quzminov@mail.ru`