ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 115–124
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-115-124

УДК 517.958; 629.7.052

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. V

© 2023 г. В. М. МОРОЗОВ, В. И. КАЛЕНОВА, М. Г. РАК

Аннотация. Рассматриваются задачи стабилизации стационарных движений (положений равновесия и регулярных прецессий) спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях в предположении, что центр масс движется по круговой орбите. Предложены решения ряда задач стабилизации стационарных движений спутника при помощи магнитных систем. Представлены результаты математического моделирования предложенных алгоритмов, подтверждающие эффективность разработанной методики. Настоящая статья является заключительной частью работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 220. — С. 71–85. Вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 221. — С. 71–92. Третья часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 222. — С. 42–63. Четвертая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 223. — С. 84–106.

Ключевые слова: линейная нестационарная система, приводимость, стационарные движения, линеаризованные уравнения движений спутника, стабилизация, управляемость, алгоримы управления.

STABILIZATION OF STATIONARY MOTIONS OF A SATELLITE NEAR THE CENTER OF MASS IN A GEOMAGNETIC FIELD. V

© 2023 V. M. MOROZOV, V. I. KALENOVA, M. G. RAK

Abstract. In this paper, we consider problems of stabilization of stationary motions (equilibrium positions and regular precessions) of a satellite near the center of mass in gravitational and magnetic fields under the assumption that the center of mass moves in a circular orbit. Solutions for a number of problems of stabilizing stationary motions of a satellite with the help of magnetic systems are proposed. We present the results of mathematical modeling of the algorithms, which confirm the effectiveness of the developed methodology. This paper is the final part of the work. The first part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 220. — P. 71–85. The second part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 221. — P. 71–92. The third part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 222. — P. 42–63. The fourth part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 223. — P. 84–106.

Keywords and phrases: linear nonstationary system, reducibility, stationary motions, linearized equations of satellite motions, stabilization, controllability, control algorithms.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 3. Стабилизация стационарных движений спутника в геомагнитном поле 116
3.5. Определение ориентации спутника по измерениям магнитометров 116
3.6. Приложение 118
Заключение 121
Список литературы 121

Глава 3

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

3.5. Определение ориентации спутника по измерениям магнитометров

Рассмотрим кратко задачу определения ориентации спутника по измерениям, доставляемым магнитометром. Центр масс спутника движется по круговой орбите. Как уже указывалось в гл. 1, для работы магнитных систем ориентации и стабилизации спутников требуется информация об угловом движении спутника. Эту информацию доставляют магнитометры, измеряющие магнитное поле Земли в связанной со спутником системе координат.

Модель измерений магнитометра, представленная в гл. 1, имеет вид (1.1.9), а в линеаризованном виде (1.1.17).

Одной из классических ранних работ по ориентации спутника является книга J. Werz [76]. Использование фильтра Калмана для определения ориентации спутника по измерениям магнитометра рассмотрено в [66,67,70,75]. Краткий обзор методов определения ориентации спутников, использующих магнитометры, содержится в [70].

1. Исследуем наблюдаемость линеаризованных в окрестности положения равновесия (1.1.10) уравнений движения (1.1.14) по результатам измерений магнитометра (1.1.17).

Линеаризованные уравнения движения (3.1.1) при и уравнения измерений имеют вид (множитель μ_0 опускается)

$$\ddot{x}_1 - d_1\dot{x}_3 - \kappa_1 x_1 = 0, \quad \ddot{x}_3 + d_3\dot{x}_1 - \kappa_3 x_3 = 0, \tag{3.5.1}$$

$$\ddot{x}_2 - \kappa_2 x_2 = 0, \tag{3.5.2}$$

$$\sigma_1 = 2x_2 sIs\tau + x_3 cI, \quad \sigma_2 = -2x_1 sIs\tau + x_3 sIc\tau, \quad \sigma_3 = -x_1 cI - x_2 sIc\tau. \tag{3.5.3}$$

Здесь

$$d_1 = \frac{d}{J_1}, \quad d_3 = \frac{d}{J_3}, \quad d = J_2 - J_1 - J_3;$$
$$\kappa_1 = 4\frac{J_3 - J_2}{J_1}, \quad \kappa_2 = 3\frac{J_3 - J_1}{J_2}, \quad \kappa_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3}.$$

Среди измерений σ_1, σ_2, σ_3 только 2 независимых. Если орбита экваториальная ($\sin I = 0$), то из формул (3.5.3) следует, что измерения имеют вид $\sigma_1 = x_3 cI$, $\sigma_2 \equiv 0$, $\sigma_3 = -x_1 cI$, т. е. переменная x_2 не наблюдаема.

Далее будем считать, что $\sin I \neq 0$.

Представим систему (3.5.1) с измерением $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2/sI$ в форме Коши

$$\dot{\xi}^{(1)} = A\xi^{(1)}, \quad \xi^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 & \dot{x}_1 & \dot{x}_3 \end{bmatrix}^\top, \quad \bar{\sigma}_2 = C(\tau)\xi^{(1)}, \tag{3.5.4}$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \kappa_1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & k_3 & -d_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C(\tau) = \begin{bmatrix} -2s\tau & c\tau & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Система (3.5.4), согласно критерию наблюдаемости (см. гл. 2, § 1.1), наблюдаема, если можно указать такую точку τ^*, в которой

$$\operatorname{rank} W(\tau^*) = 4 \quad (\det W(\tau^*) \neq 0). \tag{3.5.5}$$

Здесь

$$W(\tau) = \begin{bmatrix} 2s\tau & 2c\tau & 2(\kappa_1 - 1)s\tau & l_{14}c\tau \\ -c\tau & s\tau & (1-\kappa_3)c\tau & l_{24}s\tau \\ 0 & 2s\tau & (4+d_3)c\tau & l_{34}s\tau \\ 0 & -c\tau & 2(1+d_1)s\tau & l_{44}c\tau \end{bmatrix}$$

$$l_{14} = 6\kappa_1 + \kappa_1 d_3 - 2, \qquad l_{24} = 3\kappa_3 + 2\kappa_3 d_1 - 1,$$
$$l_{34} = 2\kappa_1 - 2d_1 d_3 - 3d_3 - 6, \quad l_{44} = -\kappa_3 + d_1 d_3 + 6d_1 + 3.$$

Представим выражение $\det W(\tau)$ в виде

$$\det W = N_1(s\tau)^4 + N_2(s\tau)^2(c\tau)^2 + N_3(c\tau)^4,$$
$$N_1 = 4(d_1+1)(2l_{24} - l_{34}), \quad N_3 = (d_3+4)(2l_{44} + l_{14}).$$

Достаточно показать, что коэффициенты N_1, N_3 одновременно в ноль не обращаются ни при каких значениях моментов инерции спутника. Это означает, что система (3.5.4) наблюдаема, т. е. наблюдаются переменные x_1, x_3, $\dot{x}_1$, $\dot{x}_3$. Тогда переменные x_1, x_3 можно считать известными, и для анализа наблюдаемости системы (3.5.2) достаточно рассматривать модифицированное уравнение измерений

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 - cI(x_3 s\tau + 2x_1 c\tau) = 2x_2 sI.$$

Отсюда следует наблюдаемость системы (3.5.2) по измерению $\bar{\sigma}_1$.

Таким образом, система (3.5.1), (3.5.2) по измерениям магнитометра (3.5.3) наблюдаема при любых значениях моментов инерции, если орбита не является экваториальной.

2. Следуя методу, изложенному в главе 2, для решения задачи оценивания состояния системы (3.5.1), (3.5.2) по нестационарным измерениям (3.5.3) необходимо привести ее к стационарному виду и исследовать наблюдаемость.

Будем считать, что орбита спутника не является ни экваториальной, ни полярной $I \neq 0$, $I \neq \pi/2$, и рассмотрим измерения σ_1, σ_3.

Введем замену переменных

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3, \quad y_3 = x_2 \cos\tau, \quad y_4 = x_2 \sin\tau. \tag{3.5.6}$$

Переменные $y_1, \ldots, y_4$ подчиняются стационарной системе уравнений 8-го порядка

$$\ddot{y}_1 - d_1\dot{y}_2 - \kappa_1 y_1 = 0, \quad \ddot{y}_2 + d_3\dot{y}_1 - \kappa_3 y_2 = 0, \quad \ddot{y}_3 + 2\dot{y}_4 - \bar{\kappa}_2 y_3 = 0, \quad \ddot{y}_4 - 2\dot{y}_3 - \bar{\kappa}_2 y_4 = 0, \tag{3.5.7}$$

где

$$\sigma_1 = 2y_4 sI + y_2 cI, \quad \sigma_3 = y_1 cI + y_3 sI. \tag{3.5.8}$$

Система (3.5.7), (3.5.8) наблюдаема тогда и только тогда, когда [50]

$$\operatorname{rank} W_y(\lambda) = 4 \quad \forall\lambda, \tag{3.5.9}$$

$$W_y(\lambda) = \begin{bmatrix} W_1 & O_2 \\ O_2 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} \lambda^2 - \kappa_1 & -d_1\lambda \\ d_3\lambda & \lambda^2 - \kappa_3 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 - \bar{\kappa}_2 & 2\lambda \\ -2\lambda & \lambda^2 - \bar{\kappa}_2 \end{bmatrix},$$

$$W_3 = E_2 cI, \quad W_4 = sI \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Условие наблюдаемости (3.5.9) выполняется, если хотя бы одно из выражений Δ_j не обращается в нуль:

$$\Delta_1 = 2(sI)^2[(\lambda^2 - \kappa_1)(\lambda^2 - \kappa_3) + d_1 d_3 \lambda^2],$$
$$\Delta_2 = 2sIcI\lambda[\lambda^2 - \kappa_1 + d_1(\lambda^2 - \bar{\kappa}_2)],$$
$$\Delta_3 = sIcI[-(\lambda^2 - \kappa_1)(\lambda^2 - \bar{\kappa}_2) + 4d_1\lambda^2],$$

$$\Delta_4 = 2sIcI[(\lambda^2-\kappa_3)(\lambda^2-\bar\kappa_2)-d_3\lambda^2],$$
$$\Delta_5 = sIcI\lambda[4(\lambda^2-\kappa_3)+d_3(\lambda^2-\bar\kappa_2)],$$
$$\Delta_6 = (cI)^2[4\lambda^2+(\lambda^2-\bar\kappa_2)^2].$$

Характеристическое уравнение системы (3.5.7) имеет корни $\lambda_{1,2}=0$ при $\bar\kappa_2=0$. Тогда

$$\Delta_1=\kappa_1\kappa_3,\quad \Delta_2=\Delta_3=\Delta_4=\Delta_5=\Delta_6=0.$$

Отсюда следует, что система (3.5.7) не наблюдаема по измерениям (3.5.8), если выполняются условия

$$\bar\kappa_2=0,\quad \kappa_1=0 \quad \text{либо} \quad \bar\kappa_2=0,\quad \kappa_3=0.$$

или

$$J_2=J_3,\quad J_1=\frac{4}{3}J_3 \quad \text{либо} \quad J_1=J_2,\quad J_3=\frac{2}{3}J_1. \tag{3.5.10}$$

Можно показать, что в этих случаях исходная нестационарная система (3.5.1)–(3.5.3) наблюдаема.

Для построения алгоритма оценки следует представить стационарную систему (3.5.7), (3.5.8) в форме Коши

$$\dot\eta = A_\eta\eta,\quad \sigma=C_\eta\eta,\quad \eta=\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & \dot y_1 & \dot y_2 & y_3 & y_4 & \dot y_3 & \dot y_4\end{bmatrix}^\top, \tag{3.5.11}$$

$$A_\eta=\begin{bmatrix}O_2 & E_2 & O_2 & O_2\\ A_{21} & A_{22} & O_2 & O_2\\ O_2 & O_2 & A_{33} & E_2\\ O_2 & O_2 & \kappa_2E_2 & A_{33}\end{bmatrix},\quad A_{21}=\begin{bmatrix}\kappa_1 & 0\\ 0 & \kappa_3\end{bmatrix},\quad A_{22}=\begin{bmatrix}0 & d_1\\ -d_3 & 0\end{bmatrix},$$

$$A_{33}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\quad C_\eta=\begin{bmatrix}cIE_2 & O_2 & sIC_3 & O_2\end{bmatrix},\quad C_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

Если стационарная система (3.5.11) наблюдаема, то можно строить те или иные алгоритмы оценивания аналогично тому, как это делалось в задачах управления.

3.6. Приложение

3.6.1. Приложение 1. В работе принята приближенная модель магнитного поля Земли в виде прямого магнитного диполя (1.1.8). Как уже указывалось в главе 1, такая аппроксимация пригодна для аналитических исследований и является традиционной. В действительности структура магнитного поля Земли (МПЗ) значительно сложнее. МПЗ имеет мультипольный характер и, кроме того, совершает суточное вращение вместе с Землей. Такие мультипольные модели МПЗ представлены в литературе [5, 37, 39, 59, 60].

Покажем, что применяемый в работе подход к исследованию линейных систем, нестационарных по управлению, описанный в главе 3, где использовалась простая модель МПЗ (1.1.8), может быть использован и при исследовании задач стабилизации стационарных движений спутника при помощи магнитных моментов и в случае более сложной модели магнитного поля [39].

В соответствие с работой [39] рассмотрим движение спутника, центр масс которого движется по круговой экваториальной орбите радиуса R. Пусть $\mathbf{V}_c=R(\omega_0-\omega_E)\mathbf{e}_\tau$ — скорость центра масс спутника относительно магнитного поля. Здесь ω_0 — орбитальная угловая скорость, ω_E — угловая скорость суточного вращения Земли.

Компоненты вектора магнитной индукции $\mathbf{b}(t)$ в орбитальной системе координат имеют вид [37]

$$b_\tau=\left(\frac{R_E}{R}\right)^3(g_1^1s\tau-h_1^1c\tau)+\sqrt3\left(\frac{R_E}{R}\right)^4(g_2^2s2\tau-h_2^2c2\tau)+ \\ +\frac{\sqrt6}{4}\left(\frac{R_E}{R}\right)^5\left[\sqrt{15}\big(g_3^3s3\tau-h_3^3c3\tau\big)-\big(g_3^1s\tau-h_3^1c\tau\big)\right], \tag{3.6.1a}$$

$$b_n=-\left(\frac{R_E}{R}\right)^3g_0^1-\sqrt3\left(\frac{R_E}{R}\right)^4(g_2^1c\tau+h_2^1s\tau)-\frac12\left(\frac{R_E}{R}\right)^5\left[\sqrt{15}\big(g_3^2c2\tau+h_3^2s2\tau\big)-3g_{33}^0\right], \tag{3.6.1b}$$

$$b_r = 2\left(\frac{R_E}{R}\right)^3 (g_1^1 c\tau + h_1^1 s\tau) + \frac{3}{2}\left(\frac{R_E}{R}\right)^4 \left[\sqrt{3}\big(g_2^2 c2\tau + h_2^2 s2\tau\big) - g_2^0\right] + \\ + \sqrt{2}\left(\frac{R_E}{R}\right)^5 \left[\sqrt{5}\big(g_3^3 c3\tau + h_3^3 s3\tau\big) - \sqrt{3}\big(g_3^1 c\tau + h_3^1 s\tau\big)\right]. \quad (3.6.1c)$$

Здесь g_n^m, h_n^m — гауссовы коэффициенты; $\tau = \omega_0(1-\varepsilon)t$, $\varepsilon = \omega_E/\omega_0$.

Выражения для b_τ, b_n, b_r содержат периодические функции с частотами, равными 1, 2, 3. Для пояснения сути предложенного выше подхода к исследованию систем, нестационарных по управлению, ограничимся в выражениях (3.6.1) рассмотрением только частот 1 и 2. Учет слагаемых с частотой 3 просто увеличит порядок приведенных стационарных систем.

Будем считать, как и ранее, что управляющий момент создается за счет взаимодействия собственного магнитного момента спутника с геомагнитным полем (см. формулу (1.1.6))

$$\mathbf{M}_m^c = \mathbf{m} \times \mathbf{b}. \quad (3.6.2)$$

Линеаризованные уравнения движения, управляемого моментом (3.6.2), запишем в виде, аналогичном уравнениям (1.1.16), в которых безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ следует заменить на $\tau = \omega_0(1-\varepsilon)t$.

В соответствии с этим уравнения (1.1.16) примут вид

$$\ddot{x}_1 - \tilde{d}_1\dot{x}_3 - \tilde{\kappa}_1 x_1 = M_1, \quad \ddot{x}_3 + \tilde{d}_3\dot{x}_1 - \tilde{\kappa}_3 x_3 = M_3, \quad \ddot{x}_2 - \tilde{\kappa}_2 x_2 = M_2. \quad (3.6.3)$$

Здесь

$$\tilde{d}_j = \frac{d_j}{1-\varepsilon}, \quad \tilde{\kappa}_i = \frac{\kappa_i}{(1-\varepsilon)^2} \quad (j = 1, 2;\ i = 1, 2, 3).$$

Выражения для моментов имеют вид

$$M_1 = b_r m_2 - b_n m_3, \quad M_2 = b_\tau m_3 - b_r m_1, \quad M_3 = b_n m_1 - b_\tau m_2.$$

где

$$\begin{aligned} b_\tau &= \mu_0[(g_1^1 s\tau - h_1^1 c\tau) + \nu(g_2^2 s2\tau - h_2^2 c2\tau)], \\ b_n &= -\mu_0[g_0^1 + \nu(g_2^1 c\tau + h_2^1 s\tau)], \\ b_r &= \mu_0\left[2(g_1^1 c\tau + h_1^1 s\tau) + \frac{3}{2}\nu(g_2^2 c2\tau + h_2^2 s2\tau - \tilde{g}_2^0)\right]. \end{aligned}$$

Здесь

$$\mu_0 = \left(\frac{R_E}{R}\right)^3, \quad \nu = \sqrt{3}\frac{R_E}{R}, \quad \tilde{g}_2^0 = \frac{g_2^0}{\sqrt{3}}.$$

С учетом всех обозначений линеаризованные уравнения управляемого движения принимают вид

$$\ddot{x}_1 - \tilde{d}_1\dot{x} - \tilde{\kappa}_1 x_1 = \\ = \mu_*\left\{\left[2(g_1^1 c\tau + h_1^1 s\tau) + \frac{3}{2}\nu(g_2^2 c2\tau + h_2^2 s2\tau - \tilde{g}_2^0)\right] u_2 - [g_0^1 + \nu(g_2^1 c\tau + h_2^1 s\tau)]u_3\right\}, \quad (3.6.4a)$$

$$\ddot{x}_3 + \tilde{d}_3\dot{x}_1 - \tilde{\kappa}_3 x_3 = -\mu_*\{[g_0^1 + \nu(g_2^1 c\tau + h_2^1 s\tau)]u_1 + [(g_1^1 s\tau - h_1^1 c\tau) + \nu(g_2^2 s2\tau - h_2^2 c2\tau)]u_2\}, \quad (3.6.4b)$$

$$\ddot{x}_2 - \tilde{\kappa}_2 x_2 = \mu_*\Big\{[(g_1^1 s\tau - h_1^1 c\tau) + \nu(g_2^2 s2\tau - h_2^2 c2\tau)]u_3 - \\ - \left[2(g_1^1 c\tau + h_1^1 s\tau) + \frac{3}{2}\nu(g_2^2 c2\tau + h_2^2 s2\tau - \tilde{g}_2^0)\right] u_1\Big\}, \quad (3.6.4c)$$

где

$$\mu_* = \frac{\mu_0}{\omega_0^2(1-\varepsilon)^2}.$$

Замена переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1c\tau + y_3s\tau + y_5c2\tau + y_7s2\tau + y_9,\\ x_3 &= y_2c\tau + y_4s\tau + y_6c2\tau + y_8s2\tau + y_{10},\\ x_2 &= y_{11}c\tau + y_{12}s\tau + y_{13}c2\tau + y_{14}s2\tau + y_{15} \end{aligned} \tag{3.6.5}$$

приводит систему (3.6.4) к стационарной системе:

$$\begin{gathered} \ddot y_1 - (1+\tilde\kappa_1)y_1 + 2\dot y_3 - \tilde d_1\dot y_2 - \tilde d_1 y_4 = \mu_*(2g_1^1u_2 + \nu g_2^1u_3),\\ \ddot y_3 - 2\dot y_1 - (1+\tilde\kappa_1)y_3 + \tilde d_1 y_2 - \tilde d_1\dot y_4 = \mu_*(2h_1^1u_2 + \nu h_2^1u_3),\\ \ddot y_5 - (4+\tilde\kappa_1)y_5 + 4\dot y_7 - \tilde d_1\dot y_6 - 2\tilde d_1 y_8 = \mu_*\frac{3}{2}\nu g_2^0u_2,\\ \ddot y_7 - (4+\tilde\kappa_1)y_7 - 4\dot y_5 + 2\tilde d_1 y_6 - \tilde d_1\dot y_8 = \mu_*\frac{3}{2}\nu h_2^2u_2,\\ \ddot y_9 - \tilde\kappa_1 y_9 - \tilde d_1\dot y_{10} = \mu_*\left(-\frac{3}{2}\nu\tilde g_2^0u_2 + g_0^1u_3\right), \end{gathered} \tag{3.6.6}$$

$$\begin{gathered} \ddot y_2 - (1+\tilde\kappa_3)y_2 + 2\dot y_4 + \tilde d_3\dot y_1 + \tilde d_3 y_3 = -\mu_*(\nu g_2^1u_1 - h_1^1u_2),\\ \ddot y_4 - 2\dot y_2 - (1+\tilde\kappa_3)y_4 - \tilde d_3 y_1 + \tilde d_3\dot y_3 = -\mu_*(\nu h_2^1u_1 + h_1^1u_2),\\ \ddot y_6 - (4+\tilde\kappa_3)y_6 + 4\dot y_8 + \tilde d_3\dot y_5 + 2\tilde d_3 y_7 = \mu_*\nu h_2^2u_2,\\ \ddot y_8 - 4\dot y_6 - (4+\tilde\kappa_3)y_8 - 2\tilde d_3 y_5 + \tilde d_3\dot y_7 = -\mu_*\nu g_2^2u_2,\\ \ddot y_{10} + \tilde d_3\dot y_9 - \tilde\kappa_3 y_{10} = -\mu_* g_0^1u_1, \end{gathered} \tag{3.6.7}$$

$$\begin{gathered} \ddot y_{11} - (1+\tilde\kappa_2)y_{11} + 2\dot y_{12} = -\mu_*(2g_1^1u_1 + h_1^1u_3),\\ \ddot y_{12} - 2\dot y_{11} - (1+\tilde\kappa_2)y_{12} = -\mu_*(2h_1^1u_1 - g_1^1u_3),\\ \ddot y_{13} - (4+\tilde\kappa_2)y_{13} + 4\dot y_{14} = -\mu_*\left(\nu h_2^2u_3 + \frac{3}{2}\nu g_2^2u_1\right),\\ \ddot y_{14} - 4\dot y_{13} - (4+\tilde\kappa_2)y_{14} = \mu_*\left(\nu g_2^2u_3 - \frac{3}{2}\nu h_2^2u_1\right),\\ \ddot y_{15} - \tilde\kappa_2 y_{15} = -\mu_*\frac{3}{2}\nu\tilde g_2^0u_1. \end{gathered} \tag{3.6.8}$$

Если не включать в замену (3.6.5) переменные, содержащие $\sin 2\tau$, $\cos 2\tau$, т.е. положить

$$y_5 = y_6 = y_7 = y_8 = y_{13} = y_{14} = 0, \quad g_2^2 = h_2^2 = 0,$$

то система (3.6.6)–(3.6.8) примет вид

$$\begin{gathered} \ddot y_1 - (1+\tilde\kappa_1)y_1 + 2\dot y_3 - \tilde d_1\dot y_2 - \tilde d_1 y_4 = \mu_*(2g_1^1u_2 + \nu g_2^1u_3),\\ \ddot y_2 - (1+\tilde\kappa_3)y_2 + 2\dot y_4 + \tilde d_3\dot y_1 + d_3 y_3 = -\mu_*(\nu h_2^1u_1 - h_1^1u_2),\\ \ddot y_3 - 2\dot y_1 - (1+\tilde\kappa_1)y_3 + \tilde d_1 y_2 - \tilde d_1\dot y_4 = \mu_*(2h_1^1u_2 + \nu h_2^1u_3),\\ \ddot y_4 - 2\dot y_2 - (1+\tilde\kappa_3)y_4 - \tilde d_3 y_1 + \tilde d_3\dot y_3 = -\mu_*(\nu h_2^1u_1 + g_1^1u_2),\\ \ddot y_9 - \tilde\kappa_1 y_9 - \tilde d_1\dot y_{10} = \mu_*\left(-\frac{3}{2}\nu\tilde g_2^0u_2 + g_0^1u_3\right),\\ \ddot y_{10} + \tilde d_3\dot y_9 - \tilde\kappa_3 y_{10} = -\mu_* g_0^1u_1,\\ \ddot y_{11} - (1+\tilde\kappa_2)y_{11} + 2\dot y_{12} = -\mu_*(2g_1^1u_1 + h_1^1u_3),\\ \ddot y_{12} - 2\dot y_{11} - (1+\tilde\kappa_2)y_{12} = -\mu_*(2h_1^1u_1 - g_1^1u_3),\\ \ddot y_{15} - \tilde\kappa_2 y_{15} = -\mu_*\frac{3}{2}\nu\tilde g_2^0u_1. \end{gathered} \tag{3.6.9}$$

Сравним систему (3.6.9) с системой (3.1.7)–(3.1.9), в которой замена переменных имела вид (3.1.6), которая отличается от замены (3.6.5) только тем, что $y_9 \equiv y_5$, $y_{10} \equiv y_6$, $y_{15} \equiv 0$, $y_{11} \equiv y_7$, $y_{12} \equiv y_8$ и кроме того, $\tilde{d}_j = d_j$, $\tilde{\kappa}_i = \kappa_i$ $(j = 1, 2;\ i = 1, 2, 3)$, $g_1^1 = g_2^1 = h_2^1 = \tilde{g}_2^0 = 0$.

Последние условия связаны с тем, что в формулах [37] использована несколько более общая модель для представления вектора $\mathbf{b}(t)$, отличная от модели (1.1.8) при $I = 0$. В этом случае уравнения (3.6.9) совпадают с уравнениями (3.1.7)–(3.1.8).

3.6.2. Приложение 2. Уравнения движения спутника (1.1.16) при движении по экватору $I = 0$ с учетом членов второго приближения имеют вид

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= \ldots + \frac{\delta_1}{J_1}\dot{x}_2(\dot{x}_3 - x_1) + \frac{\delta_3}{J_1}d_3x_2(\dot{x}_1 + x_3) + qR\omega_0\frac{\mu_0}{J_1}v_3x_1,\\
\ddot{x}_3 &= \ldots - \frac{\delta_2}{J_3}\dot{x}_2(\dot{x}_1 + x_3) + \frac{\delta_3}{J_1}d_3x_2(\dot{x}_3 - 4x_1) - qR\omega_0\frac{\mu_0}{J_3}v_1x_1,\\
\ddot{x}_2 &= \ldots - \frac{\delta_1}{J_2}\dot{x}_1\dot{x}_3 + \frac{\delta_2}{J_2}x_3\dot{x}_3 - \frac{\delta_2\delta_4}{J_2J_3}x_1(\dot{x}_1 + x_3) - \frac{\mu_0}{J_2}(u_1x_1 + u_3x_2) + qR\omega_0\frac{\mu_0}{J_2}v_3x_2.
\end{aligned}$$

Здесь $\delta_1 = J_1 + J_2 - J_3$; $\delta_2 = J_2 + J_3 - J_1$; $\delta_3 = J_3 - J_1$; $\delta_4 = J_3 - J_2$.

При движении по полярной орбите $I = \pi/2$ уравнения (1.1.16) с учетом нелинейных членов имеют вид

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= \ldots + \frac{\delta_1}{J_1}\dot{x}_2(\dot{x}_3 - x_1) + \frac{\delta_3}{J_1}d_3x_2(\dot{x}_1 + x_3) + \frac{\mu_0}{J_1}(x_3\cos\tau - 2x_1\sin\tau)u_3,\\
\ddot{x}_3 &= \ldots - \frac{\delta_2}{J_3}\dot{x}_2(\dot{x}_1 + x_3) + \frac{\delta_3}{J_1}d_3x_2(\dot{x}_3 - 4x_1) - \frac{\mu_0}{J_3}(x_3\cos\tau - 2x_1\sin\tau)u_1,\\
\ddot{x}_2 &= \ldots - \frac{\delta_1}{J_2}\dot{x}_1\dot{x}_3 + \frac{\delta_2}{J_2}x_3\dot{x}_3 - \frac{\delta_2\delta_4}{J_2J_3}x_1(\dot{x}_1 + x_3) -\\
&\qquad - \frac{\mu_0}{J_2}x_2(u_1\cos\tau + 2u_3\sin\tau) - 2\frac{\mu_0 qR\omega_0}{J_2}\sin\tau(v_1x_1 + v_3x_3).
\end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены новые результаты в решении задач стабилизации стационарных движений спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях.

Предложен аналитический подход, позволяющий эффективно проводить структурный анализ системы, корректно строить алгоритмы стабилизации. Этот подход может быть использован при решении различных задач космической тематики.

Представлены решения следующих задач стабилизации стационарных движений спутника в гравитационном поле:

1. стабилизация положения равновесия (в том числе с учетом аэродинамических сил) при помощи магнитных моментов и моментов сил Лоренца;
2. стабилизация при совместном использовании магнитных и лоренцевых моментов;
3. стабилизация регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов.

Результаты подробного математического моделирования предложенных алгоритмов подтверждают эффективность разработанной методики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. Ю., Тихонов А. А.* Электродинамическая стабилизация программного вращения ИСЗ в орбитальной системе координат// Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. Астрон. — 2012. — № 2. — С. 79–90.
2. *Александров В. В, Лемак С. С., Парусников Н. А.* Лекции по механике управляемых систем. — М.: Курс, 2018.
3. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.

4. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
5. *Белецкий В. В., Хентов А. А.* Вращательное движение намагниченного спутника. — М.: Наука, 1985.
6. *Дубошин Г. Н.* О вращательном движении искусственных небесных тел// Бюлл. ИТА АН СССР. — 1960. — *7*, № 7. — С. 511–520.
7. *Каленова В. И., Морозов В. М.* Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. — М.: Физматлит, 2010.
8. *Каленова В. И., Морозов В. М.* Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением// Прикл. мат. мех. — 2012. — *76*, № 4. — С. 576–588.
9. *Каленова В. И., Морозов В. М.* Об управлении линейными нестационарными системами специального вида// Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2013. — № 3. — С. 6–15.
10. *Калман Р. Е.* Об общей теории систем управления// в кн.: Тр. Конгр. ИФАК. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 521–547.
11. *Калман Р. Е., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.
12. *Кондурарь В. Т.* Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара// Прикл. мех. техн. физ/ — 1960. — *36*, № 5. — С. 890–901.
13. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968.
14. *Лурье А. А.* Аналитическая механика. — М.: ГИФМЛ, 1961.
15. *Морозов В. М.* Об устойчивости движения гиростата под действием гравитационных магнитных и аэродинамических моментов// Космич. исслед. — 1967. — *5*, № 5. — С. 727–732.
16. *Морозов В. М.* Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов// Космич. исслед. — 1969. — *7*, № 3. — С. 395–401.
17. *Морозов В. М.* Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного и аэродинамического моментов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. Мат. Мех. — 1968. — № 6. — С. 109–111.
18. *Морозов В. М.* Устойчивость движения космических аппаратов// в кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. — М.: ВИНИТИ, 1971. — С. 1–83.
19. *Морозов В. М., Каленова В. И.* Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации// Космич. исслед. — 2020. — *58*, № 3. — С. 199–207.
20. *Морозов В. М., Каленова В. И.* Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов// Космич. исслед. — 2021. — *59*, № 5. — С. 393–407.
21. *Морозов В. М., Каленова В. И., Рак М. Г.* О стабилизации регулярныз прецессий спутника при помощи магнитных моментов// Прикл. мат. мех. — 2021. — *85*, № 4. — С. 436–453.
22. *Морозов В. М., Каленова В. И.* Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил// Космич. исслед. — 2022. — *60*, № 3. — С. 246–253.
23. *Овчинников М. Ю., Пеньков В. И., Ролдугин Д. С., Иванов Д. С.* Магнитные системы ориентации малых спутников. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016.
24. *Овчинников М. Ю., Ролдугин Д. С.* Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников// Космические аппараты и технологии. — 2019. — *3*, № 2 (28). — С. 73–86.
25. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978.
26. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. — М.: ВЦ АН СССР, 1967.
27. *Сазонов В. В., Чебуков С. Ю., Кузнецова Е. Ю.* Двухосная закрутка спутника в плоскости орбиты// Космич. исслед. — 2000. — *38*, № 3. — С. 296–306.
28. *Сарычев В. А.* Вопросы ориентации искусственных спутников// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 11. — М.: ВИНИТИ, 1978.
29. *Сарычев В. А.* Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов// в кн.: Проблемы аналитической механики и теории устойчивости. — М.: Физматлит, 2009. — С. 111–126.
30. *Сарычев В. А., Овчинников М. Ю.* Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 23. — М.: ВИНИТТИ, 1985.
31. *Тихонов А. А.* Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле// Космич. исслед. — 2003. — *41*, № 1. — С. 69–79.
32. *Хентов А. А.* Движение около центра масс экваториального спутника на круговой орбите при взаимодействии магнитного и гравитационного полей Земли// 31 — 1967. — С. 947–950.

33. *Хентов А. А.* Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника Земли вокруг своего центра масс// Космич. исслед. — 1968. — *6*, № 5. — С. 793–795.
34. *Черноусько Ф. Л.* Об устойчивости регулярных прецессий спутника// Прикл. мат. мех. — 1964. — *28*, № 1. — С. 155–157.
35. *Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system// Adv. Space Res. — 2018. — *62.* — P. 142–151.
36. *Aleksandrov A. Yu, Antipov K. A., Platonov A. V., Tikhonov A. A.* Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the König frame// Nonlinear Dyn. — 2015. — *82.* — P. 1493–1505.
37. *Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite// Aerospace Sci. Techn. — 2020. — № 3. — P. 1–12.
38. *Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Monoaxial electrodynamic stabilization of an artificial Earth satellite in the orbital coordinate system via control with distributed delay// IEEE Access. — 2021. — *9.* — 132623–132630.
39. *Antipov K. A., Tikchonov A. A.* Multipole models of the geomagnetic field: Construction of the Nth approximation// Geomagnetizm and Aeronomy. — 2013. — *53*, № 2. — P. 271–281.
40. *Antipov K. A., Tikhonov A. A.* On satellite electrodynamic attitude stabilization// Aerospace Sci. Techn. — 2014. — *33.* — P. 92–99.
41. *Bin Zhou* Global stabilization of periodic linear systems by bounded controls with application to spacecraft magnetic attitude control// Automatica. — 2015. — *60.* — P. 145–154.
42. *Brewer J. W.* Kronecker Products and Matrix calculus in system Theory// IEEE Trans. Circ. Syst. — 1978. — *CAS-25*, № 9. — P. 772–781.
43. *Chang A.* An algebraic characterization of controllability// IEEE Trans. Automat. Control. — 1965. — *AC-10*, № 1. — P. 112–113.
44. *Cubas J., de Ruiter A.* Magnetic control without attitude determination for spinning spacecraft// Acta Astronaut. — 2020. — *169.* — P. 108–123.
45. *Cubas J., Farrahi A., Pindado S.* Magnetic attitude control for satellites in polar or sun synchronous orbits// J. Guid. Control Dynam. — 2015. — *38.* — P. 1947–1958.
46. *Frik M. A.* Attitude stability of satellites subjected to gravity gradient and aerodynamic torques// AIAA J. — 1970. — *8*, № 10. — P. 1780–1785.
47. *Giri D. K., Mukherjee B. K., Sinha M.* Three-axis global magnetic attitude control of Earth-pointing satellites in circular orbit: Three-axis global magnetic attitude control// Asian J. Control. — 2017. — *19*, № 6. — P. 2028–2041.
48. *Giri D. K. and Sinha M.* Magneto-Coulombic attitude control of Earth-pointing satellites// J. Guid. Control Dynam. — 2014. — *37*, № 6. — P. 1946–1960.
49. *Giri D. K., Sinha M.* Lorentz Force Based Satellite Attitude Control// J. Inst. Eng. India. Ser. C. — 2016. — *97.* — P. 279–290.
50. *Hautus M. L. J.* Controllability and observability conditions of linear autonomous systems// Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. — 1969. — *72.* — P. 443–448.
51. *Huang X., Yan Y.* Fully actuated spacecraft attitude control via the hybrid magnetocoulombic and magnetic torques// J. Guid. Control Dynam. — 2017. — *40*, № 12. — P. 1–8.
52. *Ivanov D. S., Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Doronin D. M., Ovchinnikov A. V.* Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties// Acta Astronaut. — 2017. — *132.* — P. 103–110.
53. *Kalenova V. I., Morozov V. M.* Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces// Aerospace. Sci. Technol. — 2020. — *106.* — 106105.
54. *Kalman R. E.* Lectures on Controllability and Observability. — Bologna, Italy: C.I.M.E., 1969.
55. *Laub A. J., Arnold W. F.* Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models// IEEE Trans. Automat. Control. — 1984. — *29*, № 2. — P. 163–165.
56. *Likins P. W.* Stability of a symmetrical satellite in attitudes fixed in an orbiting reference frame// J. Astronaut. Sci. — 1965. — *12*, № 1. — P. 18–24.
57. *Morozov V. M., Kalenova V. I.* Linear time-varying systems and their applications to cosmic problems// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959.* — 020003.
58. *Mostaza-Prieto D., Roberts P. C. E.* Methodology to analyze attitude stability of satellites subjected to aerodynamic torques// J. Guid. Control Dynam. — 2016. — *39.* — P. 437–449.

59. *Nababi M., Barati M.* Mathematical modeling and simulation of the Earth's magnetic field: A comparative study of the models on the spacecraft of attitude control application// Appl. Math. Model. — 2017. — *46.* — P. 365–381.
60. *Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Pichuzhkina A. V.* Geomagnetic field models for satellite angular motion studies// Acta Astronaut. — 2018. — *144.* — P. 171–180.
61. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S.* A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites// Progr. Aerospace Sci. — 2019. — *109.* — 100546.
62. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Penkov V. I.* Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study// Acta Astronaut. — 2015. — *110.* — P. 279–286.
63. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Ivanov D. S., Penkov V. I.* Choosing control parameters for three axis magnetic stabilization in orbital frame// Acta Astronaut. — 2015. — *116.* — P. 74–68.
64. *Psiaki M.* Magnetic torque attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation// J. Guid. Control Dynam. — 2001. — *24*, № 2. — P. 386–394.
65. *Psiaki M. L.* Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torquing// J. Guid. Control Dynam. — 2004. — *27.* — P. 347–355.
66. *Psiaki M. L., Martel F., Pal P. K.* Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data// J. Guid. Control Dynam. — 1990. — *13*, № 3. — P. 506–514.
67. *Psiaki M. L., Oshman Y.* Spacecraft attitude rate estimation from geomagnetic fiend measurements// J. Guid. Control Dynam. — 2003. — *26*, № 2. — P. 244–252.
68. *Sarychev V. A., Mirer S. A.* Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// Celestial Mech. Dynam. Astronom. — 2000. — *76*, № 1. — P. 55–68.
69. *Sarychev V. A., Mirer S. A., Degtyarev A. A., Duarte E. K.* Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// Celestial Mech. Dynam. Astronom. — 2007. — *97*, № 4. — P. 267–287.
70. *Searcy J. D., Pernicka H. J.* Magnetometer-only attitude determination using novel two-step Kalman filter approach// J. Guid. Control Dynam. — 2012. — *35*, № 6. — P. 1693–1701.
71. *Silani E., Lovera M.* Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results// Control Eng. Pract. — 2005. — *13.* — P. 357–371.
72. *Sofyal A., Jafarov E. M., Wisniewski R.* Robust and global attitude stabilization of magnetically actuated spacecraft through sliding mode// Aerospace Sci. Technol. — 2018. — *76.* — P. 91–104.
73. *Sukhov E.* Numerical approach for bifurcation and orbital stability analysis of periodic motions of a 2-DOF autonomous Hamiltonian system// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1925.* — 012013.
74. *Sutherland R., Kolmanovsky I. K., Girard A. R.* Attitude control of a 2U cubesat by magnetic and air drag torques// IEEE Trans. Control Syst. Techn. — 2018. — *27*, № 3. — P. 1047–1059.
75. *Tortora P., Oshman Y., Santoni F.* Spacecraft angular rate estimation from magnetometer data on using and analytic predictor// J. Guid. Control Dynam. — 2004. — *27*, № 3. — P. 365–373.
76. *Wertz J.* Spacecraft Attitude Determination and Control. — Dordrecht: D. Reidel, 1978.
77. *Yang Y.* Controllability of spacecraft using only magnetic torques// IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst. — 2016. — *52*, № 2. — P. 955–962.
78. *Zhou K., Huang H., Wang X., Sun L.* Magnetic attitude control for Earth-pointing satellites in the presence of gravity gradient// Aerospace Sci. Techn. — 2017. — *60.* — P. 115–123.

Морозов Виктор Михайлович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `moroz@imec.msu.ru`

Каленова Вера Ильинична
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `kalenova44@mail.ru`

Рак Михаил Геннадьевич
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `mihailrak@mail.ru`