ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 125–132
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-125-132

УДК 519.642.5

К ИДЕНТИФИКАЦИИ ЯДЕР ВОЛЬТЕРРА В ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2023 г. **С. В. СОЛОДУША, Е. Д. АНТИПИНА**

Аннотация. В работе предложен алгоритм идентификации нестационарной линейной динамической системы, основанный на применении тестовых сигналов кусочно-линейного вида и сведении исходной задачи к решению интегрального уравнения Вольтерра I рода с двумя переменными пределами интегрирования. Численная реализация данного алгоритма базируется на квадратурной формуле средних прямоугольников и методе «product integration». Исследована сходимость метода средних прямоугольников для выделенного нового класса линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода.

Ключевые слова: идентификация, нестационарная динамическая система, квадратура средних прямоугольников, метод «product integration», сходимость.

ON THE IDENTIFICATION VOLTERRA KERNELS IN INTEGRAL MODELS OF LINEAR NONSTATIONARY DYNAMICAL SYSTEMS

© 2023 **S. V. SOLODUSHA, E. D. ANTIPINA**

Abstract. In this paper, we propose an identification algorithm for a nonstationary linear dynamical system. Conceptually, this algorithm is based on the use of piecewise linear test signals and the reduction of the original problem to a Volterra integral equation of the first kind with two variable integration limits. The numerical implementation of this algorithm is based on the quadrature formula of the middle rectangles and the product integration method. The convergence of the method of middle rectangles for a new class of linear Volterra integral equations is examined.

***Keywords and phrases*:** identification, nonstationary dynamical system, quadrature of middle rectangles, product integration method, convergence.

***AMS Subject Classification*:** 45D05

1. Введение. Интегральные уравнения Вольтерра I рода хорошо известны в теории математического моделирования динамических систем (см. [9]). Как правило, предполагается стационарность динамической системы, так что переходные характеристики системы представлены ядрами Вольтерра типа свертки. Основные подходы к решению задачи непараметрической идентификации моделей типа «вход-выход» связаны с выбором входных тестовых сигналов. Например, в качестве таких сигналов используются белый шум (см. [13]), волновые сигналы (см. [8]), а также

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00409).

сигналы кусочно-постоянного вида (см. [6, 7]). Применение интегральных уравнений типа Вольтерра при описании нестационарных динамических систем ограничивается не только рядом технических трудностей, но и нетривиальностью идентификации ядер (подынтегральной функции $K(t,s)$; см. [4]. Тем не менее, данная задача является актуальной, так как учет нестационарных свойств динамической системы, как показано в [2], позволяет повысить точность моделирования за счет более полной информации об откликах исследуемого объекта.

Построить модель вида

$$\int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t = [0,T], \tag{1}$$

означает восстановить переходные характеристики динамической системы. В [1] предложен подход к построению интегральной модели (1), в которой $f(t)$ — такая реакция динамической системы на входной сигнал $x(t)$, что $f(0) = 0$, $f'(t) \in C_{[0,T]}$, с помощью тестовых сигналов $x_\nu(t)$ в виде линейной комбинации функций Хевисайда с отклоняющимся аргументом

$$x_\nu(t) = e(t) - e(t-\nu), \quad 0 \leqslant \nu \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

где

$$e(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Указанный подход позволяет свести задачу идентификации несимметричной функции $K(t,s)$ к решению интегрального уравнения Вольтерра I рода, которое имеет явную формулу обращения (см. [1]):

$$K(t,\nu) = f'_\nu(t,\nu),$$

где $f(t,\nu)$ — отклик (1) на сигнал вида (2).

Данная статья развивает указанный в [1, 2, 7] подход. В предположении, что правая часть $f(t)$ уравнения (1) достаточно гладкая для проведения требуемых вычислений, рассмотрено построение интегральной модели нестационарной динамической системы с помощью тестовых сигналов из класса кусочно-линейных функций. Такой вид входных воздействий является приемлемым при тестировании технических (энергетических) объектов (см. [12]).

2. Постановка задачи идентификации модели (1)**.** Рассмотрим способ идентификации интегральной модели (1), основанный на использовании тестовых входов $x_\nu(t)$ и выходов $f_\nu(t)$, $t,\nu \in \Delta = \{t,\nu : 0 \leqslant \nu \leqslant t \leqslant T\}$, вида

$$x(t) \equiv x_\nu(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ t/\nu, & 0 < t \leqslant \nu, \\ 1, & \nu \leqslant t, \end{cases} \qquad f(t) \equiv f_\nu(t) = \begin{cases} 0, & t = \nu = 0, \\ g(t,\nu), & 0 < \nu \leqslant t, \end{cases} \tag{3}$$

где $x_\nu(t)$ — однопараметрическое семейство кусочно-линейных функций, а отклик $f_\nu(t) \in C^{(2)}_\Delta$. Подстановка (3) в (1) приводит к следующему интегральному уравнению (см. [11]):

$$\int\limits_0^\nu K(t,s)\frac{s}{\nu}ds + \int\limits_\nu^t K(t,s)ds = g(t,\nu), \tag{4}$$

имеющему явную формулу обращения:

$$K(t,\nu) = -\left(2g'_\nu(t,\nu) + \nu g''_{\nu^2}(t,\nu)\right), \quad t,\nu \in \Delta.$$

В [5] получены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие разрешимость (4) в классе C_Δ.

Как отмечено в [3], для целей моделирования динамической системы с помощью (1) достаточно идентифицировать интеграл от функции $K(t,\nu)$. Поэтому далее в статье, с привлечением квадратурной формулы средних прямоугольников и метода product integration (см. [10]), рассмотрены соответственно два вычислительных алгоритма: идентификации ядра Вольтерра и идентификации интеграла от него.

3. Численная идентификация интегральной модели (4). Для построения вычислительных алгоритмов введем равномерную сетку

$$t_i = ih, \quad i = \overline{1,n}, \quad n = \left[\frac{T}{h}\right], \tag{5}$$

где $[\cdot]$ означает целую часть числа, а также подсетку

$$t_{j-\frac{1}{2}} = \left(j - \frac{1}{2}\right)h, \quad j = \overline{1,i}. \tag{6}$$

3.1. Применение квадратурной формулы средних прямоугольников. Будем искать решение сеточного аналога (4) относительно $K^h(t_i, t_{j-1/2})$ с помощью метода средних прямоугольников. Аппроксимируя интегралы в (4) суммами и учитывая соотношение

$$\frac{t_{l-1/2}}{t_j} = \frac{l-1/2}{j},$$

получаем

$$h\sum_{l=1}^{j}\frac{l-1/2}{j}K^h(t_i, t_{l-1/2}) + h\sum_{l=j+1}^{i}K^h(t_i, t_{l-1/2}) = g(t_i, t_j), \quad i > j, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1, i-1}. \tag{7}$$

Для $t_i = t_j$ $(i = j)$ сеточный аналог (4) выглядит следующим образом:

$$h\sum_{l=1}^{i}\frac{l-1/2}{i}K^h(t_i, t_{l-1/2}) = g(t_i, t_i), \quad i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Под замкнутостью системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) далее будем понимать равенство числа уравнений числу неизвестных. Для представленной СЛАУ сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. *Система линейных алгебраических уравнений* (7), (8) *является замкнутой и невырожденной. Ее решение единственно и представимо в следующем виде*:

$$K^h(t_i, t_{i-1/2}) = -\frac{2(i-1)}{h}g(t_i, t_{i-1}) + \frac{2i}{h}g(t_i, t_i), \qquad i = j, \tag{9}$$

$$K^h(t_i, t_{j-1/2}) = -\frac{2(j-1)}{h}g(t_i, t_{j-1}) + \frac{6j}{h}g(t_i, t_j) - \frac{4i}{h}g(t_i, t_i), \qquad i = j+1, \tag{10}$$

$$K^h(t_i, t_{j-1/2}) = -\frac{2(j-1)}{h}g(t_i, t_{j-1}) + \frac{6j}{h}g(t_i, t_j) + \\ + \frac{8}{h}\sum_{l=j+1}^{i-1}(-1)^{l+j}l \cdot g(t_i, t_l) + \frac{4i\cdot(-1)^{i+j}}{h}g(t_i, t_i), \quad i \geqslant j+2. \tag{11}$$

Доказательство. Покажем, что система удовлетворяет определению замкнутости, т.е. число уравнений системы (7), (8) совпадает с числом неизвестных. Исходя из условия несимметричности функции $K(t,s)$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, ее сеточный аналог $K^h(t_i, t_{j-1/2})$ представим в виде треугольной матрицы размера $(n \times n)$. С учетом дискретизации $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,i}$, количество искомых значений составляет $n(n+1)/2$. Подсчет числа уравнений дает следующую величину:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}1 = \sum_{i=1}^{n}i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Итак, число неизвестных в системе (7), (8) равно числу уравнений.

Теперь покажем, что СЛАУ (7), (8) невырождена. Представим (7), (8) в следующем виде:

$$AK = F, \quad F = \frac{1}{h} f,$$

где K — вектор, содержащий искомые значения, F — вектор, содержащий известные значения, A — заданная блочно-диагональная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1/4 & 3/4 & 1 & \dots & 1 \\ 1/6 & 1/2 & 5/6 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/(2i) & 3/(2i) & 5/(2i) & \dots & (2i-1)/(2i) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Определитель матрицы A определяется как произведение диагональных элементов этой матрицы:

$$\det A = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \ldots \cdot \det A_n.$$

Приведя матрицы A_i к треугольному виду

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1/6 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/(2i) \end{pmatrix},$$

находим

$$\det A_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2i} = \prod_{l=1}^{i} \frac{1}{2l} \quad \Rightarrow \quad \det A = \prod_{i=1}^{n} \prod_{l=1}^{i} \frac{1}{2l} \neq 0,$$

что свидетельствует о невырожденности системы (7), (8).

Таким образом, решение СЛАУ (7), (8) существует и единственно. Непосредственный поиск решения дает разностную схему вида (9)–(11). □

3.2. Применение метода product integtation. Рассмотрим далее задачу идентификации интегралов от ядер Вольтерра в (4) с привлечением метода product integration (pi-метод; см. [10]). Воспользуемся введенной сеткой дискретизации (5), (6). Согласно [10] аппроксимация (1) представима в виде

$$\int_{0}^{ih} K(ih,s)x(s)ds \approx \sum_{l=1}^{i} x\left(\left(l - \frac{1}{2}\right)h\right) \int_{(l-1)h}^{lh} K(ih,s)ds, \quad i = \overline{1,n}.$$

Применим pi-метод для получения сеточного аналога уравнения (4). Введя обозначение

$$m_{i,l} = \int_{(l-1)h}^{lh} K(ih,s)ds,$$

запишем (4) в виде

$$\frac{1}{j} \sum_{l=1}^{j} \left(l - \frac{1}{2}\right) m_{i,l} + \sum_{l=j+1}^{i} m_{i,l} = g(ih, jh), \quad j = \overline{1,i}, \quad i = \overline{1,n}; \tag{12}$$

это система относительно неизвестных $m_{i,j}$. Легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Система линейных алгебраических уравнений* (12) *является замкнутой и невырожденной. Ее решение единственно и представимо в следующем виде*:

$$m_{i,i} = -2(i-1) \cdot g(t_i, t_{i-1}) + 2i \cdot g(t_i, t_i), \qquad i = j, \tag{13}$$

$$m_{i,j} = -2(j-1) \cdot g(t_i, t_{j-1}) + 6j \cdot g(t_i, t_j) - 4i \cdot g(t_i, t_i), \qquad i = j+1, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} m_{i,j} = {} & -2(j-1) \cdot g(t_i, t_{j-1}) + 6j \cdot g(t_i, t_j) + \\ & + 8 \sum_{l=j+1}^{i-1} (-1)^{l+j} l \cdot g(t_i, t_l) + 4i \cdot (-1)^{i+j} \cdot g(t_i, t_i), \quad i \geqslant j+2. \end{aligned} \tag{15}$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

4. Исследование сходимости разностной схемы (9)–(11)**.** Рассмотрим вопрос о сходимости метода (9)–(11). Для краткости будем рассматривать только (9). Применим формулу Тейлора, чтобы разложить функции $g(t_i, t_{i-1})$ и $g(t_i, t_i)$ в окрестности точки

$$M_0 = \left(t_{i-1/2}, t_{i-1/2}\right) = \left(\left(i - \frac{1}{2}\right)h, \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} g(ih, (i-1)h) &= g\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)h, \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right) + \sum_{l=1}^{2} \frac{h^2}{l!} \left[\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g(t,\nu)}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial g(t,\nu)}{\partial \nu}\right)^l\right]_{M_0}, \\ g(ih, ih) &= g\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)h, \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right) + \sum_{l=1}^{2} \frac{h^2}{l!} \left[\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g(t,\nu)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial g(t,\nu)}{\partial \nu}\right)^l\right]_{M_0}. \end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя (16) в (9), получаем

$$\begin{aligned} K^h\left(ih, \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right) &= \frac{-2(i-1)}{h} \cdot g(ih, (i-1)h) + \frac{2i}{h} \cdot g(ih, ih) = \\ &= \left[\frac{-2(i-1)}{h} \cdot g(t,\nu) + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial g(t,\nu)}{\partial t} - \frac{\partial g(t,\nu)}{\partial \nu}\right) + \frac{h^2}{8}\left(\frac{\partial g(t,\nu)}{\partial t} - \frac{\partial g(t,\nu)}{\partial \nu}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2i}{h} \cdot g(t,\nu) + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial g(t,\nu)}{\partial t} + \frac{\partial g(t,\nu)}{\partial \nu}\right) + \frac{h^2}{8}\left(\frac{\partial g(t,\nu)}{\partial t} + \frac{\partial g(t,\nu)}{\partial \nu}\right)^2\right]_{M_0}. \end{aligned}$$

Далее, раскрывая скобки и приводя подобные, имеем

$$\begin{aligned} K^h\left(ih, \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right) &= \left[\frac{2}{h} \cdot g(t,\nu) + \frac{\partial g(t,\nu)}{\partial t} + (2i-1) \cdot \frac{\partial g(t,\nu)}{\partial \nu} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2i-1)h}{2} \cdot \frac{\partial^2 g(t,\nu)}{\partial t \partial \nu} + \frac{h}{4} \cdot \left(\frac{\partial^2 g(t,\nu)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g(t,\nu)}{\partial \nu^2}\right)\right]_{M_0}. \end{aligned} \tag{17}$$

Используя формулу (4), определим $g(t,\nu)$, $\partial g(t,\nu)/\partial t$, $\partial g(t,\nu)/\partial \nu$, $\partial^2 g(t,\nu)/\partial t\partial\nu$ в точке M_0 и подставим их в (17):

$$K^h\left(ih,\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)=\left[\frac{2}{h}\cdot\frac{2}{h(2i-1)}\int\limits_0^{(i-1/2)h} sK(t,s)ds+\right.$$
$$+\frac{2}{h(2i-1)}\int\limits_0^{(i-1/2)h} sK'_t(t,s)ds+K(t,t)-(2i-1)\cdot\frac{4}{h^2(2i-1)^2}\int\limits_0^{(i-1/2)h} sK(t,s)ds-$$
$$\left.-\frac{(2i-1)h}{2}\cdot\frac{4}{h^2(2i-1)^2}\int\limits_0^{(i-1/2)h} sK'_t(t,s)ds+\frac{h}{4}\left(\frac{\partial^2 g(t,\nu)}{\partial t^2}+\frac{h}{4}\frac{\partial^2 g(t,\nu)}{\partial \nu^2}\right)\right]_{M_0}=$$
$$=\left[K(t,t)+\frac{h}{4}\left(\frac{\partial^2 g(t,\nu)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 g(t,\nu)}{\partial \nu^2}\right)\right]_{M_0}.$$

Таким образом,

$$K^h\left(ih,\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)=K\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)h,\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)+\frac{h}{4}\left[\frac{\partial^2 g(t,\nu)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 g(t,\nu)}{\partial \nu^2}\right]_{M_0}. \qquad (18)$$

Теперь разложим $K((i-1/2)h,(i-1/2)h)$ в окрестности точки $(ih,(i-1/2)h)$, воспользовавшись формулой Тейлора:

$$K\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)h,\ \left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)\approx K\left(ih,\ \left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)-\frac{h}{2}K'_t\left(t,\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)\Bigg|_{t=ih}. \qquad (19)$$

Окончательно, используя замену (19), непосредственно из (18) имеем

$$K^h\left(ih,\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)-K\left(ih,\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)\approx$$
$$\approx-\frac{h}{2}K'_t\left(t,\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)\Bigg|_{t=ih}+\frac{h}{4}\left[\frac{\partial^2 g(t,\nu)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 g(t,\nu)}{\partial \nu^2}\right]_{M_0},$$

откуда следует

$$\left|K^h\left(ih,\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)-K\left(ih,\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)\right|=O(h).$$

Таким образом, данный метод имеет первый порядок сходимости по шагу сетки h. Исследование сходимости разностных формул (10), (11) осуществляется аналогичным образом.

5. Примеры. Рассмотрим несколько тестовых примеров, иллюстрирующих сходимость представленных численных схем, обозначив через $\bar{K}(t,s)$ точное решение (4).

Пример 1. Пусть

$$\bar{K}(t,s)=1-\frac{3}{2}(t-s)(2t-s);$$

тогда

$$g(t,\nu)=\frac{5}{4}t^3+t+\frac{3}{4}t\nu^2-\frac{3}{2}t^2\nu-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{8}\nu^3.$$

Применим формулы (9)–(11), полученные на основе метода средних прямоугольников, и найдем погрешность, рассчитанную по формуле

$$\varepsilon_m=\max_{i,j}\left|K^h\left(t_i,t_{j-1/2}\right)-\bar{K}\left(t_i,t_{j-1/2}\right)\right|,\quad j=\overline{1,i},\quad i=\overline{1,n}, \qquad (20)$$

Таблица 1. Погрешности решения для примера 1

h	ε_m	ε_p
0,25000	0,070312	0,019531
0,12500	0,033203	0,004395
0,06250	0,016113	0,001038
0,03125	0,007935	0,000252

Таблица 2. Погрешности решения для примера 2

h	ε_m	ε_p
0,25000	0,102990	0,027501
0,12500	0,049498	0,006408
0,06250	0,024278	0,001545
0,03125	0,012025	0,000379

а также применим (13)–(15) (pi-метод) и найдем погрешность по формуле

$$\varepsilon_p = \max_{i,l}\left| m_{i,l} - \int\limits_{(l-1)h}^{lh} \bar{K}(ih,s)ds \right|, \quad l=\overline{1,i}, \quad i=\overline{1,n}. \tag{21}$$

В таблице 1 представлены результаты расчета погрешности для решения примера 1 с помощью метода средних прямоугольников и pi-метода. Из таблицы (1) видно, что метод средних прямоугольников имеет линейную сходимость по шагу сетки, а pi-метод — квадратичную.

Пример 2. Пусть функция $\bar{K}$ является осциллирующей:

$$\bar{K}(t,s) = \mathrm{e}^t \cos(s);$$

тогда

$$g(t,\nu) = \mathrm{e}^t \cdot \left(\sin(t) + \frac{\cos(\nu)}{\nu} - \frac{1}{\nu} \right).$$

По аналогии с примером 1, применим (9)–(11), (13)–(15) и рассчитаем погрешности по формулам (20) и (21) соответственно. Таблицы (2), содержащая результаты расчета погрешности для решения примера refex2 с помощью метода средних прямоугольников и pi-метода, показывает, что порядок сходимости методов такой же, что и в примере 1.

Заметим, что в классическом случае метод средних прямоугольников имеет второй порядок сходимости. Однако, как показало исследование численной схемы (9)–(11) и подтвердили вычислительные расчеты, при численном решении уравнения Вольтерра вида (4) происходит потеря одного порядка. В случае использования pi-метода порядок сходимости метода по шагу сетки h сохраняется.

6. Заключение. Разработаны алгоритмы приближенного решения нового класса одномерных интегральных уравнений Вольтерра I рода с переменными пределами интегрирования с привлечением квадратурной формулы средних прямоугольников и метода product integration. Изучен эффект потери одного порядка сходимости вычислительной схемы, основанной на методе квадратурных сумм. Приведены тестовые примеры, иллюстрирующие преимущество использования pi-аппроксимации, которое заключается в высокой точности моделирования нестационарной динамической системы за счет сохранения второго порядка сходимости численного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апарцин А. С.* О новых классах линейных многомерных уравнений I рода типа Вольтерра// Изв. вузов. Мат. — 1995. — № 11. — С. 28–41.
2. *Апарцин А. С.* О повышении точности моделирования нелинейных динамических систем полиномами Вольтерра// Электрон. модел. — 2001. — *19*, № 6. — С. 3–12.
3. *Апарцин А. С., Спиряев В. А.* Об одном подходе к идентификации полиномов Вольтерра// Оптимизация, управление, интеллект. — 2005. — № 2. — С. 109–117.
4. *Бойков И. В., Кривулин Н. П.* Методы идентификации динамических систем// Программные системы: теория и приложения. — 2014. — *5*, № 5. — С. 79–96.

5. *Воскобойников Ю. Е., Солодуша С. В.* Задача и алгоритм непараметрической идентификации линейной нестационарной динамической системы с помощью кубических сплайнов// Сиб. ж. вычисл. мат. — 2023. — *26*, № 1 (в печати).
6. *Фомин А. А., Павленко В. Д., Федорова А. Н.* Метод построения многомерной модели Вольтерра глазодвигательного аппарата// Электротехн. компьют. сист. — 2015. — *19(95)*. — С. 296–301.
7. *Apartsyn A. S.* Nonclassical Volterra equations of the first kind: Theory and numerical methods. — Utrecht, Boston: VSP, 2003.
8. *Balassa G.* Estimating scattering potentials in inverse problems with a non-causal Volterra model// Mathematics. — 2022. — *10*, № 8. — 1257.
9. *Brunner H.* Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017.
10. *Linz P.* Product integration method for Volterra integral equations of the first kind// BIT Numer. Math. — 1971. — *11*. — P. 413–421.
11. *Solodusha S. V.* New classes of Volterra integral equations of the first kind related to the modeling of the wind turbine dynamics// Proc. 15 Int. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (Moscow, June 03–05, 2020). — IEEE, 2020. — P. 1–3.
12. *Suslov K. V., Gerasimov D. O., Vinnikov V. A., Solodusha S. V.* Modelling and simulation of power generation of smart electricity supply systems// Proc. CIGRE Session 46 (Paris, August 21–26, 2016), 2016.
13. *Wiener N.* Nonlinear Problems in Random Theory. — New York: The Technology Press of M.I.T., 1958.

Солодуша Светлана Витальевна
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения РАН, Иркутск
E-mail: solodusha@isem.irk.ru

Антипина Екатерина Дмитриевна
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения РАН, Иркутск;
Иркутский государственный университет
E-mail: kate19961231@gmail.com