ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 133–141
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-133-141

УДК 517.977.56

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2023 г. **Р. К. ТАГИЕВ, Ш. И. МАГЕРРАМЛИ**

Аннотация. Рассматривается обратная задача типа управления об определении младшего коэффициента параболического уравнения с интегральным граничным условием и дополнительным интегральным условием. Исследована корректность постановки задачи управления. Доказана дифференцируемость по Фреше функционала цели, составленная на основе дополнительного интегрального условия, и найдено выражение для его градиента. Установлено необходимое условие оптимальности управления.

Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение, интегральное граничное условие, корректность задачи, необходимое условие оптимальности.

VARIATIONAL METHOD FOR SOLVING A COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH INTEGRAL CONDITIONS

© 2023 **R. K. TAGIYEV, Sh. I. MAHARRAMLI**

Abstract. In this paper, we consider an inverse control-type problem of determining the minor coefficient of a parabolic equation with an integral boundary-value condition and an additional integral condition. The well-posedness of the problem is examined. The Fréchet differentiability of the target functional based on the additional integral condition is proved and an expression for its gradient is found. A necessary condition for the optimality of control is established.

Keywords and phrases: inverse problem, parabolic equation, integral boundary condition, correctness of the problem, necessary optimality condition .

AMS Subject Classification: 49K20, 35K20

1. Введение. Обратные задачи для уравнений с частными производными могут быть поставлены как задачи оптимального управления соответствующими системами. При этом роль управляющих функций выполняют неизвестные коэффициенты или свободные члены этих уравнений (см. [2, 13]). Обратные задачи типа управления для параболических уравнений с классическими краевыми условиями и локальными дополнительными условиями изучены в [1, 5, 11, 14] и др.

Многие физические и биологические процессы описываются нелокальными краевыми задачами для уравнений параболического типа (см. [9, 10]). Среди них особое место занимают задачи с интегральными условиями (см. [3, 4, 6] и др.). Обратные задачи типа управления для параболических уравнений с интегральными условиями исследованы существенно слабее.

© ВИНИТИ РАН, 2023

В данной работе рассматривается обратная задача типа управления об определении младшего коэффициента параболического уравнения с интегральным граничным условием и дополнительным интегральным условием. Исследована корректность постановки задачи управления. Доказана дифференцируемость по Фреше функционала цели, составленная на основе дополнительного интегрального условия, и найдено выражение для его градиента. Установлено необходимое условие оптимальности управления.

2. Постановка задачи. Пусть l, $T > 0$ — заданные числа,

$$Q_T = \{(x,t) :\ 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T\}$$

— прямоугольник в $\mathbb{R}^2$. Используемые в работе обозначения функциональных пространств и их норм соответствуют [7, с. 21–26]. Через $W_{2,0}^1(0,l)$, $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$, $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$ соответственно обозначаем подпространства пространств $W_2^1(0,l)$, $V_2^{1,0}(Q_T)$, $W_2^{1,1}(Q_T)$, элементы которых обращаются в нуль при $x = 0$. Положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений, обозначаются в дальнейшем через M_j, $j = 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим в прямоугольнике Q_T линейное параболическое уравнение

$$u_t - (k(x,t)u_x)_x + \upsilon(x)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

с начально-краевыми условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad k(l,t)u_x(l,t) = \int\limits_0^l H(x,t)u(x,t)dx, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{3}$$

где k, υ, f, φ, H — заданные функции.

Обычно под прямой задачей понимают нахождения решения $u = u(x,t)$ задачи (1)–(3) по заданным функциям k, υ, f, φ, H. Прямая задача (1)–(3) является нелокальной краевой задачей для параболического уравнения (1) с интегральным граничным условием. Однако не всегда коэффициенты k и υ уравнения (1) заранее определены. На практике возникают задачи, в которых коэффициенты k или υ подлежат определению по некоторой дополнительной информации. Такие задачи называются коэффициентными обратными задачами для параболического уравнения.

Рассмотрим следующую коэффициентную обратную задачу: по известным k, f, φ, H найти пару функций (u, υ) так, чтобы выполнялись условия (1)–(3) и дополнительное интегральное условие

$$\int\limits_0^T \omega(t)u(x,t)dt = \alpha(x), \quad 0 < x < l, \tag{4}$$

где ω, α — заданные функции.

В настоящей работе рассматривается следующая вариационная постановка обратной задачи (1)–(4): на множестве

$$V = \Big\{\upsilon = \upsilon(x) \in L_s(0,l) :\ |\upsilon(x)| \leqslant d \text{ п.в. на } (0,l)\Big\} \tag{5}$$

требуется минимизировать функционал

$$J(\upsilon) = \int\limits_0^l \left| \int\limits_0^T \omega(t)u(x,t;\upsilon)dt - \alpha(x)\right|^2 dx \tag{6}$$

при условиях (1)–(3), где $s > 2$, $d > 0$ — заданные числа, $u(x,t;\upsilon) = u(x,t)$ — решение краевой задачи (1)–(3) соответствующее коэффициенту $\upsilon = \upsilon(x) \in V$. Ниже эту задачу будем называть задачей (1)–(3), (5), (6). Данная задача является обратной задачей типа управления. В такой постановке коэффициент $\upsilon = \upsilon(x) \in V$ играет роль управления, а множество V является множеством допустимых управлений. Функционал (6) является функционалом невязки в $L_2(0,l)$, соответствующей условию (4).

Предполагаем, что заданные функции k, f, φ, H, ω, α удовлетворяют следующим условиям:

$$0 < \nu \leqslant k(x,t) \leqslant \mu, \quad \bigl|k_t(x,t)\bigr| \leqslant \mu_1 \quad \text{п.в. на } Q_T, \tag{7}$$

$$\bigl|H(x,t)\bigr| \leqslant \mu_2, \quad \bigl|H_t(x,t)\bigr| \leqslant \mu_3 \quad \text{п.в. на } Q_T, \tag{8}$$

$$\varphi \in W^1_{2,0}(0,l), \quad f \in L_2(Q_T), \tag{9}$$

$$\omega \in L_2(0,T), \quad \alpha \in L_2(0,l), \tag{10}$$

где ν, μ, μ_1, μ_2, $\mu_3 > 0$ — некоторые постоянные.

Под решением $u(x,t;\upsilon) = u(x,t)$ краевой задачи (1)–(3), соответствующим управлению $\upsilon = \upsilon(x) \in V$, будем понимать обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$, т.е. функцию

$$u = u(x,t;\upsilon) \in V^{1,0}_{2,0}(Q_T) = \Bigl\{u:\ u \in V_2^{1,0}(Q_T),\ u(0,t) = 0\Bigr\},$$

удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} \Bigl[-u\eta_t + k(x,t)u_x\eta_x + \upsilon(x)u\eta\Bigr]\,dx\,dt - \int\limits_0^T \left[\int\limits_0^l H(x,t)u(x,t;\upsilon)dx\right]\eta(l,t)dt =$$

$$= \int\limits_0^l \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{Q_T} f(x,t)\eta\,dx\,dt. \tag{11}$$

при любой функции

$$\eta = \eta(x,t) \in \hat{W}^{1,1}_{2,0}(Q_T) = \Bigl\{\eta:\ \eta \in W_2^{1,1}(Q_T),\ \eta(0,t) = 0,\ \eta(x,T) = 0\Bigr\}.$$

Применяя метод Галеркина и используя результаты работ [3], [7, с. 165–171], можно показать, что при каждом фиксированном $\upsilon = \upsilon(x) \in V$ существует единственное обобщенное решение $u = u(x,t;\upsilon)$ краевой задачи (1)–(3) из $V_2^{1,0}(Q_T)$ и справедлива оценка

$$|u|_{Q_T} \equiv \|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant M_1\Bigl[\|\varphi\|_{2,(0,l)} + 2\|f\|_{2,1,Q_T}\Bigr]. \tag{12}$$

Более того, можно показать, что это обобщенное решение принадлежит также пространству

$$W^{1,1}_{2,0}(Q_T) = \Bigl\{u:\ u \in W_2^{1,1}(Q_T),\ u(0,t) = 0\Bigr\}$$

и справедлива оценка

$$|u|_{Q_T} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\bigl\|u_x(x,t;\upsilon)\bigr\|_{2,(0,l)} + \|u_T\|_{2,Q_T} \leqslant M_2\Bigl[\|\varphi\|^{(1)}_{2,(0,l)} + \|f\|_{2,Q_T}\Bigr] \tag{13}$$

(см. [8, с. 202–210]).

3. Корректность постановки задачи.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (7)–(10). *Тогда задача* (1)–(3), (5), (6) *корректно поставлена в слабой топологии пространства* $L_s(0,l)$, *т.е. множество оптимальных управлений*

$$V_* = \Bigl\{\upsilon_* \in V:\ J(\upsilon_*) = J_* \equiv \inf\bigl\{J(\upsilon) : \upsilon \in V\bigr\}\Bigr\}$$

непусто и любая минимизирующая последовательность $\{\upsilon_k(x)\} \subset V$ *функционала* (6) *слабо в* $L_s(0,l)$ *сходится ко множеству* V_*.

Доказательство. Покажем, что функционал (6) слабо в $L_s(0,l)$ непрерывен на V. Пусть $\upsilon = \upsilon(x) \in V$ — некоторая точка, $\bigl\{\upsilon_k = \upsilon_k(x)\bigr\} \subset V$ — такая последовательность, что

$$\upsilon_k \to \upsilon \quad \text{слабо в } L_s(0,l). \tag{14}$$

Пусть $u_k = u_k(x,t) = u\,(x,t;\upsilon_k) \in W^{1,1}_{2,0}(Q_T)$ — решение краевой задачи (1)–(3) при $\upsilon = \upsilon_k$. В силу (13) справедливы оценки

$$\|u_k\|^{(1,1)}_{2,Q_T} \leqslant M_3, \quad k = 1,2,\dots. \tag{15}$$

Тогда из компактности вложения $W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \to L_q(Q_T)$ при любом конечном $q \geqslant 1$ (см. [8, с. 78]) следует, что из $\{u_k\}$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$, что

$$u_{k_m} \to u \quad \text{слабо в } W_{2,0}^{1,1}(Q_T), \qquad u_{k_m} \to u \quad \text{сильно в } L_q(Q_T), \tag{16}$$

где $u = u(x,t)$ — некоторый элемент из $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$.

Покажем, что $u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$, т.е. $u(x,t)$ является решением задачи (1)–(3), соответствующим управлению $\upsilon = \upsilon(x)$. Функции u_{k_m}, $m = 1,2,\ldots$, удовлетворяют тождествам

$$\int_{Q_T} \Big[-u_{k_m}\eta_t + k(x,t)u_{k_m\,x}\eta_x + \upsilon_{k_m}(x)u_{k_m}\eta \Big]\,dx\,dt - \int_0^T \left[\int_0^l H(x,t)u_{k_m}(x,t)dx\right]\eta(l,t)dt =$$

$$= \int_0^l \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int_{Q_T} f(x,t)\eta\,dx\,dt, \quad m = 1,2,\ldots, \quad \forall \eta = \eta(x,t) \in \hat{W}_{2,0}^{1,1}(Q_T). \tag{17}$$

Кроме того, очевидно равенство

$$\int_{Q_T} \upsilon_{k_m}(x)u_{k_m}\eta\,dx\,dt = \int_{Q_T} \upsilon_{k_m}(x)\left(u_{k_m} - u\right)\eta\,dx\,dt + \int_{Q_T} \upsilon_{k_m}(x)u\eta\,dx\,dt. \tag{18}$$

Используя ограничения $|\upsilon_{k_m}(x)| \leqslant d$, справедливые почти всюду на $(0,l)$, неравенство Коши—Буняковского и соотношение (16), имеем

$$\left|\int_{Q_T} \upsilon_{k_m}(x)\left(u_{k_m} - u\right)\eta\,dx\,dt\right| \leqslant d\big\|u_{k_m} - u\big\|_{2,Q_T}\|\eta\|_{2,Q_T} \to 0. \tag{19}$$

Из теоремы вложения следуют включения $u \in L_q(Q_T)$, $\eta \in L_q(Q_T)$, где $q \geqslant 1$ — любое конечное число. В частности, отсюда следует, что $u\eta \in L_{s/(s-1)}(Q_T)$. Тогда из соотношения (14) имеем

$$\int_{Q_T} \upsilon_{k_m}(x)u\eta\,dx\,dt \to \int_{Q_T} \upsilon(x)u\eta\,dx\,dt.$$

Учитывая это соотношение и (19), из (18) получаем

$$\int_{Q_T} \upsilon_{k_m}(x)u_{k_m}\eta\,dx\,dt \to \int_{Q_T} \upsilon(x)u\eta\,dx\,dt. \tag{20}$$

Используя условие $|H(x,t)| \leqslant \mu_2$ почти всюду на Q_T, неравенство Коши—Буняковского, теоремы о следах (см. [8, с. 78]) и соотношение (16), имеем

$$\left|\int_0^T \left[\int_0^l H(x,t)u_{k_m}(x,t)dx\right]\eta(l,t)dt - \int_0^T \left[\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx\right]\eta(l,t)dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \mu_2 \int_0^l \int_0^T \Big|u_{k_m}(x,t) - u(x,t)\Big| \cdot \Big|\eta(l,t)\Big|\,dx\,dt \leqslant \mu_2\sqrt{l}\big\|u_{k_m} - u\big\|_{2,Q_T} \cdot \big\|\eta(l,t)\big\|_{2,(0,T)} \leqslant$$

$$\leqslant \mu_2\sqrt{l}M_4\big\|u_{k_m} - u\big\|_{2,Q_T} \cdot \|\eta\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \to 0. \tag{21}$$

Наконец, переходя к пределу в равенстве (17) и учитывая соотношения (16), (20) и (21), получаем, что $u(x,t)$ удовлетворяет тождеству (11), т.е. является обобщенным решением задачи (1)–(3) из $V_2^{1,0}(Q_T)$. Отсюда и из включения $u(x,t) \in W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$ следует, что $\psi(x,t) = \psi(x,t;\upsilon)$. Кроме того, используя единственность решения $u = u(x,t;\upsilon)$, нетрудно показать, что соотношение (16) справедливо с функцией $u=u(x,t;\upsilon)$ не только для подпоследовательности $\{u_{k_m}\}$, но и для всей последовательности $\{u_k\}$, т.е.

$$u(x,t;\upsilon_k)\to u(x,t;\upsilon) \quad \text{слабо в } W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \text{ и сильно в } L_q(Q_T), \tag{22}$$

где $q\geqslant 1$ — любое конечное число.

Покажем, что $J(\upsilon_k)\to J(\upsilon)$ при $k\to\infty$. Используя равенство (1) и неравенство Коши—Буняковского, имеем

$$\begin{gathered}
\big|J(\upsilon_k)-J(\upsilon)\big| = \left|\, \left\|\int\limits_0^T \omega(t)u(x,t;\upsilon_k)dt-\alpha(x)\right\|^2_{2,(0,l)} - \left\|\int\limits_0^T \omega(t)u(x,t;\upsilon)dt-\alpha(x)\right\|^2_{2,(0,l)} \right| \leqslant \\
\leqslant \left\|\int\limits_0^T \omega(t)\Big[u(x,t;\upsilon_k)-u(x,t;\upsilon)\Big]dt\right\|_{2,(0,l)} \times \\
\times \left\{ \left\|\int\limits_0^T \omega(t)u(x,t;\upsilon_k)dt\right\|_{2,(0,l)} + \left\|\int\limits_0^T \omega(t)u(x,t;\upsilon)dt\right\|_{2,(0,l)} + 2\|\alpha(x)\|_{2,(0,l)} \right\} \leqslant \\
\leqslant \big\|\omega(t)\big\|_{2,(0,T)}\cdot\big\|u(x,t;\upsilon_k)-u(x,t;\upsilon)\big\|_{2,Q_T}\times \\
\times\Big[\|\omega(t)\|_{2,(0,T)}\Big(\|u(x,t;\upsilon_k)\|_{2,Q_T}+\|u(x,t;\upsilon)\|_{2,Q_T}\Big)+2\|\alpha(x)\|_{2,(0,l)}\Big]
\end{gathered}$$

Отсюда, используя оценки (5), (15) и соотношение (22), получаем, что $J(\upsilon_k)\to J(\upsilon)$ при $k\to\infty$, т.е. функционал $J(\upsilon)$ слабо в $L_s(0,l)$ непрерывен на V. Кроме того, множество V, определяемое равенством (5) выпукло, замкнуто и ограничено в рефлексивном банаховом пространстве $L_s(0,l)$ и поэтому слабо компактно в $L_s(0,l)$ (см. [2, с. 51]). Применяя результат из [2, с. 49], завершаем доказательство теоремы 1. $\square$

4. Дифференцируемость функционала цели и необходимое условие оптимальности. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу для определения функции $\psi(x,t)=\psi(x,t;\upsilon)$ из условий

$$\begin{gathered}
\psi_t+\big(k(x,t)\psi_x\big)_x-\upsilon(x,t)\psi+H(x,t;\upsilon)\psi(l,t)= \\
=2\left[\int\limits_0^T\omega(\xi)u(x,\xi;\upsilon)d\xi-\alpha(x)\right]\omega(t), \quad (x,t)\in Q_T,
\end{gathered}\tag{23}$$

$$\psi(x,T)=0, \qquad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{24}$$

$$\psi(0,t)=0, \quad \psi_x(l,t)=0, \quad 0\leqslant t<T, \tag{25}$$

где $Q_T=\big\{(x,t):\ 0<x<l,\ 0\leqslant t<T\big\}$.

Решение краевой задачи (23)–(25), соответствующее управлению $\upsilon\in V$, определяем как обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$, т.е. как функцию $\psi(x,t)=\psi(x,t;\upsilon)\in V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{gathered}
\int\limits_{Q_T}\Big[\psi\eta_t+k(x,t)\psi_x\eta_x+\upsilon(x)\psi\eta-H(x,t)\psi(l,t)\eta\Big]\,dx\,dt= \\
=-2\int\limits_{Q_T}\left\{\left[\int\limits_0^T\omega(\xi)u\big(x,\xi;\upsilon\big)d\xi-\alpha(x)\right]\omega(t)\right\}\eta\,dx\,dt
\end{gathered}\tag{26}$$

для всех $\eta=\eta(x,t)\in \breve{W}_{2,0}^{1,1}(Q_T)=\Big\{\eta:\ \eta\in W_2^{1,1}(Q_T),\ \eta(0,t)=0,\eta(x,0)=0\Big\}$.

Применяя метод Галеркина, можно показать, что при каждом фиксированном $\upsilon \in V$ существует единственное обобщенное решение $\psi(x,t) = \psi(x,t;\upsilon) \in V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ краевой задачи (23)–(**??**); это решение принадлежит также пространству $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$ и справедлива оценка

$$|\psi|_{Q_T} + \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left\|\psi_x(x,t;\upsilon)\right\|_{2,(0,l)} + \|\psi_t\|_{2,Q_T} \leqslant M_5 \left\| \left[\int_0^T \omega(\xi) u(x,\xi;\upsilon) d\xi - \alpha(x) \right] \omega(t) \right\|_{2,Q_T}. \tag{27}$$

Учитывая очевидные неравенства

$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2), \quad \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

неравенство Коши—Буняковского и оценки (12), имеем

$$\left\| \left[\int_0^T \omega(\xi) u(x,\xi;\upsilon) d\xi - \alpha(x) \right] \omega(t) \right\|_{2,Q_T} =$$
$$= \left\{ \int_0^l \int_0^T \left| \int_0^T \omega(\xi) u(x,\xi;\upsilon) d\xi - \alpha(x) \right|^2 \omega^2(t)\, dx\, dt \right\}^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2} \|\omega\|_{2,(0,T)} \Big[\|\omega\|_{2,(0,T)} \|u\|_{2,Q_T} + \|\alpha\|_{2,(0,l)} \Big] \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2} \|\omega\|_{2,(0,T)} \Big[M_1 \|\omega\|_{2,(0,T)} \Big(\|\varphi\|_{2,(0,l)} + 2\|f\|_{2,1,Q_T} \Big) + \|\alpha\|_{2,(0,l)} \Big].$$

Отсюда и из (27) следует, что справедлива оценка

$$|\psi|_{Q_T} + \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left\|\psi_x(x,t;\upsilon)\right\|_{2,(0,l)} + \|\psi_t\|_{2,Q_T} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2} M_5 \|\omega\|_{2,(0,T)} \Big[M_1 \|\omega\|_{2,(0,T)} \Big(\|\varphi\|_{2,(0,l)} + 2\|f\|_{2,1,Q_T} \Big) + \|\alpha\|_{2,(0,l)} \Big]. \tag{28}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда при условиях* (1)–(3), (5) *функционал* (6) *непрерывно дифференцируем по Фреше на* V *и его градиент имеет вид*

$$J'(\upsilon) = \int_0^T u(x,t;\upsilon) \psi(x,t;\upsilon) dt, \quad 0 < x < l. \tag{29}$$

Доказательство. Пусть $\upsilon = \upsilon(x) \in V$ — некоторая точка, $\Delta\upsilon = \Delta\upsilon(x) \in L_s(0,l)$ — такое приращение, что $\upsilon + \Delta\upsilon \in V$. Пусть $\Delta u = \Delta u(x,t) = u(x,t;\upsilon+\Delta\upsilon) - u(x,t;\upsilon)$. Из (1)–(3) следует, что Δu является обобщенным решением из $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$ задачи

$$\Delta u_t - (k(x,t)\Delta u_x)_x + (\upsilon + \Delta\upsilon)\, \Delta u = -\Delta\upsilon u, \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{30}$$

$$\Delta u(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{31}$$

$$\Delta u(0,t) = 0, \quad k(l,t)\Delta u_x(l,t) = \int_0^l H(x,t)\Delta u(x,t) dx, \quad 0 < t \leqslant T. \tag{32}$$

Для решения задачи (30)–(32) верна оценка

$$|\Delta u|_{Q_T} + \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\Delta u_x(x,t)\|_{2,(0,l)} + \|\Delta u_t\|_{2,Q_T} \leqslant M_6 \left\|\Delta\upsilon u\right\|_{2,Q_T}. \tag{33}$$

Используя неравенство (7) (см. [8]), получаем неравенство

$$\left\|\Delta\upsilon u\right\|_{2,Q_T} \leqslant T^{1/s} \left\|\Delta\upsilon\right\|_{s,(0,l)} \left\|u\right\|_{2s/(s-2),Q_T}.$$

Учитывая это неравенство в (33) и ограниченность вложения $W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \to L_{2s/(s-2)}(Q_T)$ при $s > 2$ выводим оценку

$$|\Delta u|_{Q_T} + \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\Delta u_x(x,t)\|_{2,(0,l)} + \|\Delta u_t\|_{2,Q_T} \leqslant M_7 \|\Delta \upsilon\|_{s,(0,l)} \|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)}. \tag{34}$$

Приращение функционала (6) имеет вид

$$\Delta J(\upsilon) = J(\upsilon + \Delta\upsilon) - J(\upsilon) = 2\int_0^l \left\{ \left[\int_0^T \omega(t) u(x,t;\upsilon)dt - \alpha(x)\right] \int_0^T \omega(t)\Delta u(x,t)dt \right\} dx + \\ + \int_0^l \left| \int_0^T \omega(t)\Delta u(x,t)dt \right|^2 dx. \tag{35}$$

С помощью решений краевых задач (23)–(25) и (30)–(32) преобразуем приращения (35). Решение краевой задачи (30)–(32) удовлетворяет равенству

$$\int_{Q_T} (\Delta u_t \psi + k\Delta u_x \eta_x + (\upsilon + \Delta\upsilon)\Delta u\psi)\, dx\, dt - \int_0^T \left[\int_0^l H(x,t)\Delta u(x,t)dx \right] \psi(l,t)dt = \\ = -\int_{Q_T} u\psi\Delta\upsilon\, dx\, dt. \tag{36}$$

Если в тождестве (26) положим $\eta = \Delta u$ и полученное равенство вычтем из (36), то придем к равенству

$$2\int_0^l \left\{ \left[\int_0^T \omega(\xi) u(x,\xi;\upsilon)\, d\xi - \alpha(x)\right] \int_0^T \omega(t)\Delta u(x,t)dt \right\} dx = \int_{Q_T} u\psi\Delta\upsilon\, dx\, dt + \int_{Q_T} \Delta u\psi\Delta\upsilon\, dx\, dt.$$

Учитывая это равенство, из (35) находим

$$\Delta J(\upsilon) = \int_{Q_T} u\psi\Delta\upsilon\, dx\, dt + R, \tag{37}$$

где

$$R = \int_0^l \left| \int_0^T \omega(t)\Delta u(x,t)dt \right|^2 dx + \int_{Q_T} \Delta u\psi\Delta\upsilon\, dx\, dt. \tag{38}$$

Первое слагаемое в правой части равенства (37) при заданном $\upsilon \in V$ определяет линейный ограниченный функционал от $\Delta\upsilon$ в $L_s(0,l)$. Действительно, линейность этого функционала очевидна. Кроме того, используя неравенство (8) из [8] и ограниченность вложения $W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \to L_{2s/(s-1)}(Q_T)$ (см. [8]), получаем неравенства

$$\left| \int_{Q_T} u\psi\Delta\upsilon\, dx\, dt \right| \leqslant \|u\|_{2s/(s-1),Q_T} \|\psi\|_{2s/(s-1),Q_T} \|\Delta\upsilon\|_{s,Q_T} \leqslant M_8 \|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \|\psi\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \|\Delta\upsilon\|_{s,(0,l)}, \tag{39}$$

что влечет ограниченность функционала, определяемого первым слагаемым в правой части (37).

Рассуждая аналогично выводу оценки (39) и используя (34), имеем

$$\left| \int_{Q_T} \Delta u\psi\Delta\upsilon\, dx\, dt \right| \leqslant M_9 \|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \|\psi\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \|\Delta\upsilon\|_{s,(0,l)}^2. \tag{40}$$

Кроме того, используя неравенство Коши—Буняковского и оценки (34), получаем неравенства

$$\int_0^l \left| \int_0^T \omega(t)\Delta u(x,t)dt \right|^2 dx \leqslant \|\omega\|^2_{2,(0,T)} \|\Delta u\|^2_{2,Q_T} \leqslant M_7^2 \|\omega\|^2_{2,(0,T)} \big(\|u\|^{(1,1)}_{2,Q_T}\big)^2 \|\Delta v\|^2_{s,(0,l)}.$$

Отсюда и из (40) следует, что для остаточного члена R, определяемого равенством (38), верна оценка

$$|R| \leqslant \Big(M_7^2\|\omega\|^2_{2,(0,T)}\|u\|^{(1,1)}_{2,Q_T} + M_9\|\psi\|^{(1,1)}_{2,Q_T}\Big)\|u\|^{(1,1)}_{2,Q_T}\|\Delta v\|_{s,(0,l)}.$$

Учитывая в (37) эту оценку, заключаем, что функционал (6) дифференцируем по Фреше на V и его градиент определяется равенством (29).

Теперь покажем, что отображение $v \to J'(v)$ непрерывно действует из V в $L_{s'}(0,l)$, где $L_{s'}(0,l)$ — сопряженное пространство к $L_s(0,l)$, $s' = s/(s-1)$. Пусть

$$\Delta\psi = \Delta\psi(x,t) = \psi\,(x,t;v+\Delta v) - \psi(x,t;v), \quad \psi = \psi(x,t) = \psi(x,t;v).$$

Из (23)–(25) следует, что $\Delta\psi$ является обобщенным решением из $W^{1,1}_{2,0}(Q_T)$ краевой задачи

$$\Delta\psi_t + (k\Delta\psi_x)_x - (v+\Delta v)\Delta\psi + H\Delta\psi(l,t) = \\ = 2\omega(t)\int_0^T \omega(\xi)\Delta u(x,\xi;v)d\xi + \Delta v\psi, \quad (x,t)\in Q_T, \tag{41}$$

$$\Delta\psi(x,T) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{42}$$

$$\Delta\psi(0,t) = 0, \quad \Delta\psi_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t < T. \tag{43}$$

Рассуждая аналогично выводу оценки (28) и используя оценки (34), можно показать, что для решения задачи (41)–(43) верна оценка

$$|\Delta\psi|_{Q_T} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\Delta\psi_x(x,t)\|_{2,(0,l)} + \|\Delta\psi_t\|_{2,Q_T} \leqslant M_{10}\|\Delta v\|_{s,(0,l)}. \tag{44}$$

Используя равенство (1.7$'$) из [8] и учитывая ограниченность вложения $W^{1,1}_{2,0}(Q_T) \to L_{2s/(s-1)}(Q_T)$, а также оценки (34), (44), для любого $h = h(x) \in L_s(0,l)$, имеем

$$\Big|\big\langle J'(v+\Delta v) - J'(v), h\big\rangle_{L_s}\Big| = \left|\int_{Q_T}\big(u\Delta\psi h + \psi\Delta u h + \Delta u\Delta\psi h\big)\,dx\,dt\right| \leqslant \\ \leqslant \Big[\|u\|_{2s/(s-1),Q_T}\|\Delta\psi\|_{2s/(s-1),Q_T} + \|\psi\|_{2s/(s-1),Q_T}\|\Delta u\|_{2s/(s-1),Q_T} + \\ + \|\Delta u\|_{2s/(s-1),Q_T}\|\Delta\psi\|_{2s/(s-1),Q_T}\Big]\|h\|_{s,(0,l)} \leqslant \\ \leqslant M_{11}\Big[\|u\|^{(1,1)}_{2,Q_T}\|\Delta\psi\|^{(1,1)}_{2,Q_T} + \|\psi\|^{(1,1)}_{2,Q_T}\|\Delta u\|^{(1,1)}_{2,Q_T} + \|\Delta u\|^{(1,1)}_{2,Q_T}\|\Delta\psi\|^{(1,1)}_{2,Q_T}\Big]\|h\|_{s,(0,l)} \leqslant \\ \leqslant M_{12}\Big[\|u\|^{(1,1)}_{2,Q_T} + \|\psi\|^{(1,1)}_{2,Q_T} + \|\Delta v\|_{s,(0,l)}\Big]\|\Delta v\|_{s,(0,l)}\|h\|_{s,(0,l)}. \tag{45}$$

Из (45) следует неравенство

$$\big\|J'(v+\Delta v) - J'(v)\big\|_{s',(0,l)} \leqslant M_{12}\Big[\|u\|^{(1,1)}_{2,Q_T} + \|\psi\|^{(1,1)}_{2,Q_T} + \|\Delta v\|_{s,(0,l)}\Big]\|\Delta v\|_{s,(0,l)}.$$

Отсюда следует, что

$$\big\|J'(v+\Delta v) - J'(v)\big\|_{s',(0,l)} \to 0 \quad \text{при } \|\Delta v\|_{s,(0,l)} \to 0,$$

т.е. $v \to J'(v)$ есть непрерывное отображение из V в $L_{s'}(0,l)$. Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для оптимальности управления* $\upsilon_* \in V$ *в задаче* (1)–(3), (5), (6) *необходимо выполнение неравенства*

$$\int_0^l \left[\int_0^T u(x,t;\upsilon_*)\psi(x,t;\upsilon_*)dt \right] \big[\upsilon(x) - \upsilon_*(x)\big] dx \geqslant 0 \tag{46}$$

для любого $\upsilon = \upsilon(x) \in V$.

Доказательство. Множество V, определяемое равенством (5), выпукло в $L_s(0,l)$. Согласно теореме 2 функционал $J(\upsilon)$ непрерывно дифференцируем по Фреше на V. Тогда в силу [2, теорема 5] на элементе $\upsilon_* \in V_*$ необходимо выполнение неравенства $\big\langle J'(\upsilon_*), \upsilon - \upsilon_* \big\rangle_{L_s} \geqslant 0$ при всех $\upsilon \in V$. Отсюда и из (29) следует справедливость неравенства (46). Теорема 3 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алифанов О. А., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. — М., 1988.
2. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. — М., 1981.
3. *Данилкина О. Ю.* Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности с интегральным условием// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2007. — *14*, № 1. — С. 5–9.
4. *Иванчов Н. И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями// Диффер. уравн. — 2004. — *40*, № 4. — С. 547–564.
5. *Искендеров А. Д.* О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики// Докл. АН СССР. — 1984. — *274*, № 3. — С. 531–533.
6. *Кожанов А. И.* О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2004. — № 30. — С. 63–69.
7. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М., 1973.
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М: Наука, 1967.
9. *Нахушев А. З.* Уравнения математической биологии. — М.: Наука, 1995.
10. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений// Диффер. уравн. — 1980. — *16*, № 11. — С. 1925–1935.
11. *Тагиев Р. К., Касумов Р. А.* Об оптимизационной постановке коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием// Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех. — 2017. — № 45. — С. 49–59.
12. *Тагиев Р. К., Магеррамли Ш. И.* О разрешимости начально-краевой задачи для одномерного линейного параболического уравнения с интегральным граничным условием// Вестн. Бакин. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2019. — № 2. — С. 17–26.
13. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*, № 3. — С. 501–504.
14. *Iskenderov A. D., Tagiyev R. K.* Variational method solving the problem of identification of the coefficients of quasilinear parabolic problem// Proc. 7 Int. Conf. “Inverse Problems: Modelling and Simulation” (Fethiye, Turkey, May 26—31, 2014). — Fethiye, Turkey, 2014. — P. 31.

Тагиев Рафиг Каландар оглы
Бакинский государственный университет
E-mail: `r.tagiyev@list.ru`

Магеррамли Шахла Илхам кызы
Бакинский государственный университет
E-mail: `semedli.shehla@gmail.com`