



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 142–149
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-142-149

УДК 517.977

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2023 г. Д. О. ТРУНИН

Аннотация. Рассматривается новый подход к оптимизации нелинейных управляемых систем с терминальными ограничениями на основе последовательного решения задач нелокального улучшения управления в форме специальных систем функциональных уравнений в пространстве управлений. Соответствующие системы строятся как задачи о неподвижной точке специальных операторов управления с дополнительным алгебраическим уравнением. Предлагаемые методы последовательных приближений управления с сохранением всех терминальных ограничений на каждой итерации приближений не содержат трудоемкой операции параметрического варьирования управления, характерной для известных градиентных методов.

Ключевые слова: нелинейная управляемая система, терминальное ограничение, условие улучшения управления, неподвижная точка, итерационный алгоритм.

PROJECTION METHODS FOR IMPROVING CONTROLS IN NONLINEAR CONTROL SYSTEMS WITH TERMINAL CONSTRAINTS

© 2023 D. O. TRUNIN

ABSTRACT. In this paper, we consider a new approach to the optimization of nonlinear control systems with terminal constraints based on the consecutive solution of nonlocal control improvement problems in the form of special systems of functional equations in the control space. The corresponding systems are constructed as fixed-point problems for special control operators with an additional algebraic equation. The methods of successive approximations of the control that preserve terminal constraints at each iteration used in this paper do not contain the time-consuming operation of parametric variation of the control, which is typical for common gradient methods.

Keywords and phrases: nonlinear control system, terminal constraint, control improvement conditions, fixed point, iterative algorithm.

AMS Subject Classification: 49M20

1. Введение. В [6] предложены проекционные методы нелокального улучшения управления в классе линейно-квадратичных задач оптимального управления со свободным правым концом с линейным и квадратичным по состоянию целевым функционалом. Эти методы основываются на специальных формулах приращения целевого функционала без остаточных членов разложений и не содержат трудоемкой операции параметрического варьирования управления в окрестности текущего приближения. Улучшение управления достигается ценой решения двух специальных задач Коши. Указанные особенности методов являются существенными факторами для повышения эффективности решения задач рассматриваемого класса.

В [2] были разработаны проекционные методы нелокального улучшения управления в классе полиномиальных по состоянию задач оптимального управления со свободным правым концом на основе формул приращения целевого функционала без остаточных членов приращений, которые были получены с помощью дифференциальной модификации сопряженной системы. При этом для улучшения управления требуется решить специальную краевую задачу улучшения, для которой применяется известный в математике подход возмущений.

В [3] проекционные методы нелокального улучшения управления (см. [2]) обобщаются для класса нелинейных по состоянию задач оптимального управления со свободным правым концом. В данном классе задач модифицированная сопряженная система представляет собой дифференциально-алгебраическую систему с дополнительными алгебраическими уравнениями. Задача улучшения управления рассматривается как задача о неподвижной точке проекционного оператора управления, для решения которой модифицируются известные методы неподвижных точек.

В данной статье проекционные методы (см. [3]) развиваются в классе нелинейных по состоянию задач оптимального управления с терминальными ограничениями. Для нелокального улучшения допустимых управлений в рассматриваемом классе задач предлагается использовать итерационные методы решения конструируемой операторной задачи о неподвижной точке с дополнительным алгебраическим условием в пространстве управлений.

2. Постановка задачи. Рассматривается класс нелинейных по состоянию и линейных по управлению задач оптимального управления с одним терминальным ограничением-равенством

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad (2)$$

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in T, \quad (3)$$

$$\Phi_0(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x, u, t) dt \rightarrow \min, \quad (4)$$

$$\Phi_1(u) = \chi(x(t_1)) = 0. \quad (5)$$

Здесь $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ — вектор состояния, $u = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$ — вектор управления; начальное состояние $x^0 \in \mathbb{R}^n$ задано. Функции $f(x, u, t)$ и $F(x, u, t)$ нелинейны по x и линейны по u :

$$f(x, u, t) = A(x, t)u + b(x, t), \quad F(x, u, t) = \langle d(x, t), u \rangle + g(x, t).$$

Функции $A(x, t)$, $b(x, t)$, $d(x, t)$ и $g(x, t)$ нелинейны и дифференцируемы по x и непрерывны по t на множестве $\mathbb{R}^n \times T$; функции $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ нелинейны и дифференцируемы по x ; U — выпуклое компактное множество; интервал времени T фиксирован. К виду (1)–(5) могут быть приведены различные задачи оптимального управления с терминальными, фазовыми и смешанными ограничениями.

Под доступными управлениями в задаче (1)–(5) будем понимать кусочно непрерывные на отрезке T функции со значениями в компактном и выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^r$:

$$V = \{u \in PC^r(T) : u(t) \in U, t \in T\}.$$

Для доступного управления $v \in V$ обозначим через $x(t, v)$, $t \in T$, решение задачи Коши (1), (2) при $u(t) = v(t)$, $t \in T$. Под допустимыми управлениями будем понимать доступные управления, если выполнено терминальное ограничение (5):

$$W = \{u \in V : \chi(x(t_1, u)) = 0\}.$$

В задаче (1)–(5) функция Понтрягина с сопряженной переменной $p \in \mathbb{R}^n$ может быть представлена в виде

$$H(p, x, u, t) = H_0(p, x, t) + \langle H_1(p, x, t), u \rangle,$$

где

$$H_0(p, x, t) = \langle p, b(x, t) \rangle - g(x, t), \quad H_1(p, x, t) = A(x, t)^T p - d(x, t).$$

Рассмотрим регулярный функционал Лагранжа

$$L(u, \lambda) = \Phi_0(u) + \lambda \Phi_1(u), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Пусть (u^0, v) — пара доступных управлений в задаче (1)–(5). В соответствии с [3] формула приращения функционала Лагранжа, не содержащая остаточных членов разложения, принимает вид

$$\Delta_v L(u^0, \lambda) = - \int_T \left\langle H_1(p(t, u^0, v, \lambda), x(t, v), t), v(t) - u^0(t) \right\rangle dt, \quad (6)$$

где $p(t, u^0, v, \lambda)$, $t \in T$ — решение модифицированной дифференциально-алгебраической сопряженной системы

$$\dot{p} = -H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t) - r(t), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left\langle H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t), x(t, v) - x(t, u^0) \right\rangle + \left\langle r(t), x(t, v) - x(t, u^0) \right\rangle = \\ = H(p, x(t, v), u^0(t), t) - H(p, x(t, u^0), u^0(t), t), \end{aligned} \quad (8)$$

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u^0)) - \lambda \chi_x(x(t_1, u^0)) - q, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \varphi_x(x(t_1, u^0)) + \lambda \chi_x(x(t_1, u^0)), x(t_1, v) - x(t_1, u^0) \right\rangle + \left\langle q, x(t_1, v) - x(t_1, u^0) \right\rangle = \\ = \varphi(x(t_1, v)) - \varphi(x(t_1, u^0)) + \lambda(\chi(x(t_1, v)) - \chi(x(t_1, u^0))). \end{aligned} \quad (10)$$

Алгебраические соотношения (8), (10) всегда можно разрешить (см. [3]) относительно величин $r(t)$, q и свести дифференциально-алгебраическую задачу к обычной дифференциальной задаче (возможно, не единственным способом).

В частности, в подклассе квадратичных по состоянию задач (функции f , F , φ , χ квадратичны по x) величины $r(t)$, q могут быть представлены следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{1}{2} H_{xx}(p, x(t, u^0), u^0(t), t) (x(t, v) - x(t, u^0)), \\ q &= \frac{1}{2} \left(\varphi_{xx}(x(t_1, u^0)) + \lambda \chi_{xx}(x(t_1, u^0)) \right) (x(t_1, v) - x(t_1, u^0)). \end{aligned}$$

Для доступного управления $u^0 \in V$ и фиксированного параметра проектирования $\alpha > 0$ образуем аналогично [2] вектор-функцию

$$u^\alpha(p, x, t) = P_U(u^0(t) + \alpha H_1(p, x, t)), \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0, \quad q \quad t \in T,$$

где P_U — оператор проектирования на множество U в евклидовой норме.

Согласно известному свойству проекции имеет место оценка

$$\left\langle H_1(p, x, t), u^\alpha(p, x, t) - u^0(t) \right\rangle \geq \frac{1}{\alpha} \|u^\alpha(p, x, t) - u^0(t)\|^2. \quad (11)$$

Тогда из (6) и (11) следует оценка приращения функционала:

$$\Delta_{u^\alpha} L(u^0, \lambda) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|u^\alpha(p, x, t) - u^0(t)\|^2 dt. \quad (12)$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления $u^0 \in W$: найти управление $v \in W$ со свойством

$$\Phi_0(v) \leq \Phi_0(u^0).$$

Покажем, что для нелокального улучшения допустимого управления $u^0 \in W$ достаточно решить при некотором $\alpha > 0$ следующую систему функциональных уравнений в пространстве управлений:

$$\begin{aligned} v(t) &= u^\alpha(p(t, u^0, v, \lambda), x(t, v), t), \quad t \in T, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ \chi(x(t_1, v)) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть управление $v \in W$ является решением системы (13). Тогда в силу оценки (12) имеет место улучшение целевого функционала Φ_0 с оценкой

$$\Delta_v \Phi_0(u^0) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v(t) - u^0(t)\|^2 dt. \quad (14)$$

Из оценки (14) следует, что, если управление v отличается от управления u^0 , то обеспечивается строгое улучшение целевого функционала.

Система уравнений (13) рассматривается как задача о неподвижной точке в пространстве управлений с дополнительным алгебраическим уравнением. Это позволяет применить и модифицировать известные итерационные методы неподвижных точек для решения системы (13).

3. Итерационные методы. Для решения системы (13) при фиксированном $\alpha > 0$ предлагается следующая модификация известного алгоритма метода простой итерации (см. [5]) при $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} v^{k+1}(t) &= u^\alpha(p(t, u^0, v^k, \lambda), x(t, v^{k+1}), t), \quad t \in T, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ \chi(x(t_1, v^{k+1})) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В качестве начального приближения итерационного процесса (15) выбирается управление $v^0 \in V$. Главной особенностью предлагаемого итерационного алгоритма является подбор параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ на каждой итерации при $k \geq 1$ для удовлетворения терминального ограничения. Предполагается, что такая возможность существует.

Реализация предлагаемого неявного итерационного процесса (15) на каждой итерации состоит в следующих действиях.

Найдем решение $p^\lambda(t)$, $t \in T$, задачи (7)–(10) при $v = v^k(t)$. Пусть $x^\lambda(t)$, $t \in T$, — решение специальной задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, u^\alpha(p^\lambda(t), x, t), t), \quad t \in T, x(t_0) = x^0.$$

Найдем значение множителя Лагранжа $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ из условия

$$\chi(x^\lambda(t_1)) = 0. \quad (16)$$

Следующее приближение управления сформируем по правилу

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(p^{\bar{\lambda}}(t), x^{\bar{\lambda}}(t), t).$$

Таким образом, реализация неявного процесса (15) на каждой итерации сводится к решению алгебраического уравнения (16).

Другая модификация алгоритма метода простой итерации для решения системы (13) имеет более привычную стандартную явную форму при $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} v^{k+1}(t) &= u^\alpha(p(t, u^0, v^k, \lambda), x(t, v^k), t), \quad t \in T, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ \chi(x(t_1, v^{k+1})) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Для этой модификации на каждой итерации процесса (17) после вычисления решения $p^\lambda(t)$, $t \in T$, задачи (7)–(10) при $v = v^k(t)$ формируется вспомогательное управление

$$v^\lambda(t) = u^\alpha(p^\lambda(t), x(t, v^k), t), \quad t \in T.$$

Для вспомогательного управления v^λ отыскивается решение $x(t, v^\lambda)$, $t \in T$, стандартной задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, v^\lambda(t), t), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x^0.$$

Значение множителя Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}$ на каждой итерации процесса (17) выбирается из условия выполнения терминального ограничения:

$$\chi(x(t_1, v^\lambda)) = 0. \quad (18)$$

При этом предполагается, что решение задачи (18) существует.

Для полученного решения $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ уравнения (18) определяется следующее приближение управления:

$$v^{k+1}(t) = v^{\bar{\lambda}}(t), \quad t \in T.$$

Особенностью предлагаемых итерационных алгоритмов для решения задачи о неподвижной точке (13) является выполнение терминального ограничения (5) на каждой итерации процесса последовательных приближений управления. При этом начальное приближение v^0 итерационных процессов может не удовлетворять терминальному ограничению, что является важным для практической реализации алгоритмов.

Сходимость предлагаемых итерационных процессов регулируется выбором параметра проектирования $\alpha > 0$ и может быть обоснована на основе метода возмущений и принципа сжимающих отображений аналогично [2] при достаточно малых значениях $\alpha > 0$.

Итерационные процессы применяются до первого улучшения управления u^0 . Далее строится новая задача улучшения для полученного управления и процесс повторяется. Критерием остановки итераций улучшения управления является отсутствие строгого улучшения управления по целевому функционалу.

На основе последовательного решения задач улучшения управления строятся соответствующие итерационные методы построения релаксационных последовательностей управлений, удовлетворяющих терминальному ограничению.

4. Пример. Рассматривается модельная задача стабилизации вращения спутника (см. [7]), которая приводилась к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{3}x_2x_3 + 100u_1, & \dot{x}_2 &= -x_1x_3 + 25u_2, & \dot{x}_3 &= -x_1x_2 + 100u_3, \\ x_1(0) &= 200, & x_2(0) &= 30, & x_3(0) &= 40, \\ u_1(t) &\in [-40, 40], & u_2(t) &\in [-20, 20], & u_3(t) &\in [-40, 40], & t \in [0, 0.1], \\ \Phi_0(u) &= \frac{1}{2}(x_2^2(0.1) + x_3^2(0.1)) \rightarrow \min, \\ \Phi_1(u) &= x_1(0.1) = 0. \end{aligned}$$

Уравнения системы описывают динамику вращения спутника, снабженного тремя реактивными двигателями. Управления характеризуют расход топлива. Минимизируемый функционал от управления отражает цель достигнуть состояния, характеризующегося отсутствием вращения спутника (стабилизация).

Расчет полученной задачи производился на основе последовательного решения задач улучшения управления (13), для решения которых использовался неявный итерационный процесс (15). Эффективность указанного метода (М3) сравнивалась со стандартными методами условного градиента (М1) и проекции градиента (М2) (см. [4]). Для решения полученной задачи методами М1 и М2 задача приводилась к задаче без ограничений со штрафным функционалом следующего вида:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}(x_2^2(0.1) + x_3^2(0.1)) + \frac{\gamma}{2}x_1^2(0.1),$$

где $\gamma > 0$ — параметр штрафа, который подбирается экспериментально для обеспечения выполнения ограничения с заданной точностью. Параметр $\alpha > 0$ выбирается экспериментально для обеспечения сходимости итерационных приближений метода М3.

Расчет фазовых и сопряженных задач Коши осуществлялся с помощью стандартной процедуры языка Фортран `divprk` (см. [1]), реализующей метод Рунге—Кутты 5-6 порядка. Абсолютная погрешность численного интегрирования задач Коши задавалась равной 10^{-10} . Значения вычисленных управляющих, фазовых и сопряженных переменных в процессе расчета запоминались в узлах заданной равномерной сетки с шагом дискретизации, равным 0,001. Для аппроксимации управлений между узлами равномерной сетки использовалась кусочно постоянная интерполяция.

Решение алгебраического уравнения с заданной точностью относительно множителя Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}$, возникающего на каждой итерации процесса (15), осуществлялось с помощью минимизации квадратичной невязки уравнения средствами стандартной процедуры языка Фортран `dumpr1`

Таблица 1

Метод	Φ_0^*	Φ_1^*	N	Примечание
M1	$3,16428 \times 10^{-13}$	$2,45074 \times 10^{-7}$	8512	0,5
M2	$1,48471 \times 10^{-13}$	$3,13041 \times 10^{-7}$	2642	0,5
M3	$3,63122 \times 10^{-13}$	$5,229144 \times 10^{-8}$	1458	10^{-5}

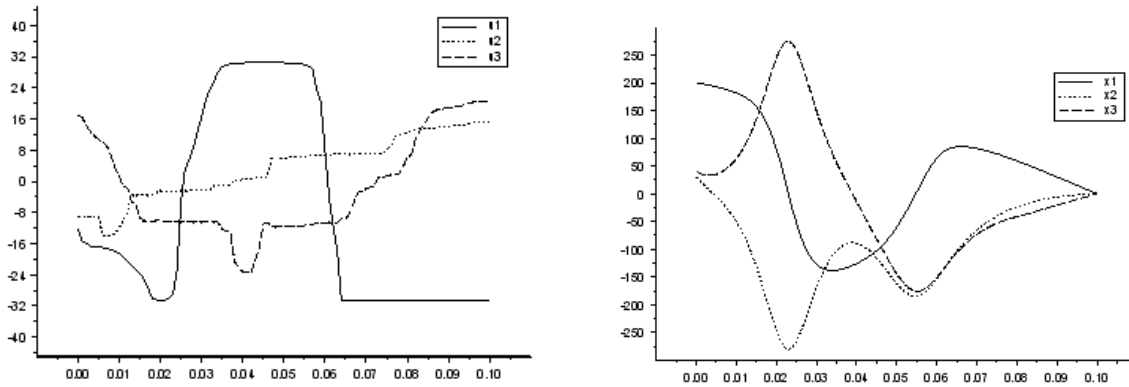


Рис. 1

(см. [1]), реализующей метод деформируемого многогранника. Трудоемкость методов оценивалась суммарным количеством расчетных задач Коши для фазовых и сопряженных переменных. В качестве начального приближения для всех сравниваемых методов выбиралось $u^0(t) \equiv 0, t \in T$. Практическим критерием остановки расчета задачи во всех методах являлось условие

$$|\Phi_0(u^{k+1}) - \Phi_0(u^k)| \leq M |\Phi_0(u^k)|,$$

где $k \geq 0$ — номер итерации, $M = 10^{-5}$.

Сравнительные качественные и количественные результаты расчетов представлены в таблице 1, где использованы следующие обозначения: Φ_0^* — расчетное значение целевого функционала задачи, Φ_1^* — модуль расчетного значения функционала ограничения, N — суммарное количество расчетных фазовых и сопряженных задач Коши. В примечании для методов M1 и M2 указано значение параметра штрафа $\gamma > 0$, для метода M3 — значение проекционного параметра $\alpha > 0$, обеспечивающего сходимость итерационного процесса (15). Графики расчетных управлений и фазовых траекторий для методов M1, M2 и M3 приведены соответственно на рис. 1, 2 и 3.

Результаты расчетов позволяют сделать вывод о лучшей вычислительной эффективности предлагаемого проекционного метода, оцениваемой по суммарному количеству задач Коши, по сравнению с методами условного градиента и проекции градиента. При этом всеми сравниваемыми методами получены практически одинаковые расчетные фазовые траектории и значения функционалов от управления.

5. Заключение. Предлагаемые проекционные методы нелокального улучшения допустимых управлений в рассматриваемом классе нелинейных задач с ограничениями характеризуются следующими свойствами:

- 1) отсутствие достаточно трудоемкой процедуры варьирования управления в малой окрестности улучшаемого управления, характерной для градиентных методов;
- 2) точное выполнение терминального ограничения на каждой итерации улучшения управления.

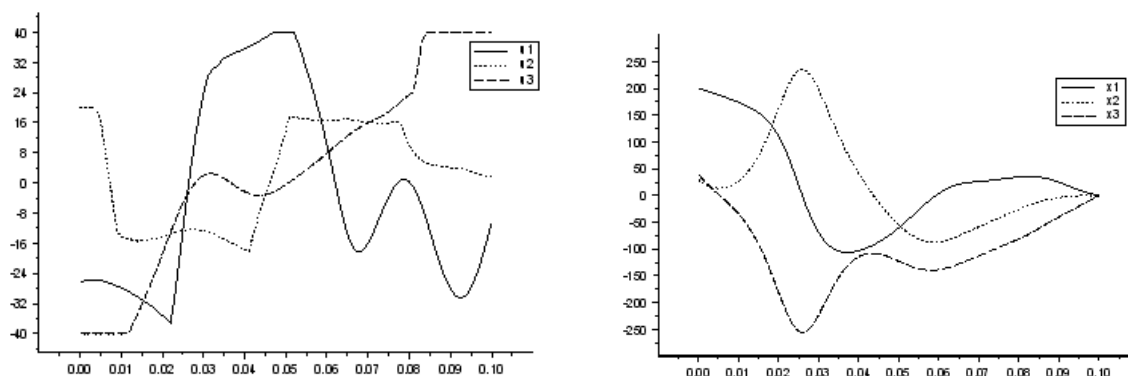


Рис. 2

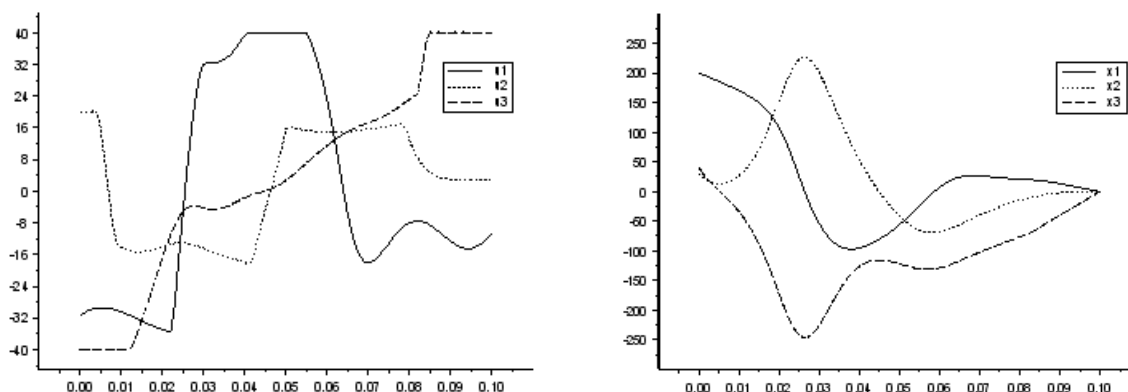


Рис. 3

Точное выполнение терминального ограничения на каждой итерации процесса дает возможность сузить область поиска управлений до множества допустимых управлений в отличие от стандартных методов Лагранжа, в которых поиск осуществляется одновременно как по множеству доступных управлений, так и по множеству множителей Лагранжа. Методы штрафов в общем случае также не позволяют строить итерационный процесс на множестве допустимых управлений в рассматриваемом классе задач оптимального управления с ограничениями. Свойство допустимости управлений предлагаемых проекционных методов дает возможность эффективно получать приемлемые на практике допустимые управления по значению критерия оптимальности.

Указанные свойства методов являются важными факторами для повышения эффективности решения задач оптимального управления с терминальными ограничениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бартенев О. В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Ч. 2. — М.: Диалог-МИФИ, 2001.
2. Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. — Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008.
3. Булдаев А. С. Методы неподвижных точек на основе операции проектирования в задачах оптимизации управляющих функций и параметров// Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат., информ. — 2017. — 1. — С. 38–54.
4. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1994.

5. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
6. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
7. Тятюшкин А. И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. — Новосибирск: Наука, 1992.

Трунин Дмитрий Олегович

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ

E-mail: tdobsu@yandex.ru