ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 150–160
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-150-160

УДК 517.983.51

СИНГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2023 г. **М. В. ФАЛАЛЕЕВ**

Аннотация. Рассматриваются вырожденные линейные системы дифференциальных уравнений специального вида в банаховых пространствах. Структура решения задачи Коши для таких систем полностью определяется свойствами матричного и операторного пучков системы. Решения строятся в пространстве распределений с ограниченным слева носителем и восстанавливаются с помощью матричной фундаментальной оператор-функции системы. На основе анализа построенного таким способом обобщенного решения можно получить теоремы о разрешимости в пространстве функций конечной гладкости исходной задачи Коши.

***Ключевые слова*:** банахово пространство, оператор Фредгольма, обобщенная функция, фундаментальная матричная оператор-функция, пучок постоянных матриц.

SINGULAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN BANACH SPACES

© 2023 **M. V. FALALEEV**

Abstract. Degenerate linear systems of differential equations of a special form in Banach spaces are considered. The structure of the solution of the Cauchy problem for such systems is completely determined by the properties of the matrix and operator pencils of the system. Solutions are constructed in the space of distributions with support bounded on the left and are restored using the matrix fundamental operator function of the system. Based on the analysis of the generalized solution constructed in this way, one can obtain theorems on the solvability in the space of functions of finite smoothness of the original Cauchy problem.

***Keywords and phrases*:** Banach space, Fredholm operator, generalized function, fundamental matrix operator-function, sheaf of constant matrices.

***AMS Subject Classification*:** 34G10

1. Введение. Рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\mathbb{M}B\bar{u}^{(N)}(t) = \mathbb{L}A\bar{u}(t) + \bar{f}(t), \tag{1}$$

$$\bar{u}(0) = \bar{u}_0, \quad \dot{\bar{u}}(0) = \bar{u}_1, \quad \ldots, \quad \bar{u}^{(N-1)}(0) = \bar{u}_{N-1}; \tag{2}$$

здесь $\bar{u}(t)$ и $\bar{f}(t)$ — вектор-функции (столбцы) размерности s, компоненты $u_i(t)$ которых — функции со значениями в E_1, $f_i(t)$ — функции со значениями в E_2, $i = 1, \ldots, s$, E_1, E_2 — банаховы пространства, B, A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00407 А)..

оператор B необратим, $\overline{R(B)} = R(B)$, оператор A непрерывно обратим. Символами $A\bar{u}(t)$ и $B\bar{u}^{(N)}(t)$ Обозначены вектор-функции (столбцы) размерности s с компонентами $Au_i(t)$ и $Bu_i^{(N)}(t)$, $\mathbb{M}$ и $\mathbb{L}$ — квадратные $(s\times s)$-матрицы, записи $\mathbb{M}B\bar{u}^{(N)}(t)$ и $\mathbb{L}A\bar{u}(t)$ означают, как обычно, действия матриц $\mathbb{M}$ и $\mathbb{L}$ на вектор-функции (столбцы) $B\bar{u}^{(N)}(t)$ и $A\bar{u}(t)$ соответственно.

В уравнении (1) не только оператор B при старшей производной необратим, но и матрица $\mathbb{M}$ вырождена. В случае $\det\mathbb{M} \neq 0$ без ограничения общности можно считать, что $\mathbb{M} \equiv \mathbb{E}_s$ — единичная матрица; соответствующие результаты были получены в [10]. Таким образом, в уравнении (1) имеем «двойное вырождение», а именно, ядро оператора $N(B) \neq \emptyset$ и $\det\mathbb{M} = 0$. Отметим, что системы вида (1)–(2) встречаются, например, при изучении колебательных процессов в сложно организованных структурах типа молекулы ДНК (см. [12] и библиографию там же).

2. Основные сведения о пучках матриц с постоянными коэффициентами. Известно (см. [4]), что для любой квадратной матрицы $\mathbb{C}$ размерности d существует такая невырожденная матрица $\mathbb{T}$, что

$$\mathbb{T}\mathbb{C}\mathbb{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbb{E}_{q_1} + \mathbb{N}_{q_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mathbb{E}_{q_2} + \mathbb{N}_{q_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_\mu\mathbb{E}_{q_\mu} + \mathbb{N}_{q_\mu} \end{pmatrix} =$$
$$= \operatorname{diag}\left\{\lambda_1\mathbb{E}_{q_1} + \mathbb{N}_{q_1}, \lambda_2\mathbb{E}_{q_2} + \mathbb{N}_{q_2}, \dots, \lambda_\mu\mathbb{E}_{q_\mu} + \mathbb{N}_{q_\mu}\right\}; \quad (3)$$

здесь $q_1+q_2+\cdot+q_\mu = d$, индекс q_i при матрицах $\mathbb{E}_{q_i}$ (единичной) или $\mathbb{N}_{q_i}$ (жорданов нильпотентный блок) означает их размерность q_i,

$$\mathbb{N}_{q_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots \mu, \quad \mathbb{N}_{q_i}^{q_i} = \mathbb{O}_{q_i}. \quad (4)$$

Правую часть равенства (3) называют канонической жордановой формой матрицы $\mathbb{C}$, блоки $(\lambda_i\mathbb{E}_{q_i} + \mathbb{N}_{q_i})$ называют жордановыми «ящиками», числа λ_i называют собственными числами матрицы $\mathbb{C}$ кратности q_i, причем все λ_i отличны от нуля, если $\det\mathbb{C} \neq 0$.

Для квадратных матриц $\mathbb{M}$ и $\mathbb{L}$ размерности s из уравнения (1) выражение вида $(\lambda\mathbb{M} + \mathbb{L})$, где λ — скалярный параметр (вообще говоря, комплексный), принято называть пучком пары матриц $\mathbb{M}$ и $\mathbb{L}$ (см. [3, 11]). Такой пучок называется регулярным, если его характеристический многочлен $\det(\lambda\mathbb{M} + \mathbb{L}) \neq 0$; в этом случае существует пара таких невырожденных квадратных матриц $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$ размерности s, что

$$\mathbb{P}(\lambda\mathbb{M} + \mathbb{L})\mathbb{Q} = \lambda\begin{pmatrix} \mathbb{E}_d & \mathbb{O}_{d\times(s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d)\times d} & \mathbb{N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{J}_d & \mathbb{O}_{d\times(s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d)\times d} & \mathbb{E}_{s-d} \end{pmatrix} \quad (5)$$

(см. [3, 11]), где $\mathbb{N} = \operatorname{diag}\left\{\mathbb{N}_{m_1}, \mathbb{N}_{m_2}, \dots, \mathbb{N}_{m_j}\right\}$, $\mathbb{N}_{m_i}$ — жордановы нильпотентные блоки размерности m_i (см. (4)), $d + m_1 + m_2 + \dots + m_j = s$. Обозначим через $\tilde{m} = \max(m_1, m_2, \dots, m_j)$ индекс регулярности (см. [11]) матричного пучка $(\lambda\mathbb{M} + \mathbb{L})$; тогда $\mathbb{N}^{\tilde{m}} = \mathbb{O}_{m_1+m_2+\dots+m_j} = \mathbb{O}_{s-d}$, $\mathbb{J}_d$ — квадратная матрица размерности d жордановой структуры (см. правую часть формулы (3)). Если $\det\mathbb{L} \neq 0$, то в силу (5) в представлении (3) для матрицы $\mathbb{J}_d$ все $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \dots, \mu$.

3. Матричные фундаментальные оператор-функции в условиях фредгольмовости. Пусть для пучка $(\lambda B + A)$ операторных коэффициентов уравнения (1) выполнено следующее условие:

(A) оператор B фредгольмов (см. [2]), т.е. $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n$, и имеет полный A-жорданов набор (см. [2]) элементов $\{\varphi_i^{(j)} \in E_1,\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, p_i\}$.

Тогда существует набор функционалов $\{\phi_i^{(j)} \in E_2^*,\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, p_i\}$, составляющих полный A^*-жорданов набор оператора B^*; здесь $\{\varphi_i^{(1)},\ i = 1, \dots, n,\}$ — базис ядра $N(B)$ оператора B и $\{\phi_i^{(1)},\ i = 1, \dots, n\}$ — базис ядра $N(B^*)$ сопряженного оператора B^*.

В соответствии с теоремой Хана—Банаха (см. [2]) существуют биортогальные системы элементов

$$\langle \varphi_i^{(1)}, \gamma_k \rangle = \langle z_k, \phi_i^{(1)} \rangle = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, n, \quad \gamma_k \in E_1^*, \quad z_k \in E_2,$$

где δ_{ik} — символ Кронекера; тогда существуют ограниченный оператор Треногина—Шмидта вида

$$\Gamma = \left(B + \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$$

(см. [2]) и проектор в E_2

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot, \phi_i^{(j)} \right\rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)}.$$

В соответствии с [10, теорема 1] справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если матричный пучок* $(\lambda\mathbb{M} + \mathbb{L})$ *регулярен,* $\det \mathbb{L} \neq 0$*, операторный пучок* $(\lambda B + A)$ *удовлетворяет условию* (A)*, то матричный дифференциальный оператор* $\big(\mathbb{E}_d B \delta^{(N)}(t) - \mathbb{J}_d A \delta(t)\big)$ *имеет в классе* $K'_+(E_2)$ *матричную фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\tilde{\mathcal{E}}_d(t) = \operatorname{diag}\left\{E_{\lambda_1}(t),\ E_{\lambda_2}(t),\ \dots,\ E_{\lambda_\mu}(t)\right\}; \tag{6}$$

здесь каждый из диагональных блоков $E_{\lambda_\nu}(t)$ *является верхнетреугольной квадратной матрицей размерности* q_ν *вида*

$$E_{\lambda_\nu}(t) = \mathbb{E}_{q_\nu} \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) * \sigma_{\lambda_\nu}(t), \quad \nu = 1, \dots, \mu,$$

$$\sigma_{\lambda_\nu}(t) = \begin{pmatrix} I\delta(t) & A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) & (A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t))^2 & \dots & \dots & (A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t))^{q_\nu - 1} \\ 0 & I\delta(t) & A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) & \dots & \dots & (A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t))^{q_\nu - 2} \\ 0 & 0 & I\delta(t) & \dots & \dots & (A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t))^{q_\nu - 3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) & (A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t))^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I\delta(t) & A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I\delta(t) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) = \Gamma \mathcal{U}_N(\lambda_\nu A \Gamma t) \left[I - \tilde{Q}\right] \theta(t) - \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p_i - 1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i - k} \left\langle \cdot, \phi_i^{(j)} \right\rangle \frac{1}{\lambda_\nu^{k+1}} \varphi_i^{(p_i - k + 1 - j)} \right\} \delta^{(k \cdot N)}(t) \right),$$

$$\mathcal{U}_N(\lambda_\nu A \Gamma t) = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_\nu A \Gamma)^{i-1} \frac{t^{iN-1}}{(iN-1)!}.$$

Следствие 1. *Если в условиях утверждения* 1 *все элементарные делители матрицы* $\mathbb{J}_d$ *имеют первую степень, то матричная фундаментальная оператор-функция дифференциального оператора* $\big(\mathbb{E}_d B \delta^{(N)}(t) - \mathbb{J}_d A \delta(t)\big)$ *имеет в классе* $K'_+(E_2)$ (*наиболее простой*) *вид*

$$\tilde{\mathcal{E}}_d(t) = \operatorname{diag}\left\{\mathcal{E}_{\lambda_1}(t),\ \mathcal{E}_{\lambda_2}(t),\ \dots,\ \mathcal{E}_{\lambda_d}(t)\right\}.$$

Имеет место также следующий факт.

Утверждение 2. *Если матричный пучок* $(\lambda\mathbb{M} + \mathbb{L})$ *регулярен, оператор* A *непрерывно обратим, то матричный дифференциальный оператор* $\big(\mathbb{N} B \delta^{(N)}(t) - \mathbb{E}_{s-d} A \delta(t)\big)$ *имеет в классе* $K'_+(E_2)$ *матричную фундаментальную оператор-функцию вида*

$$-\sum_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k (A^{-1} B)^k A^{-1} \delta^{(k \cdot N)}(t).$$

Доказательство. В соответствии с определением фундаментальной оператор-функции (см. [17]) необходимо проверить справедливость следующих двух матрично-операторных равенств:

$$\Big(\mathbb{N}B\delta^{(N)}(t)-\mathbb{E}_{s-d}A\delta(t)\Big)*\left(-\sum_{k=0}^{\tilde m-1}\mathbb{N}^k(A^{-1}B)^kA^{-1}\delta^{(k\cdot N)}(t)\right)=\mathbb{E}_{s-d}I_2\delta(t),$$

$$\left(-\sum_{k=0}^{\tilde m-1}\mathbb{N}^k(A^{-1}B)^kA^{-1}\delta^{(k\cdot N)}(t)\right)*\Big(\mathbb{N}B\delta^{(N)}(t)-\mathbb{E}_{s-d}A\delta(t)\Big)=\mathbb{E}_{s-d}I_1\delta(t);$$

здесь I_1 и I_2 — единичные операторы банаховых пространств E_1 и E_2 соответственно. Действительно, в силу нильпотентности $\mathbb{N}$ (см. формулу (5)) получаем

$$\Big(\mathbb{N}B\delta^{(N)}(t)-\mathbb{E}_{s-d}A\delta(t)\Big)*\left(-\sum_{k=0}^{\tilde m-1}\mathbb{N}^k(A^{-1}B)^kA^{-1}\delta^{(k\cdot N)}(t)\right)=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\tilde m-2}\mathbb{N}^{k+1}B(A^{-1}B)^kA^{-1}\delta^{((k+1)\cdot N)}(t)+\sum_{k=0}^{\tilde m-1}\mathbb{N}^kA(A^{-1}B)^kA^{-1}\delta^{(k\cdot N)}(t)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{\tilde m-1}\mathbb{N}^kB(A^{-1}B)^{k-1}A^{-1}\delta^{(k\cdot N)}(t)+\sum_{k=1}^{\tilde m-1}\mathbb{N}^kAA^{-1}B(A^{-1}B)^{k-1}A^{-1}\delta^{(k\cdot N)}(t)+\mathbb{E}_{s-d}AA^{-1}\delta(t)=$$

$$=\mathbb{E}_{s-d}I_2\delta(t).$$

Второе равенство доказывается аналогично:

$$\left(-\sum_{k=0}^{\tilde m-1}\mathbb{N}^k(A^{-1}B)^kA^{-1}\delta^{(k\cdot N)}(t)\right)*\Big(\mathbb{N}B\delta^{(N)}(t)-\mathbb{E}_{s-d}A\delta(t)\Big)=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\tilde m-2}\mathbb{N}^{k+1}(A^{-1}B)^{k+1}\delta^{((k+1)\cdot N)}(t)+\sum_{k=0}^{\tilde m-1}\mathbb{N}^k(A^{-1}B)^k\delta^{(k\cdot N)}(t)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{\tilde m-1}\mathbb{N}^k(A^{-1}B)^k\delta^{(k\cdot N)}(t)+\sum_{k=1}^{\tilde m-1}\mathbb{N}^k(A^{-1}B)^k\delta^{(k\cdot N)}(t)+\mathbb{E}_{s-d}I_1\delta(t)=\mathbb{E}_{s-d}I_1\delta(t).\qquad\square$$

Из утверждений 1 и 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Если матричный пучок* $(\lambda\mathbb{M}+\mathbb{L})$ *регулярен,* $\det\mathbb{L}\neq 0$*, операторный пучок* $(\lambda B+A)$ *удовлетворяет условию* (A) *и оператор* A *непрерывно обратим, то матричный дифференциальный оператор* $\big(\mathbb{M}B\delta^{(N)}(t)-\mathbb{L}A\delta(t)\big)$ (*соответствующий уравнению* (1)) *имеет в классе* $K'_+(E_2)$ *матричную фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t)=\mathbb{Q}\delta(t)*\begin{pmatrix}\tilde{\mathcal{E}}_d(t) & \mathbb{O}_{d\times(s-d)}\\ \mathbb{O}_{(s-d)\times d} & -\sum\limits_{k=0}^{\tilde m-1}\mathbb{N}^k(A^{-1}B)^kA^{-1}\delta^{(k\cdot N)}(t)\end{pmatrix}*\mathbb{P}\delta(t).\tag{8}$$

Доказательство. Доказательство проведем по той же схеме, что и в утверждении 2. В силу равенства (5) и утверждений 1 и 2 имеем

$$\Big(\mathbb{M}B\delta^{(N)}(t)-\mathbb{L}A\delta(t)\Big)*\mathcal{E}_N(t)=\mathbb{P}^{-1}\delta(t)*\mathbb{P}\delta(t)*\Big(\mathbb{M}B\delta^{(N)}(t)-\mathbb{L}A\delta(t)\Big)*$$

$$*\,\mathbb{Q}\delta(t)*\begin{pmatrix}\tilde{\mathcal{E}}_d(t) & \mathbb{O}_{d\times(s-d)}\\ \mathbb{O}_{(s-d)\times d} & -\sum\limits_{k=0}^{\tilde m-1}\mathbb{N}^k(A^{-1}B)^kA^{-1}\delta^{(k\cdot N)}(t)\end{pmatrix}*\mathbb{P}\delta(t)=$$

$$= \mathbb{P}^{-1}\delta(t) * \left(\begin{pmatrix} \mathbb{E}_d & \mathbb{O}_{d\times(s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d)\times d} & \mathbb{N} \end{pmatrix} B\delta^{(N)}(t) - \begin{pmatrix} \mathbb{J}_d & \mathbb{O}_{d\times(s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d)\times d} & \mathbb{E}_{s-d} \end{pmatrix} A\delta(t)\right) *$$

$$* \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_d(t) & \mathbb{O}_{d\times(s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d)\times d} & -\sum\limits_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k (A^{-1}B)^k A^{-1}\delta^{(k\cdot N)}(t) \end{pmatrix} * \mathbb{P}\delta(t) =$$

$$= \mathbb{P}^{-1}\delta(t) * \begin{pmatrix} \mathbb{E}_d B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{J}_d A\delta(t) & \mathbb{O}_{d\times(s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d)\times d} & \mathbb{N}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{E}_{s-d}A\delta(t) \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_d(t) & \mathbb{O}_{d\times(s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d)\times d} & -\sum\limits_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k (A^{-1}B)^k A^{-1}\delta^{(k\cdot N)}(t) \end{pmatrix} * \mathbb{P}\delta(t) =$$

$$= \mathbb{P}^{-1}\delta(t) * \begin{pmatrix} \mathbb{E}_d I_2\delta(t) & \mathbb{O}_{d\times(s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d)\times d} & \mathbb{E}_{s-d} I_2\delta(t) \end{pmatrix} * \mathbb{P}\delta(t) = \mathbb{E}_s I_2 \delta(t).$$

Аналогично проверяется второе равенство:

$$\mathcal{E}_N(t) * \left(\mathbb{M}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{L}A\delta(t)\right) = \mathbb{Q}\delta(t) * \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_d(t) & \mathbb{O}_{d\times(s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d)\times d} & -\sum\limits_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k (A^{-1}B)^k A^{-1}\delta^{(k\cdot N)}(t) \end{pmatrix} *$$

$$* \mathbb{P}\delta(t) * \left(\mathbb{M}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{L}A\delta(t)\right) * \mathbb{Q}\delta(t) * \mathbb{Q}^{-1}\delta(t) =$$

$$= \mathbb{Q}\delta(t) * \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_d(t) & \mathbb{O}_{d\times(s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d)\times d} & -\sum\limits_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k (A^{-1}B)^k A^{-1}\delta^{(k\cdot N)}(t) \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} \mathbb{E}_d B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{J}_d A\delta(t) & \mathbb{O}_{d\times(s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d)\times d} & \mathbb{N}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{E}_{s-d}A\delta(t) \end{pmatrix} * \mathbb{Q}^{-1}\delta(t) =$$

$$= \mathbb{Q}\delta(t) * \begin{pmatrix} \mathbb{E}_d I_1\delta(t) & \mathbb{O}_{d\times(s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d)\times d} & \mathbb{E}_{s-d} I_1\delta(t) \end{pmatrix} * \mathbb{Q}^{-1}\delta(t) = \mathbb{E}_s I_1 \delta(t). \quad \square$$

В условиях теоремы 1 единственным обобщенным решением класса $K'_+(E_1)$ задачи Коши (1)–(2) является функция вида

$$\tilde{\bar{u}}(t) = \mathcal{E}_N(t) * \left(\bar{f}(t)\theta(t) + \mathbb{M}B\bar{u}_{N-1}\delta(t) + \mathbb{M}B\bar{u}_{N-2}\delta'(t) + \cdots + \mathbb{M}B\bar{u}_0\delta^{(N-1)}(t)\right). \tag{9}$$

Теорема 2. *Если в условиях теоремы* 1 *все элементарные делители матрицы* $\mathbb{J}_d$ *первой степени,* $\mathbb{N}$ — *нильпотентный блок второго порядка* (*см.* (4)), *все* $p_i = 1, i = 1, \ldots, n,$ $N = 1$, *то матричная фундаментальная оператор-функция* (*соответствующая уравнению* (1)) *имеет вид*

$$\mathcal{E}_1(t) = \mathbb{Q}\delta(t) * \begin{pmatrix} \operatorname{diag}\left\{\mathcal{E}^1_{\lambda_1}(t), \mathcal{E}^1_{\lambda_2}(t), \ldots, \mathcal{E}^1_{\lambda_d}(t)\right\} & \mathbb{O}_{d\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times d} & \begin{matrix} -A^{-1}\delta(t) & -A^{-1}BA^{-1}\delta'(t) \\ 0 & -A^{-1}\delta(t) \end{matrix} \end{pmatrix} * \mathbb{P}\delta(t);$$

здесь

$$\mathcal{E}^1_{\lambda_\nu}(t) = \Gamma\exp(\lambda_\nu A\Gamma t)\left[I - \sum_{i=1}^{n}\left\langle\cdot, \phi_i^{(1)}\right\rangle A\varphi_i^{(1)}\right]\theta(t) - \frac{1}{\lambda_\nu}\sum_{i=1}^{n}\left\langle\cdot, \phi_i^{(1)}\right\rangle \varphi_i^{(1)}\delta(t),\ \nu = 1, \ldots, d.$$

В условиях теоремы 2 единственным обобщенным решением задачи Коши (1)–(2) в классе $K'_+(E_1)$, в соответствии с формулой (9), является функция

$$\tilde{\bar{u}}(t) = \mathcal{E}_1(t) * \left(\bar{f}(t)\theta(t) + \mathbb{M}B\bar{u}_0\delta(t)\right), \tag{10}$$

сингулярная составляющая которой имеет вид

$$-\mathbb{Q}\delta(t) * \begin{pmatrix} \mathbb{O}_d & \mathbb{O}_{d\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times d} & \mathbb{N} \end{pmatrix} \big(\mathbb{Q}^{-1}A^{-1}B\bar{u}_0 + \mathbb{P}A^{-1}BA^{-1}\bar{f}(0)\big)\delta(t)$$

и обращается в нуль при выполнении условий

$$\begin{pmatrix} \mathbb{O}_{2\times d} & \mathbb{N} \end{pmatrix} \big(\mathbb{Q}^{-1}B\bar{u}_0 + \mathbb{P}BA^{-1}\bar{f}(0)\big) = 0; \tag{11}$$

это первое условие разрешимости задачи Коши (1)–(2) в классе $C^1(t \geqslant 0, E_1)$. Регулярная составляющая функции (10) обращает уравнение (1) в тождество; потребовав, чтобы она удовлетворяла начальным условиям (2), получим ещё одну группу условий разрешимости исходной задачи Коши (1)–(2) в классе $C^1(t \geqslant 0, E_1)$, а именно,

$$\begin{pmatrix} \mathbb{O}_{2\times d} & \mathbb{E}_2 \end{pmatrix} \big(\mathbb{Q}^{-1}A\bar{u}_0 + \mathbb{P}\bar{f}(0)\big) + \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{2\times d} & \mathbb{N} \end{pmatrix}\mathbb{P}BA^{-1}\bar{f}'(0) = 0, \tag{12}$$

$$\Big\langle \big(\mathbb{P}\bar{f}(0)\big)_\nu + \lambda_\nu\big(\mathbb{Q}^{-1}A\bar{u}_0\big)_\nu,\ \phi_i \Big\rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \nu = 1, \ldots, d; \tag{13}$$

здесь $\big(\mathbb{P}\bar{f}(0)\big)_\nu$ и $\big(\mathbb{Q}^{-1}A\bar{u}_0\big)_\nu$ — координаты ν соответствующих векторов.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы* 2, *то исходная задача Коши* (1)–(2) *разрешима в классе* $C^1(t \geqslant 0, E_1)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия разрешимости* (11), (12), (13).

Теорема 4. *l Если в условиях теоремы* 1 *все элементарные делители матрицы* $\mathbb{J}_d$ *имеют первую степень,* $\mathbb{N}$ — *нильпотентный блок второго порядка* (*см.* (4))*, все* $p_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, $N = 2$, *то матричная фундаментальная оператор-функция* (*соответствующая уравнению* (1)) *имеет вид*

$$\mathcal{E}_2(t) = \mathbb{Q}\delta(t) * \begin{pmatrix} \operatorname{diag}\Big\{\mathcal{E}^2_{\lambda_1}(t), \mathcal{E}^2_{\lambda_2}(t), \ldots, \mathcal{E}^2_{\lambda_d}(t)\Big\} & \mathbb{O}_{d\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times d} & \begin{matrix} -A^{-1}\delta(t) & -A^{-1}BA^{-1}\delta''(t) \\ 0 & -A^{-1}\delta(t) \end{matrix} \end{pmatrix} * \mathbb{P}\delta(t);$$

здесь

$$\mathcal{E}^2_{\lambda_\nu}(t) = \Gamma\frac{\operatorname{sh}\big(\sqrt{\lambda_\nu A\Gamma}t\big)}{\sqrt{\lambda_\nu A\Gamma}}\left[I - \sum_{i=1}^{n}\Big\langle \cdot, \phi_i^{(1)}\Big\rangle A\varphi_i^{(1)}\right]\theta(t) - \frac{1}{\lambda_\nu}\sum_{i=1}^{n}\Big\langle \cdot, \phi_i^{(1)}\Big\rangle \varphi_i^{(1)}\delta(t), \quad \nu = 1, \ldots, d.$$

Так как

$$\frac{\operatorname{sh}\big(\sqrt{\lambda_\nu A\Gamma}t\big)}{\sqrt{\lambda_\nu A\Gamma}} = \mathcal{U}_2(\lambda_\nu A\Gamma t) = \sum_{i=1}^{\infty}(\lambda_\nu A\Gamma)^{i-1}\frac{t^{2i-1}}{(2i-1)!},$$

то здесь операторный корень $\sqrt{\lambda_\nu A\Gamma}$ — «формальный символ».

В условиях теоремы 4 единственное решение задачи Коши (1)–(2) в классе $K'_+(E_1)$ имеет вид

$$\bar{\bar{u}}(t) = \mathcal{E}_2(t) * \Big(\bar{f}(t)\theta(t) + \mathbb{M}B\bar{u}_1\delta(t) + \mathbb{M}B\bar{u}_0\delta'(t)\Big). \tag{14}$$

Сингулярной составляющей решения (14) является распределение

$$-\mathbb{Q}\delta(t) * \begin{pmatrix} \mathbb{O}_d & \mathbb{O}_{d\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times d} & \mathbb{N} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \Big[\big(\mathbb{Q}^{-1}A^{-1}B\bar{u}_0 + \mathbb{P}A^{-1}BA^{-1}\bar{f}(0)\big)\delta'(t) + \big(\mathbb{Q}^{-1}A^{-1}B\bar{u}_1 + \mathbb{P}A^{-1}BA^{-1}\bar{f}'(0)\big)\delta(t)\Big],$$

которое обращается в нуль, если

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{2\times d} & \mathbb{N} \end{pmatrix}\big(\mathbb{Q}^{-1}B\bar{u}_0 + \mathbb{P}BA^{-1}\bar{f}(0)\big) = 0, \\ \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{2\times d} & \mathbb{N} \end{pmatrix}\big(\mathbb{Q}^{-1}B\bar{u}_1 + \mathbb{P}BA^{-1}\bar{f}'(0)\big) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Регулярная составляющая решения (14) удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (2), если

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\mathbb{O}_{2\times d} & \mathbb{E}_2\end{pmatrix}\big(\mathbb{Q}^{-1}A\bar{u}_0+\mathbb{P}\bar{f}(0)\big)+\begin{pmatrix}\mathbb{O}_{2\times d} & \mathbb{N}\end{pmatrix}\mathbb{P}BA^{-1}\bar{f}''(0)=0,\\ \begin{pmatrix}\mathbb{O}_{2\times d} & \mathbb{E}_2\end{pmatrix}\big(\mathbb{Q}^{-1}A\bar{u}_1+\mathbb{P}\bar{f}'(0)\big)+\begin{pmatrix}\mathbb{O}_{2\times d} & \mathbb{N}\end{pmatrix}\mathbb{P}BA^{-1}\bar{f}'''(0)=0,\end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases}\Big\langle\big(\mathbb{P}\bar{f}(0)\big)_\nu+\lambda_\nu\big(\mathbb{Q}^{-1}A\bar{u}_0\big)_\nu,\ \phi_i\Big\rangle=0,\\ \Big\langle\big(\mathbb{P}\bar{f}'(0)\big)_\nu+\lambda_\nu\big(\mathbb{Q}^{-1}A\bar{u}_1\big)_\nu,\ \phi_i\Big\rangle=0,\end{cases}\quad i=1,\ldots,n,\quad \nu=1,\ldots,d. \tag{17}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы* 4, *то задача Коши* (1)–(2) *разрешима в классе* $C^2(t\geqslant 0,E_1)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия разрешимости* (15), (16) *и* (17).

Замечание 1. Условия разрешимости (11), (12), (15) и (16) связаны с индексом регулярности матричного пучка $(\lambda\mathbb{M}+\mathbb{L})$ (см. [11]), а условия (13) и (17) со свойствами операторного пучка $(\lambda B+A)$.

Пример 1 (система уравнений Баренблата—Желтова—Кочиной)**.** Рассмотрим систему уравнений

$$(\alpha-\Delta)\mathbb{M}\bar{u}_t=\beta\mathbb{L}\Delta\bar{u}+\bar{f}(x);$$

здесь $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^m$, Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\mathbb{M}$ и $\mathbb{L}$ — квадратные матрицы размерности s, $\bar{u}(t,x)$ и $\bar{f}(x)$ — вектор-функции столбцы размерности s, Δ — оператор Лапласа.

Рассмотрим для этой системы задачу Коши—Дирихле в цилиндре $(\mathbb{R}_+\times\Omega)$:

$$\bar{u}\Big|_{t=0}=\bar{u}_0(x),\quad x\in\Omega;\qquad \bar{u}\Big|_{\partial\Omega}=0,\quad (t,x)\in(\mathbb{R}_+\times\Omega).$$

Уранения такого вида встречаются при моделировании динамики давления жидкости, фильтующейся в трещиновато-пористой среде (см. [1]), процессов теплопроводности с «двумя температурами» (см. [13]), процессов влагопереноса в почве (см. [15]), течения жидкостей второго порядка (см. [19]).

Пусть в разложении (5) все элементарные делители матрицы $\mathbb{J}$ имеют первую степень и $\mathbb{N}$ — нильпотентный блок второго порядка. Данная задача редуцируется к системе вида (1)–(2), если выбрать операторы B и A и банаховы пространства, например, следующим образом:

$$E_1\equiv\Big\{u\in W_2^{k+2}:\ u\big|_{\partial\Omega}=0\Big\},\quad E_2\equiv W_2^k;$$

здесь W_2^k — пространство Соболева, $B=\alpha-\Delta$, $A=\beta\Delta$, $\alpha\in\sigma(\Delta)$ — спектр оператора Лапласа. При таком выборе оператор B — фредгольмов, $\{\varphi_i,\ i=1,\ldots,n\}$ — пространство решений однородной задачи Дирихле

$$\Delta u=\alpha u,\quad u\big|_{\partial\Omega}=0;$$

так как $(\Delta\varphi_i,\varphi_j)=\alpha\delta_{ij}$, то A-присоединенных элементов нет, т.е. все $p_i=1$, $i=1,\ldots,n$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 3 и справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. *Если начальные условия* $\bar{u}_0(x)$ *и правая часть* $\bar{f}(x)$ *таковы, что*

$$\Big(\bar{e}_s,\ (\alpha-\Delta)\Big(\beta\mathbb{Q}^{-1}\bar{u}_0(x)+\mathbb{P}\Delta^{-1}\bar{f}(x)\Big)\Big)\equiv 0,\quad \bar{e}_s=(0,0,\ldots,0,1)\in\mathbb{R}^s,$$

$$\begin{pmatrix}\mathbb{O}_{2\times d} & \mathbb{E}_2\end{pmatrix}\big(\beta\mathbb{Q}^{-1}\Delta\bar{u}_0(x)+\mathbb{P}\bar{f}(x)\big)\equiv\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

$$\Big(\big(\mathbb{P}\bar{f}(x)\big)_\nu+\lambda_\nu\alpha\beta\big(\mathbb{Q}^{-1}\bar{u}_0\big)_\nu,\ \phi_i\Big)=0,\quad i=1,\ldots,n,\quad \nu=1,\ldots,d,\quad d=s-2,$$

то задача Коши—Дирихле для системы уравнений Баренблатта—Желтова—Кочиной будет однозначно разрешимой в классе $C^1(t\geqslant 0,E_1)$ (*гладких по* t *функций*).

Пример 2 (система уравнений Буссинеска—Лява)**.** Рассмотрим систему уравнений

$$(\alpha-\Delta)\mathbb{M}\bar{u}_{tt}=\beta^2\mathbb{L}\Delta\bar{u}+\bar{f}(x).$$

Такое уравнение в одномерном случае моделирует продольные волновые процессы в тонком упругом стержне с поперечной инерцией (см. [8]). Здесь, как и в предыдущем примере, $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^m$, Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\mathbb{M}$ и $\mathbb{L}$ — квадратные матрицы размерности s, $\bar{u}(t,x)$ и $\bar{f}(x)$ — вектор-функции столбцы размерности s, Δ — оператор Лапласа.

Ищется вектор-функция $\bar{u}(t,x)$, определенная в цилиндре $(\mathbb{R}_+\times\Omega)$, удовлетворяющая рассматриваемой системе, а также начальным и краевому условиям

$$\bar{u}\Big|_{t=0}=\bar{u}_0(x),\quad \bar{u}_t\Big|_{t=0}=\bar{u}_1(x),\quad x\in\Omega;\qquad \bar{u}\Big|_{\partial\Omega}=0,\quad (t,x)\in(\mathbb{R}_+\times\Omega).$$

Пусть в разложении (5) все элементарные делители матрицы $\mathbb{J}$ имеют первую степень и $\mathbb{N}$ — нильпотентный блок второго порядка. Данная начально-краевая задача редуцируется к системе вида (1)–(2), если выбрать пространства E_1 и E_2, как в примере 1, а операторы определить формулами $B=\alpha-\Delta$, $A=\beta^2\Delta$, $\alpha\in\sigma(\Delta)$; тогда в соответствии с теоремой 5 получаем следующее утверждение.

Утверждение 4. *Если начальные условия $\bar{u}_0(x)$ и $\bar{u}_1(x)$ и правая часть $\bar{f}(x)$ таковы, что*

$$\Big(\bar{e}_s,(\alpha-\Delta)\big(\beta^2\mathbb{Q}^{-1}\bar{u}_0(x)+\mathbb{P}\Delta^{-1}\bar{f}(x)\big)\Big)\equiv 0,$$

$$\Big(\bar{e}_s,(\alpha-\Delta)\mathbb{Q}^{-1}\bar{u}_1(x)\Big)\equiv 0,\quad \bar{e}_s=(0,0,\dots,0,1)\in\mathbb{R}^s,$$

$$\big(\mathbb{O}_{2\times d}\quad \mathbb{E}_2\big)\big(\beta^2\mathbb{Q}^{-1}\Delta\bar{u}_0(x)+\mathbb{P}\bar{f}(x)\big)\equiv\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \big(\mathbb{O}_{2\times d}\quad \mathbb{E}_2\big)\big(\mathbb{Q}^{-1}\Delta\bar{u}_1(x)\big)\equiv\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

$$\Big(\big(\mathbb{P}\bar{f}(x)\big)_\nu+\lambda_\nu\alpha\beta^2\big(\mathbb{Q}^{-1}\bar{u}_0\big)_\nu,\ \phi_i\Big)=0,\quad \Big(\big(\mathbb{Q}^{-1}\bar{u}_1\big)_\nu,\ \phi_i\Big)=0,$$

$$i=1,\dots,n,\quad \nu=1,\dots,d,\quad d=s-2,$$

то задача Коши—Дирихле для системы уравнений Буссинекса—Лява однозначно разрешима в классе $C^2(t\geqslant 0,E_1)$.

4. Матричные фундаментальные оператор-функции в условиях нетеровости. Пусть для пучка $(\lambda B+A)$ операторных коэффициентов уравнения (1) выполняются условия $\dim N(B)=n$, $\dim N(B^*)=m$, $n\neq m$. Как в предыдущем разделе, введем следующие обозначения: $\{\varphi_i\}_{i=1}^n\in E_1$ — базис ядра $N(B)$ оператора B, $\{\phi_j\}_{j=1}^m\in E_2^*$ — базис ядра $N(B^*)$ сопряженного оператора B^*, $\{z_j\}_{j=1}^m\in E_2$ и $\{\gamma\}_{i=1}^n\in E_1^*$ — биортогональные к этим базисам системы элементов и функционалов, т.е.

$$\langle\varphi_i,\gamma_k\rangle=\delta_{ik},\quad i,k=1,\dots,n,\quad \langle z_k,\phi_j\rangle=\delta_{kj},\quad k,j=1,\dots,m.$$

С помощью этих систем элементов и функционалов построим проекторы

$$P=\sum_{i=1}^n\langle\cdot,\gamma_i\rangle\varphi_i:E_1\to E_1,\quad Q=\sum_{j=1}^m\langle\cdot,\phi_j\rangle z_j:E_2\to E_2.$$

В монографии [16] доказано, что в этих предположениях существует единственный ограниченный псевдообратный оператор $B^+\in\mathcal{L}(E_2,E_1)$, обладающий следующими свойствами:

$$D(B^+)=R(B)\oplus\{z_1,\dots,z_m\}\equiv E_2,\quad R(B^+)=N(P)\cap D(B),$$

$$BB^+=I-Q \text{ на } D(B^+),\quad B^+B=I-P \text{ на } D(B),$$

причем $N(B^+)=\{z_1,\dots,z_m\}$, справедливы операторные равенства $BB^+B=B$, $B^+BB^+=B^+$ и оператор AB^+ ограничен.

Аналогичным набором свойств обладает сопряженный оператор $B^{+*}\in\mathcal{L}(E_1^*,E_2^*)$, а именно:

$$N(B^{+*})=\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\},\quad B^*B^{+*}B^*=B^*,\quad B^{+*}B^*B^{+*}=B^{+*},\quad B^{+*}=B^{*+},$$

$$D(B^{+*})=R(B^*)\oplus\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\}\equiv E_1^*,\quad R(B^{+*})=N(Q^*)\cap D(B^*),$$

$$B^*B^{*+} = I - P^* \text{ на } D(B^{*+}), \quad B^{*+}B^* = I - Q^* \text{ на } D(B^*);$$

здесь

$$P^* = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \cdot \rangle \gamma_i : E_1^* \to E_1^*, \quad Q^* = \sum_{j=1}^{m} \langle z_j, \cdot \rangle \phi_j : E_2^* \to E_2^*.$$

Следуя работам [6, 7] введем системы присоединенных элементов и функционалов:

$$\varphi_i^{(j)} = (B^+A)^{j-1}\varphi_i^{(1)}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j \geqslant 2, \quad \varphi_i^{(1)} = \varphi_i,$$
$$\phi_i^{(j)} = (B^{+*}A^*)^{j-1}\phi_i^{(1)}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j \geqslant 2, \quad \phi_i^{(1)} = \phi_i.$$

Для присоединенных элементов и функционалов справедливы включения

$$\varphi_i^{(j)} \in N(P), \quad \phi_i^{(j)} \in N(Q^*),$$

т.е. в силу их построения и свойств операторов B^+ и B^{+*} выполняются равенства

$$\langle \varphi_i^{(j)}, \gamma_k \rangle = 0, \quad i, k = 1, \ldots, n, \quad j \geqslant 2, \qquad \langle z_k, \phi_i^{(j)} \rangle = 0, \quad i, k = 1, \ldots, m, \quad j \geqslant 2.$$

Далее, как и в [7], введем следующее условие:

(B) Элементы $\varphi_i^{(j)}$ удовлетворяют системе уравнений и неравенств

$$\begin{aligned} &B\varphi_i^{(j)} = A\varphi_i^{(j-1)}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, p_i, \\ &B\varphi_i^{(p_i+1)} \neq A\varphi_i^{(p_i)}, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &\operatorname{rang} \left\| \langle A\varphi_i^{(p_i)}, \phi_k^{(1)} \rangle \right\|_{\substack{i=1,\ldots,n,\\ k=1,\ldots,m}} = \min(n, m) = l. \end{aligned}$$

Условие (B) означает, что система элементов $\{\varphi_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i\}$ образует полный A-жорданов набор оператора B (см. [2, 6]). Введем еще один проектор пространства E_2:

$$\mathcal{Q} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \phi_i^{(j)} \rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)};$$

если при этом $n > m$, то полагаем $\phi_i^{(1)} = 0$ при $i = m+1, \ldots, n$, а остальные функционалы $\phi_i^{(j)} \in E_2^*$, $i = m+1, \ldots, n$, $j = 2, \ldots, p_i$ произвольны («свободные параметры»).

Теорема 6. *Если матричный пучок* $(\lambda\mathbb{M} + \mathbb{L})$ *регулярен,* $\det \mathbb{L} \neq 0$, *операторный пучок* $(\lambda B + A)$ *удовлетворяет условию* (B), $n > m$, *и оператор* A *непрерывно обратим, то матричный дифференциальный оператор* $(\mathbb{M}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{L}A\delta(t))$, *соответствующий уравнению* (1), *имеет в классе* $K'_+(E_2)$ *матричную фундаментальную оператор-функцию, определяемую формулами* (8), (7), (6), *в которых при* $\nu = 1, \ldots, \mu$

$$\mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) = B^+\mathcal{U}_N(\lambda_\nu AB^+t)[I - \mathcal{Q}]\theta(t) - \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \phi_i^{(j)} \rangle \frac{1}{\lambda_\nu^{k+1}} \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(k\cdot N)}(t) \right),$$

$$\mathcal{U}_N(\lambda_\nu AB^+t) = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_\nu AB^+)^{i-1} \frac{t^{iN-1}}{(iN-1)!}.$$

Доказательство этой теоремы опускаем, поскольку оно в идейном плане не отличается от доказательства теоремы 1. Учет технических особенностей, связанных с условием $n > m$, осуществляется так же, как, например, при доказательстве [14, теорема 1].

Теорема 7. *Если матричный пучок* $(\lambda\mathbb{M} + \mathbb{L})$ *регулярен,* $\det \mathbb{L} \neq 0$, *операторный пучок* $(\lambda B + A)$ *удовлетворяет условию* (B), $n < m$, *и оператор* A *непрерывно обратим, то матричная оператор-функция из теоремы* 6 *является фундаментальной для дифференциального оператора*

$\big(\mathbb{M}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{L}A\delta(t)\big)$, *соответствующего уравнению* (1), *в подклассе из* $K'_+(E_2)$, *удовлетворяющем условию*

$$\operatorname{diag}\left\{\sigma_1^r(t),\ \sigma_2^r(t),\ \ldots,\ \sigma_\mu^r(t)\right\} * \bar{\bar{u}}(t) = 0, \quad r = n+1, \ldots, m, \quad \dim \bar{\bar{u}}(t) = d,$$

где

$$\sigma_\nu^r(t) = \mathbb{E}_{q_\nu}\big\langle \mathcal{U}_N(\lambda_\nu AB^+ t)\cdot,\ \psi_r\big\rangle z_r\theta(t) * \sigma_{\lambda_\nu}(t), \quad \nu = 1, \ldots, \mu$$

(представление для $\sigma_{\lambda_\nu}(t)$ *— формула* (7)*).*

Доказательство этой теоремы не приводим по тем же причинам, что и для предыдущей теоремы. Появление специального подкласса в пространстве распределений $K'_+(E_2)$ связано с условием $n < m$.

Замечание 2. Если $n = m$, т.е. если оператор B фредгольмов, то $\Gamma = B^+$ и теорема 6 превращается в теорему 1.

5. Матричные фундаментальные оператор-функции в условиях спектральной ограниченности. Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, оператор $B \in L(E_1, E_2)$ необратим, A — замкнутый линейный оператор из E_1 в E_2. Далее, следуя [5,18], будем называть B-резольвентным множеством оператора A следующее открытое множество комплексной плоскости:

$$\rho^B(A) \equiv \left\{\mu \in \mathbb{C} :\ (\mu B - A)^{-1} \in L(E_2, E_1)\right\}.$$

Оператор A называется спектрально ограниченным относительно оператора B (или (B,σ)-ограниченным), если вне некоторого круга радиуса $a > 0$ операторный пучок $(\mu B - A)$ непрерывно обратим, т.е. $\left\{\mu \in \mathbb{C} :\ |\mu| > a\right\} \subset \rho^B(A)$. Рассмотрим окружность комплексной плоскости $\Gamma \equiv \left\{\mu \in \mathbb{C} :\ |\mu| = r > a\right\}$; тогда в условиях (B,σ)-ограниченности, как показано в [5, 18], операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma (\mu B - A)^{-1} B\, d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma B(\mu B - A)^{-1} d\mu$$

являются проекторами в E_1 и E_2 соответственно. Проекторы P и Q порождают разложения пространств в прямые суммы

$$E_1 \equiv E_1^0 \oplus E_1^1 = \ker P \oplus \operatorname{im} P, \quad E_2 \equiv E_2^0 \oplus E_2^1 = \ker Q \oplus \operatorname{im} Q.$$

Действия операторов A и B при этом естественным образом расщепляются так, что их сужения $A_0 : E_1^0 \to E_2^0$ и $B_1 : E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратимы, $A_1 : E_1^1 \to E_2^1$ ограничен, сами операторы A и B псевдокоммутируют с проекторами P и Q, т.е. $QB = BP$ и $QA = AP$.

Теорема 8. *Если матричный пучок* $(\lambda\mathbb{M} + \mathbb{L})$ *регулярен,* $\det\mathbb{L} \neq 0$, *оператор* A *является* (B,σ)*-ограниченным и непрерывно обратимым, то матричный дифференциальный оператор* $\big(\mathbb{M}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{L}A\delta(t)\big)$, *соответствующий уравнению* (1), *имеет в классе* $K'_+(E_2)$ *матричную фундаментальную оператор-функцию, определяемую формулами* (8), (7), (6), *в которых при* $\nu = 1, \ldots, \mu$

$$\mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) = \mathcal{U}_{\lambda_\nu}(t) B_1^{-1} Q\theta(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_0^{-1}B_0)^k}{\lambda_\nu^{k+1}} A_0^{-1}(I - Q)\delta^{(k\cdot N)}(t),$$

где

$$\mathcal{U}_{\lambda_\nu}(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma (\mu^N B - \lambda_\nu A)^{-1} B e^{\mu t} d\mu.$$

Если дополнительно предположить, что ∞ *— несущественно особая точка (см.* [5, 18]*) операторного пучка* $(\mu B - A)^{-1}$ *(т.е. существует такое* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, *что* $(A_0^{-1}B_0)^p \neq 0$, *но* $(A_0^{-1}B_0)^{p+1} \equiv 0$*), то, очевидно,*

$$\mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) = \mathcal{U}_{\lambda_\nu}(t) B_1^{-1} Q\theta(t) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(A_0^{-1}B_0)^k}{\lambda_\nu^{k+1}} A_0^{-1}(I - Q)\delta^{(k\cdot N)}(t).$$

Как и выше, доказательство этой теоремы состоит в проверке определения; при этом специфика рассматриваемого случая учитывается так же, как, например, при доказательстве основных утверждений в [9].

Замечание 3. Представленный здесь метод исследования применим к другим типам систем уравнений, а именно, систем в частных производных вида

$$\mathbb{M}B\mathcal{D}^{\alpha}\bar{u}(\bar{x}) = \mathbb{L}A\bar{u}(\bar{x}) + \bar{f}(\bar{x}),$$

где $\mathcal{D}^{\alpha}$ — мультииндекс, дифференциально-разностным системам вида

$$\mathbb{M}B\frac{\partial^N \bar{u}(t,\bar{x})}{\partial t^N} = \mathbb{L}A\Big(\bar{u}(t,\bar{x}-\bar{\mu}) - \bar{u}(t,\bar{x})\Big) + \bar{f}(t,\bar{x}),$$

системам теплопроводности

$$\mathbb{M}B\frac{\partial \bar{u}(t,\bar{x})}{\partial t} = \mathbb{L}A\Delta_{\bar{x}}\bar{u}(t,\bar{x}) + \bar{f}(t,\bar{x}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах// Прикл. мат. мех. — 1960. — *24*, № 5. — С. 58–73.
2. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
3. *Воеводин В. В.* Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
5. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов// Усп. мат. наук. — 1994. — *49*, № 4. — С. 47–74.
6. *Сидоров Н. А., Романова О. А.* О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением// Диффер. уравн. — 1983. — *19*, № 9. — С. 1516–1526.
7. *Сидоров Н. А., Романова О. А., Благодатская Е. Б.* Уравнения с частными производными с оператором конечного индекса при главной части// Диффер. уравн. — 1994. — *30*, № 4. — С. 729–731.
8. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
9. *Фалалеев М. В.* Фундаментальные оператор-функции интегро-дифференциальных операторов в условиях спектральной или полиномиальной ограниченности// Уфим. мат. ж. — 2020. — *12*, № 2. — С. 55–70.
10. *Фалалеев М. В., Коробова О. В.* Системы дифференциальных уравнений с вырождением в банаховых пространствах// Сиб. мат. ж. — 2008. — *49*, № 4. — С. 916–927.
11. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003.
12. *Chen G., Zhang H.* Initial boundary value problem for a system of generalized IMBq equations// Math. Meth. Appl. Sci. — 2004. — *27*. — P. 497–518.
13. *Chen P. J., Gurtin M. E.* On a theory of heat concluction involving two temperatures// Z. Angew. Math. Phys. — 1968. — *19*. — P. 614–627.
14. *Falaleev M. V.* Convolutional integro-differential equations in Banach spaces with a Noetherian operator in the main part// J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. — 2022. — *15*, № 2. — P. 148–159.
15. *Hallaire M.* On a theory of moisture-transfer// Inst. Rech. Agronom. — 1964. — № 3. — P. 60–72.
16. *Nashed M. Z.* Generalized Inverses and Applications. — New York: Academic Press, 1976.
17. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.
18. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Utrecht, Boston: VSP, 2003.
19. *Ting T. W.* Certain non-steady flows of second-order fluids// Arch. Rat. Mech. Anal. — 1963. — *14*, № 1. — P. 28–57.

Фалалеев Михаил Валентинович
Иркутский государственный университет
E-mail: `mvfalaleev@gmail.com`