ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 3–9
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-3-9

УДК 517.927

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. **Г. Э. АБДУРАГИМОВ**

Аннотация. В настоящей статье рассматривается краевая задача для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка с сильной нелинейностью на отрезке $[0,1]$ с интегральными граничными условиями. С использованием специальных топологических средств получены достаточные условия существования единственного положительного решения рассматриваемой задачи. Существование положительного решения доказано с помощью известной теоремы о растяжении конуса, единственность установлена на основе принципа единственности для выпуклых операторов. Приведен пример, иллюстрирующий выполнение достаточных условий однозначной разрешимости поставленной задачи.

***Ключевые слова*:** положительное решение, краевая задача, конус, растяжение конуса.

ON THE EXISTENCE OF A POSITIVE SOLUTION TO A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR SECOND-ORDER FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

© 2023 **G. E. ABDURAGIMOV**

Abstract. In this paper, we consider a boundary-value problem for a second-order nonlinear functional-differential equation with a strong nonlinearity on the interval $[0,1]$ with integral boundary conditions. Using special topological tools, we obtain sufficient conditions for the existence of a unique positive solution of the problem. The existence of a positive solution is proved by applying the well-known cone dilation theorem, and the uniqueness is established by using the uniqueness principle for convex operators. An example is given, which illustrates the fulfillment of sufficient conditions for the unique solvability of the problem.

***Keywords and phrases*:** positive solution, boundary value problem, cone, cone extension.

***AMS Subject Classification*:** 34K10

1. Введение. Вопросам исследования разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений и систем посвящено достаточно большое количество работ, в которых рассмотрены вопросы существования положительных решений, их поведения, асимптотики и т.д., причем где естественным орудием исследования являются методы функционального анализа, основанные на использовании техники нелинейного анализа, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М. Г. Крейна, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. В последующем эти были развиты М. А. Красносельским и его учениками Л. А. Ладыженским, И. А. Бахтиным, В. Я. Стеценко, Ю. В. Покорным и др.

Краевые задачи с граничными условиями в интегральной форме составляют очень интересный и важный класс граничных задач и возникают в различных областях прикладной математики и физики, в частности в теплопроводности, потоках подземных вод, термоупругости и физике плазмы. Такие задачи для обыкновенных и дробных дифференциальных уравнений рассматривались, в частности, в [5–13]. Однако работ, посвященных единственности положительного решения интегральных краевых задач для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений, относительно немного.

Целью настоящей работы является получение достаточных условий существования и единственности положительного решения задачи для нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка с интегральными граничными условиями. Ранее в [1, 2] автором рассматривались похожие задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. В данной работе предпринята попытка обобщить полученный результат на случай функционально-дифференциального уравнения.

2. Постановка задачи и основные результаты. Обозначим через C пространство $C[0,1]$, через $\mathbb{L}_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — пространство $\mathbb{L}_p(0,1)$ и через $\mathbb{W}^2$ — пространство вещественных функций, определенных на $[0,1]$ с абсолютно непрерывной производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + f(t, (Tx)(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \int\limits_0^1 \alpha(s)x(s)\,ds, \tag{2}$$

где $T : C \to \mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный положительный непрерывный оператор, $\alpha \in \mathbb{L}_1$ — неотрицательная на $[0,1]$ функция, причем

$$\int\limits_0^1 s\alpha(s)ds < 1,$$

функция $f(t,u)$ монотонно возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Определение. *Положительным решением* задачи (1)–(2) называется функция $x \in \mathbb{W}^2$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую почти всюду на указанном интервале уравнению (1) и граничным условиям (2).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1)–(2) интегральное уравнение

$$x(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)\left(s\right)\right)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant, \tag{3}$$

где

$$G(t,s) = H(t,s) + \frac{t}{1-\alpha_*}\int\limits_0^1 H(\tau,s)\alpha(\tau)d\tau,$$

$$H(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s(1-t), & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1; \end{cases} \quad \alpha_* = \int\limits_0^1 s\alpha(s)ds.$$

Нетрудно показать, что Функция Грина оператора $-d^2/dx^2$ с граничными условиями (2) обладает следующими свойствами:

(i) $G(t,s) > 0$, $t, s \in (0,1)$;

(ii) $\varphi(t)\varphi(s) \leqslant G(t,s) \leqslant \beta\varphi(s)$, $t,s \in [0,1]$, где

$$\beta = 1 + \frac{1}{\alpha^*}\int\limits_0^1 \alpha(s)\,ds, \quad \alpha^* = 1 - \alpha_*, \quad \varphi(t) = \min\{t, 1-t\}.$$

Предположим, что $f(t,u)$ в области $[0,1] \times [0,\infty)$ удовлетворяет условию

$$f(t,u) \leqslant bu^{p/q}, \quad p,q \in (1,\infty), \quad b > 0. \tag{4}$$

Условие (4) обеспечивает действие оператора Немыцкого $N : \mathbb{L}_p \to \mathbb{L}_q$, определяемого соотношением $(Ny)(t) = f(t,y(t))$ для каждого $y \in \mathbb{L}_p$.

В операторной форме уравнение (3) можно переписать в виде

$$x = GNTx,$$

где

$$G : \mathbb{L}_q \to C, \quad (Gu)(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)u(s)\,ds$$

— оператор Грина. Положим

$$A = GNT,$$

где оператор A определен равенством

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)f\big(s,(Tx)(s)\big)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Лемма 1. *Монотонный оператор $A : C \to C$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Покажем, что для любого $r > 0$ найдется такое число $R > 0$, что

$$\|Ax\|_C \leqslant R \tag{5}$$

для всех $x \in S_r = \big\{x \in C : \|x\|_C \leqslant r\big\}$. В силу (4) и приведенных выше свойств функции Грина имеем

$$(Ax)(t) \leqslant b\int\limits_0^1 G(t,s)(Tx)^{p/q}(s)\,ds \leqslant \frac{b}{4}\|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{p/q} + \frac{b\|\alpha\|_{\mathbb{L}_1}}{4\alpha^*}\|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{p/q} \leqslant \frac{b}{4}\gamma^{p/q}r^{p/q} + \frac{b\|\alpha\|_{\mathbb{L}_1}}{4\alpha^*}\gamma^{p/q}r^{p/q},$$

где γ — норма оператора T. Взяв в качестве R правую часть последнего неравенства, очевидно, очевидно получим искомое соотношение (5).

Покажем теперь что оператор A отображает ограниченные множества в равностепенно непрерывные множества. Пусть $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$. Для $x \in S_r$ имеем

$$\big|(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)\big| \leqslant br^{p/q}\int\limits_0^1 \big|G(t_2,s) - G(t_1,s)\big|(T1)^{p/q}(s)\,ds.$$

Несложно видеть, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $t_2 \to t_1$. Следовательно, $A(S_r)$ является равностепенно непрерывным.

В силу теоремы Асколи—Арцела оператор A является компактным. Непрерывность же A обеспечивает условие Каратеодори на f. Следовательно, оператор A вполне непрерывен. $\square$

Обозначим через $\tilde{K}$ конус неотрицательных функций $x(t)$ пространства C, удовлетворяющих условию

$$x(t) \geqslant \frac{1}{\beta}\|x\|_C \cdot \varphi(t).$$

Лемма 2. *Оператор A инвариантен относительно конуса $\tilde{K}$.*

Доказательство. В силу вышеприведенных свойств функции Грина имеем

$$(Ax)(t) \geqslant \int\limits_0^1 \varphi(s) f\big(s, (Tx)(s)\big)\, ds \cdot \varphi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

С другой стороны,

$$\|Ax\|_C = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \big|(Ax)(t)\big| \leqslant \beta \int\limits_0^1 \varphi(s) f\big(s, (Tx)(s)\big)\, ds.$$

Объединив оба неравенства, окончательно получим

$$(Ax)(t) \geqslant \frac{1}{\beta} \|Ax\|_C \cdot \varphi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

□

В дальнейшем под полуупорядочиванием $u \prec v$ и $u \overline{\prec} v$ в конусе $\tilde{K}$ пространства C соответственно будем понимать $u(x) \leqslant v(x)$ и $u(x) > v(x)$ при всех $x \in [0,1]$.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены неравенство* (4) *и следующие условия*:

(i) $p > q > 1$;

(ii) $f(t,u) \geqslant \psi(u)$, $t \in [0,1]$, $u \geqslant 0$, *где* $\psi(u)$ — *такая неотрицательная неубывающая функция, что*

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\psi(u)}{u} = \infty.$$

Тогда краевая задача (1)–(2) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. Покажем, что найдется такое число $r > 0$, что для всех $\varepsilon > 0$ при $x \in \tilde{K}$ и $\|x\|_C \leqslant r$, $x \neq 0$ имеем

$$Ax \overline{\succ} (1+\varepsilon)x. \tag{6}$$

В силу (4) с учетом соответствующих свойств функции Грина имеем

$$(Ax)(t) \leqslant \beta\varphi(t) \int\limits_0^1 f\big(s, (Tx)(s)\big)\, ds \leqslant \beta\varphi(t) b \int\limits_0^1 (Tx)^{p/q}(s)\, ds \leqslant \beta b \varphi(t) \|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{p/q} \leqslant$$
$$\leqslant \beta b \gamma^{p/q} \varphi(t) \|x\|_C^{p/q} \leqslant \beta b \gamma^{p/q} r^{p/q-1} \varphi(t) \|x\|_C \leqslant \beta^2 b \gamma^{p/q} r^{p/q-1} \cdot x(t).$$

Отсюда, выбрав $r < \big(\beta^2 b \gamma^{p/q}\big)^{q/(q-p)}$, получим (6).

Оператор B, определенный равенством

$$(Bx)(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) \psi\left((Tx)(s)\right)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

монотонен на конусе $\tilde{K}$ пространства C и является минорантой оператора A. Покажем, что B сильно растет по направлению φ:

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\|B(\alpha\varphi)\|_C}{\alpha} = \infty. \tag{7}$$

Действительно, в силу линейности оператора T и условия 2 теоремы имеем

$$\frac{(B\alpha\varphi)(t)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^1 G(t,s) f\big(s, (T\alpha\varphi)(s)\big)\, ds \geqslant \frac{\varphi(t)}{\alpha} \int\limits_0^1 \varphi(s) \psi\big(\alpha (T\varphi)(s)\big)\, ds \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\varphi(t)}{\alpha} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(s) \psi\big(\alpha (T\varphi)(s)\big)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $[\tau_1, \tau_2] \subset [0, 1]$. Нормируя последнее неравенство, устремив $\alpha \to \infty$, легко убедиться в справедливости (7).

В силу (6) и выполнения условий теоремы [4, с. 256] оператор A растягивает конус $\tilde{K}$. Тогда на основании теоремы о растяжении конуса (см. [3, с. 157]) с учетом лемм 1 и 2 заключаем, что оператор A имеет в конусе $\tilde{K}$ пространства C по крайней мере одну неподвижную точку, а это равносильно существованию по меньшей мере одного положительного решения краевой задачи (1)–(2). $\square$

Теорема 2. *Пусть функция $f(t, u)$ дифференцируема по u, производная $f'_u(t, u)$ монотонно возрастает по второму аргументу. Кроме того, предположим что выполнены условия теоремы 1 и*

$$\left(1 + \frac{\|\alpha\|_{\mathbb{L}_1}}{\alpha^*}\right)\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}}\gamma < 2, \quad \theta(t) \equiv f'_u\big(t, \omega(T1)(t)\big), \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1. \tag{8}$$

Тогда краевая задача (1)–(2) имеет единственное положительное решение.

Доказательство. В силу приведенных ранее, свойств функции Грина и условия (ii) теоремы 1 имеем

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f\big(s, (Tx)(s)\big)\, ds \geqslant \int_0^1 \varphi(s)\psi\big((Tx)(s)\big)\, ds \cdot \varphi(t) \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 \varphi(s)\psi\left(\frac{\|x\|_C}{\beta}(T\varphi)(s)\right)\, ds \cdot \varphi(t).$$

Переходя к максимуму на отрезке $[0, 1]$, получим

$$\|x\|_C \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(s)\psi\left(\frac{\|x\|_C}{\beta}(T\varphi)(s)\right)\, ds.$$

Разрешив это неравенство относительно $\|x\|_C$, получим мажоранту положительного решения задачи (1)–(2):

$$\|x\|_C \leqslant \omega.. \tag{9}$$

Монотонный оператор A является u_0-выпуклым на конусе $\tilde{K}$ (см. [4, с. 219]). В этом легко убедиться, положив в соответствующем определении $u_0 = \varphi$.

Допустим теперь, что уравнение (3) имеет два положительных решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Из принципа единственности для выпуклых операторов (см. [4, с. 220]) следует, что обе разности $x_1(t) - x_2(t)$ и $x_2(t) - x_1(t)$ не являются строго положительными функциями. Без ограничения общности можно считать, что разность $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ обладает следующим свойством: найдутся такие числа t_0 и t_1, что

$$y(t_0) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} y(t) = \|y\|_C, \quad y(t_1) < 0.$$

Отсюда следует, что $\|y - d\|_C \geqslant \frac{1}{2}\|y\|_C$ при любой постоянной d. Из равенств

$$x_i(t) = \int_0^1 G(t, s) f\big(s, (Tx_i)(s)\big)\, ds, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

вытекает, что

$$y(t) = \int_0^1 G(t, s) f'_u\big(s, (T\tilde{x})(s)\big)(Ty)(s)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где функция $(T\tilde{x})(t)$ принимает значения промежуточные между значениями $(Tx_1)(t)$ и $(Tx_2)(t)$. Взяв $d = 0$, в силу монотонности производной $f'_u(t, u)$ и оценки (9), получим

$$\frac{1}{2}\|y\|_C \leqslant \|y\|_C \leqslant \left(\frac{1}{4} + \frac{\|\alpha\|_{\mathbb{L}_1}}{4\alpha^*}\right) \int\limits_0^1 f'_u\big(s, \omega(T1)(s)\big)\big|(Ty)(s)\big|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\|\alpha\|_{\mathbb{L}_1}}{\alpha^*}\right)\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}}\|Ty\|_{\mathbb{L}_p} \leqslant \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\|\alpha\|_{\mathbb{L}_1}}{\alpha^*}\right)\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}}\gamma\|y\|_{\mathbb{L}_p},$$

где $\theta(t) \equiv f'_u\big(t, \omega(T1)(t)\big)$ и $1/p' + 1/p = 1$. Таким образом,

$$\|y\|_C \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\|\alpha\|_{\mathbb{L}_1}}{\alpha^*}\right)\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}}\gamma\|y\|_{\mathbb{L}_p} \iff \left(1 + \frac{\|\alpha\|_{\mathbb{L}_1}}{\alpha^*}\right)\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}}\gamma \geqslant 2.$$

Если последнее неравенство не выполняется, то уравнение (3), а следовательно, и краевая задача (1)–(2) имеет единственное положительное решение. □

Пример. Приведем пример, иллюстрирующий выполнений условий вышеприведенных теорем. Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + \rho\left(\int\limits_0^1 x(s)\,ds\right)^2 = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{10}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \int\limits_0^1 sx(s)\,ds, \tag{11}$$

где $\rho \geqslant 1$ — некоторый параметр, границы которого будут уточнены ниже. Здесь $f(t, u) = \rho u^2$. Положив $\psi(u) = \rho^2 u^2$, заключаем в силу теоремы 1, что задача (10)–(11) имеет по меньшей мере одно положительное решение.

В условиях теоремы 2 нетрудно проверить, что $\|x\|_C \leqslant \omega = 392/\rho^2$ и соответственно $\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} = 2\rho\omega = 784/\rho$. Следовательно, выбрав ρ достаточно большим, легко обеспечить выполнение неравенства (8), гарантирующего единственность положительного решения рассматриваемой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдурагимов Г. Э.* О существовании положительного решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2021. — *199*. — С. 3–6.
2. *Абдурагимов Г. Э.* О существовании положительного решения краевой задачи для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с интегральными граничными условиями// Мат. физ. компьют. модел. — 2022. — *25*, № 4. — С. 5–14.
3. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962.
4. *Красносельский М. А., Покорный Ю. В.* Ненулевые решения уравнений с сильными нелинейностями// Мат. заметки. — 1969. — *5*, № 2. — С. 253–260.
5. *Ahmad B., Nieto J. ,J.* Existence results for nonlinear boundary-value problems of fractional integrodifferential equations with integral boundary conditions// Boundary-Value Probl. — 2009. — *2009*. — P. 1–11.
6. *Belarbi A., Benchohra M.* Existence results for nonlinear boundary-value problems with integral boundary conditions// Electron. J. Differ. Equations. — 2005. — *2005*, № 6. — P. 1–10.
7. *Belarbi A., Benchohra M., Quahab A.* Multiple positive solutions for nonlinear boundary-value problems with integral boundary conditions// Arch. Math. — 2008. — *44*, № 1. — P. 1–7.
8. *Benchohra M., Hamani S., Nieto J. J.* The method of upper and lower solution for second order differential inclusions with integral boundary conditions// Rocky Mount. J. Math. — 2010. — *40*, № 1. — P. 13–26.
9. *Cabada A., Iglesias J.* Nonlinear differential equations with perturbed Dirichlet integral boundary conditions// Boundary-Value Probl. — 2021. — *66*. — P. 1–19.

10. *Infante G.* Nonlocal boundary-value problems with two nonlinear boundary conditions// Commun. Appl. Anal. — 2008. — *12*, № 3. — P. 279–288.
11. *Webb J. R. L.* A unified approach to nonlocal boundary value problems// Dynam. Syst. Appl. — 2008. — *5*. — P. 510–515.
12. *Webb J. R. L.* Positive solutions of some higher order nonlocal boundary-value problems// Electron. J. Qualit. Theory Differ. Equations. — 2009. — *29*. — P. 1–15.
13. *Webb J. R. L., Infante G.* Positive solutions of nonlocal boundary-value problems a unified approach// J. London Math. Soc. — 2006. — *74*, № 3. — P. 673–693.

Абдурагимов Гусен Эльдерханович
Дагестанский государственный университет, Махачкала
E-mail: gusen_e@mail.ru