



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 221 (2023). С. 10–19  
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-10-19

УДК 514.113.5

## АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ГАУССА—АЛЕКСАНДРОВА О ПЛОЩАДИ СФЕРИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ДЛЯ НЕВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННОГО УГЛА БЕЗ ОСОБЕННОСТЕЙ

© 2023 г. Л. А. АНТИПОВА

**Аннотация.** В настоящей работе сформулированы определения сферического изображения, площади сферического изображения и кривизны реализации для класса многогранных углов без особенностей и доказана теорема о равенстве площади сферического изображения и кривизны реализации многогранного угла из выделенного класса.

**Ключевые слова:** теорема Гаусса, площадь сферического изображения, невыпуклый многогранник, кривизна реализации.

## AN ANALOG OF THE GAUSS—ALEKSANDROV THEOREM ABOUT THE AREA OF THE SPHERICAL IMAGE OF A NONCONVEX POLYHEDRAL ANGLE WITHOUT SINGULARITIES

© 2023 L. A. ANTIPOVA

**ABSTRACT.** In this paper, we formulate the definitions of epy spherical image, the area of the spherical image, and the implementation curvature for a class of polyhedral angles without singularities. Also, we prove a theorem on the equality of the area of the spherical image and the implementation curvature of a polyhedral angle from a distinguished class.

**Keywords and phrases:** Gauss theorem, area of a spherical image, nonconvex polyhedron, implementation curvature.

**AMS Subject Classification:** 51M20

Исследуя различные классы поверхностей, геометры школы А. Д. Александрова всегда стремились доказать, что для поверхностей изучаемого ими класса выполняется аналог теоремы Гаусса о равенстве интегральных внутренней и внешней кривизн этих поверхностей. Простейший аналог этой теоремы для выпуклого многогранного угла был доказан в монографии [1], а сейчас он доказан даже в школьном учебнике [2]. Эта теорема утверждает, что площадь сферического изображения выпуклого многогранного угла равна кривизне этого угла.

---

Автор выражает огромную благодарность и признательность Алексею Леонидовичу Вернеру за общее руководство моей научной работой, регулярные, содержательные, наполненные идеями беседы, а также внимательное прочтение и редактирование настоящей статьи.

Объектом нашего изучения являются однородные невыпуклые многогранники, основные свойства которых содержатся в пособии «Строение невыпуклых однородных многогранников с выпуклыми гранями» [3]. Нами были доказаны аналоги теоремы Гаусса для невыпуклых ориентируемых однородных многогранников с выпуклыми гранями и ненулевой кривизной вершин. Также установлен интегральный вариант этой теоремы — полная площадь сферического изображения многогранника равна произведению его плотности и  $4\pi$ . Эти результаты были представлены 27 сентября 2021 г. в докладе А. Л. Вернера и Л. А. Антиповой на геометрическом семинаре им. А. Д. Александрова в ПОМИ. При доказательстве этих теорем было важно, что сферические образы граней лежат в вершинах классических сферических сетей. В настоящей работе будут сформулированы определения сферического изображения, площади сферического изображения и кривизны реализации для класса многогранных углов без особенностей и доказана теорема о равенстве площади сферического изображения и кривизны реализации многогранного угла из выделенного класса. Этот класс углов, в частности, содержит углы трех невыпуклых ориентируемых однородных многогранников: большого икосаэдра, большого додекаэдра и большого битригонального икосододекаэдра. В настоящей работе я обобщаю этот результат для более широкого класса многогранных углов.

**1. Определим класс многогранных углов, который будет рассмотрен.** Пусть в трехмерном евклидовом пространстве введена декартова система координат  $x, y, z$  с базисными осями  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ . Будем считать, что выбранная система координат — правая, координатная плоскость  $xOy$  (обозначим ее через  $\alpha$ ) горизонтальная, а орт  $\bar{k}$  оси  $z$  направлен вверх.

Пусть  $L$  замкнутая ломаная в плоскости  $\alpha$ , заданная вершинами  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , занумерованными в циклическом порядке (рис. 1). Звено  $L_j L_{j+1}$  обозначим через  $g_j$ .

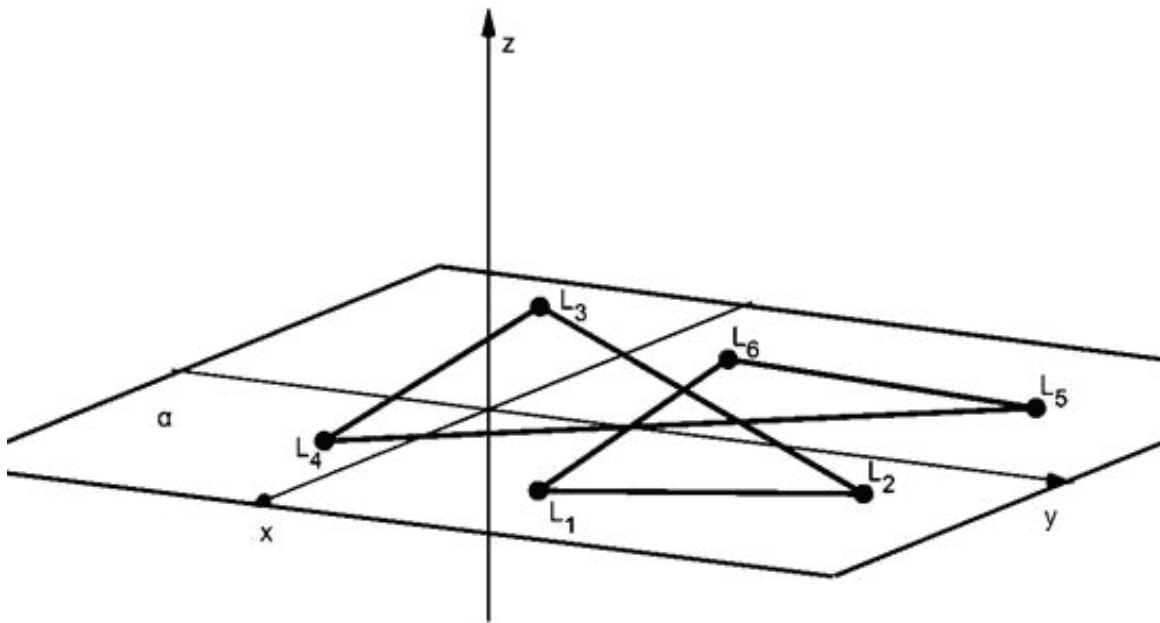


Рис. 1. Замкнутая ломаная  $L_1 L_2 \dots L_n$  в плоскости.

Пересечение внутренних областей всех плоских углов  $\angle L_{j-1} L_j L_{j+1}$  ломаной  $L$  обозначим через  $L^*$  и назовём *ядром ломаной  $L$* .

Ядро выпуклой плоской ломаной совпадает с выпуклым многоугольником, ограниченным этой ломаной. Будем рассматривать плоские замкнутые ломаные с непустым ядром. Назовём их *ломаными без особенностей*.

Сделаем несколько выводов из этого условия.

Заметим, что ядро  $L^*$  является выпуклым многоугольником, стороны которого содержатся в звеньях ломаной  $L$ , но для ломаных с самопересечением порядок сторон  $L^*$  отличен от порядка звеньев ломаной  $L$ .

Пусть точка  $O$  — центроид вершин ядра  $L^*$ . Поскольку ядро является выпуклым множеством, точка  $O$  принадлежит ядру (рис. 2).

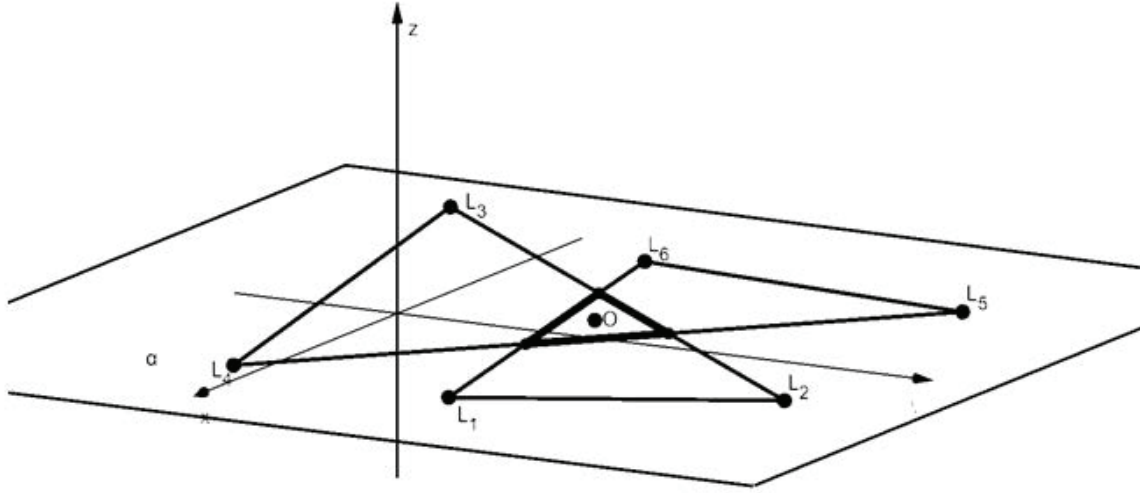


Рис. 2. Точка  $O$  — центроид вершин ядра  $L^*$  ломаной  $L$ .

Обозначим через  $H_j$  ортогональную проекцию точки  $O$  на прямую звена  $g_j$  (рис. 3).

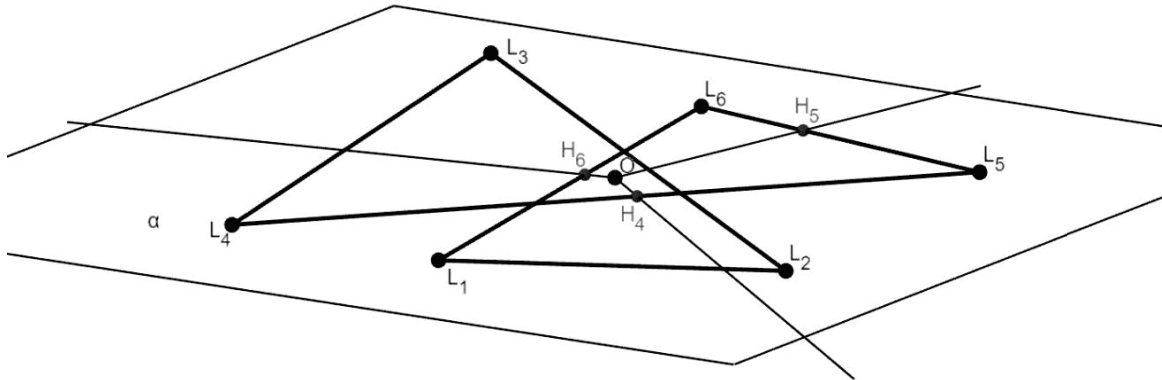


Рис. 3. Проекции точки  $O$  на прямые звеньев  $g_4$ ,  $g_5$  и  $g_6$ .

Назовём *тройкой*  $T_j$  набор трёх последовательных звеньев  $g_{j-1}$ ,  $g_j$  и  $g_{j+1}$ . Звено  $g_j$  назовём *серединой тройки*  $T_j$ , а два других её звена — *краями тройки* (рис. 6).

Из непустоты ядра  $L^*$  следует, что оба звена края каждой тройки  $T_j$  лежат по одну сторону от прямой, содержащей звено  $g_j$ . Из этого непосредственно следует, что треугольники  $OH_jH_{j-1}$  и  $OH_jH_{j+1}$  не имеют внутренних общих точек.

Получили последовательность углов  $\angle H_1OH_2, \angle H_2OH_3, \angle H_3OH_4, \dots, \angle H_{n-1}OH_n, \angle H_nOH_1$ , которые, прилегая друг к другу по общей стороне, обходят вокруг точки  $O$  целое число раз. Сумма данных углов равна

$$\sum_{i=1}^n \angle H_iOH_{i+1} = r \cdot 2\pi, \quad \text{где } n+1 = 1.$$

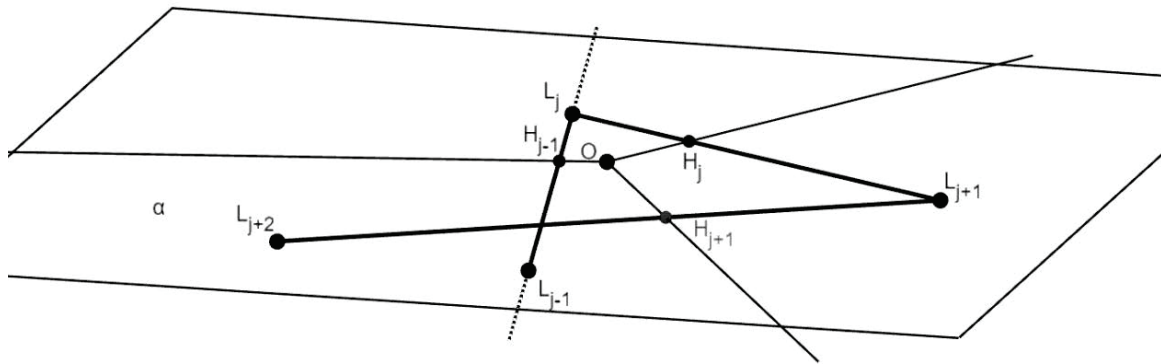


Рис. 4

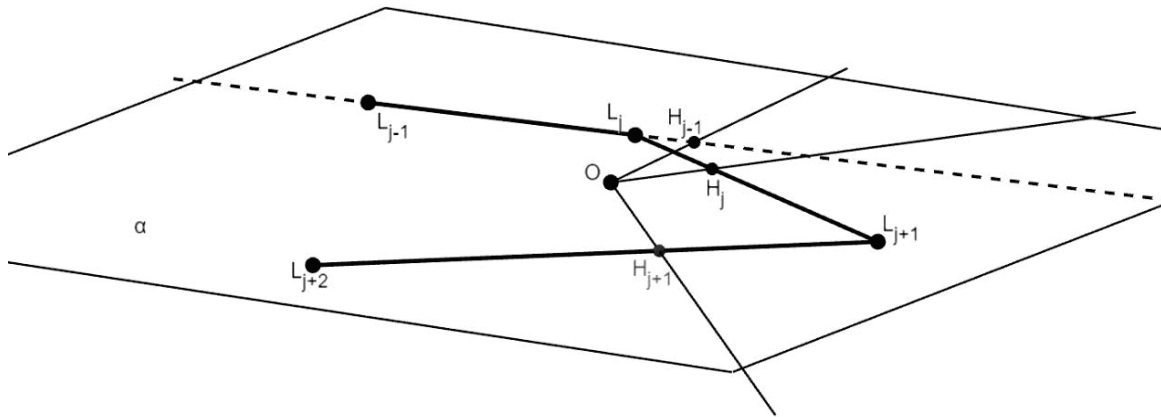
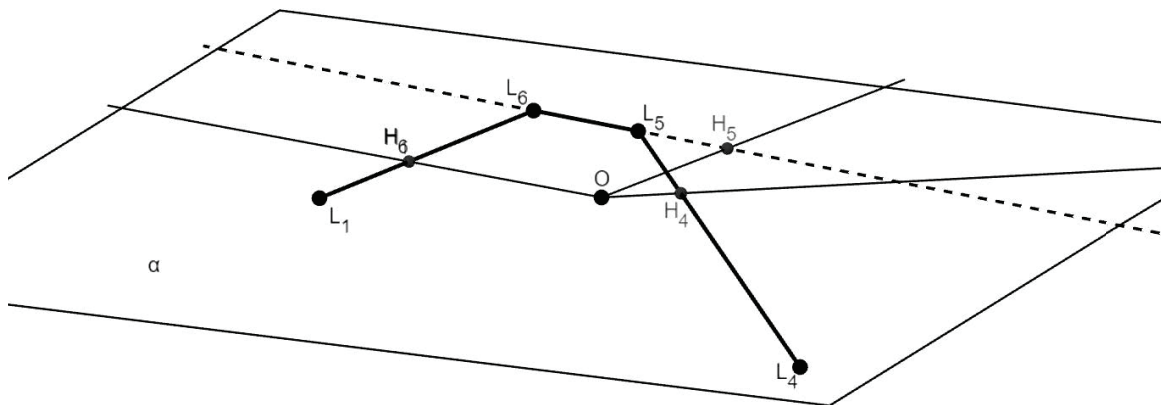
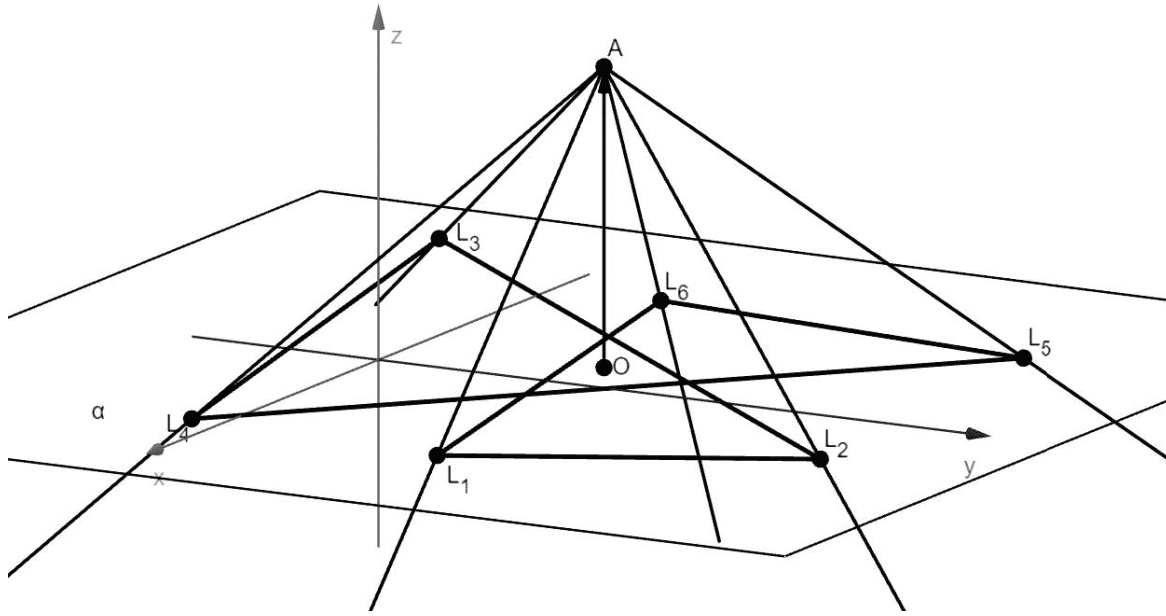


Рис. 5


 Рис. 6. Три варианта расположения тройки  $T_i$  относительно точки  $O$ .

Число  $r$  назовём *числом обхода ломаной  $L$  вокруг точки  $O$* .

Пусть точка  $A$  такая, что вектор  $\overrightarrow{OA}$  равен координатному вектору  $\overline{k}$ . Под *многогранным углом без особенностей* будем понимать тройку  $(V, L, O)$ , где  $V$  — многогранный угол, определенный как конус с вершиной в точке  $A$  над ломанной  $L$  без особенностей (рис. 7).

Рис. 7. Многогранный угол без особенностей  $(V, L, O)$ .

Плоский угол  $\angle L_j A L_{j+1}$  назовём *гранью*  $G_j$  многогранного угла  $V$ , а луч  $AL_j$  — *ребром*  $p_j$  многогранного угла  $V$ .

Радийные меры плоских углов граней  $G_1, G_2, \dots, G_n$  обозначаем  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  соответственно.

*Тройкой граней*  $T'_j$  назовём набор трёх последовательных граней  $G_{j-1}, G_j$  и  $G_{j+1}$  угла  $V$ . Грань  $G_j$  назовём *серединной тройки*  $T'_j$ , а две другие её грани — *краями тройки*.

*Числом оборотов угла*  $(V, L, O)$  *вокруг оси*  $OA$  назовём число оборотов ломаной  $L$  относительно точки  $O$  и обозначим это число через  $\text{rot}(V, L, O)$ .

Пусть  $S$  — единичная сфера с центром в точке  $O$ .

**2. Понятия, необходимые для формулировки теоремы.** Опустим из точки  $O$  перпендикуляр  $OC_j$  на плоскость грани  $G_j$ . Обозначим через  $e_j$  луч  $OC_j$  (рис. 8–10). Лучи  $e_1, e_2, \dots, e_n$  являются ребрами многогранного угла  $W$  с вершиной в точке  $O$ , грани которого определяются соседними лучами. Обозначим грань, содержащую лучи  $e_j$  и  $e_{j+1}$ , через  $Q_j$ .

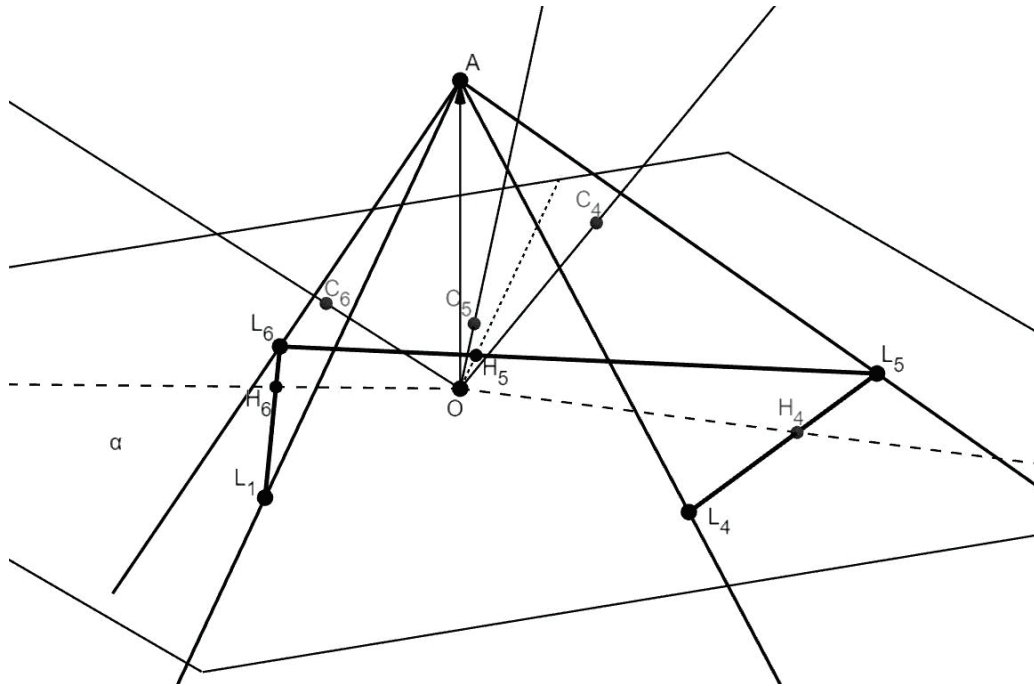
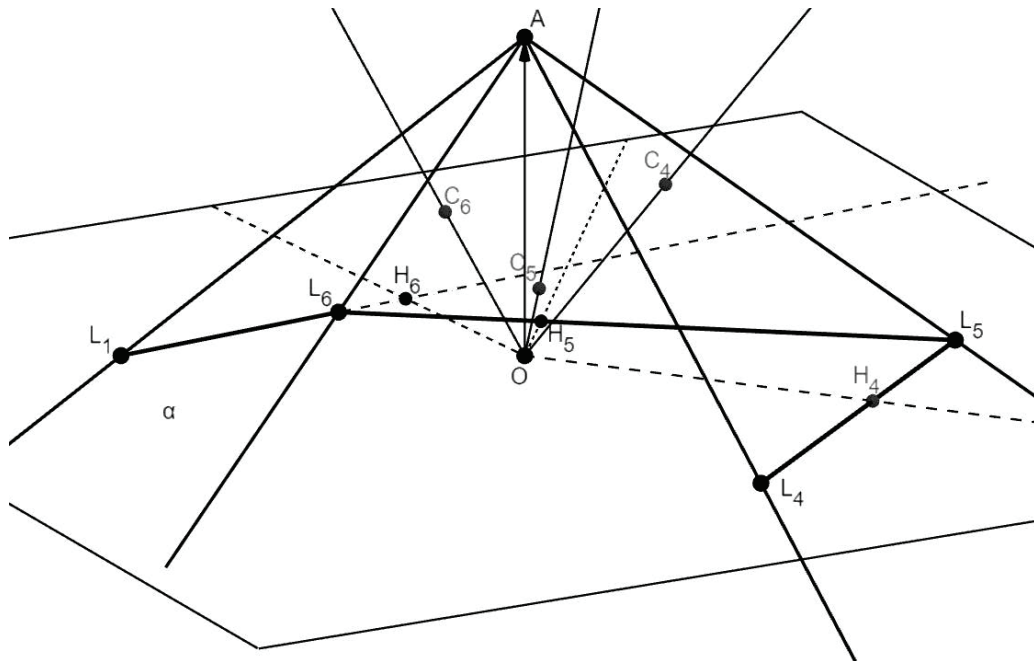
**Свойства угла  $W$ .**

1. Грань  $Q_j$  перпендикулярна ребру  $p_j$  угла  $V$ , так как лучи  $e_j$  и  $e_{j+1}$  ортогональны соответственно граням  $G_j$  и  $G_{j+1}$  многогранного угла  $V$ .
2. Плоскость, содержащая ось  $OA$  и ребро  $e_j$ , перпендикулярна плоскости  $\alpha$  и содержит прямую  $OH_j$ .
3. Из второго свойства следует, что проекцией на плоскость  $\alpha$  луча  $e_j$  будет луч  $OH_j$ .

Пусть точка  $C'_j$  полюс плоскости грани  $G_j$  при полярном преобразовании относительно сферы  $S$ . Ясно, что точка  $C'_j$  принадлежит лучу  $e_j$ . Полюсы всех граней угла  $V$  принадлежат касательной плоскости к сфере  $S$ , содержащей точку  $A$ . Ортогональной проекцией на плоскость  $\alpha$  луча  $AC'_j$  будет луч  $OH_j$ . Следовательно, треугольники  $AC'_j C'_{j-1}$  и  $AC'_j C'_{j+1}$  не имеют внутренних общих точек и сумма плоских углов равна

$$\sum_{j=1}^n \angle C'_j O C'_{j+1} = r \cdot 2\pi,$$

где  $r$  — число оборотов угла  $(V, L, O)$  вокруг оси  $OA$ .


 Рис. 8. Проекция точки  $O$  на плоскости граней тройки  $T'_5$  принадлежат граням.

 Рис. 9. Проекция точки  $O$  на плоскость одного из края тройки  $T'_5$  не принадлежит этой грани.

Полярным изображением многогранного угла  $V$  относительно сферы  $S$  будет многоугольник  $C'_1 C'_2 \dots C'_n$ , представимый объединением треугольников

$$AC'_2 C'_1, AC'_3 C'_2, AC'_4 C'_3, \dots, AC'_n C'_{n-1}, AC'_1 C'_n.$$

На рисунке 11 представлен полярный образ многогранного угла большого икосаэдра.

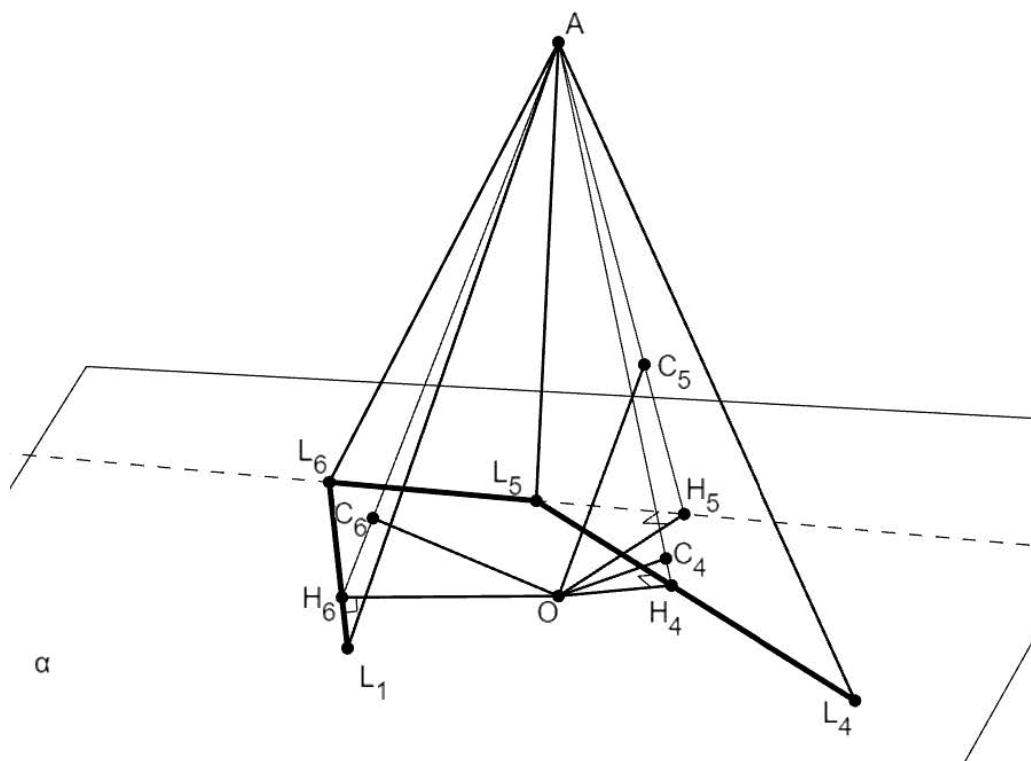


Рис. 10. Проекция точки  $O$  на плоскость середины тройки  $T'_5$  не принадлежит самой грани.

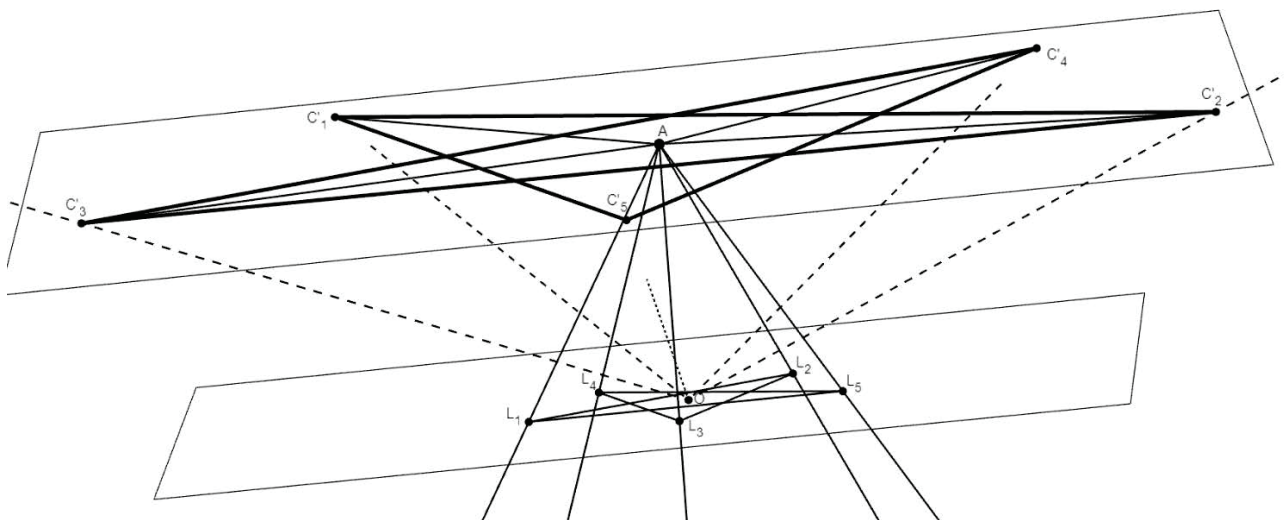


Рис. 11. Полярное изображение многогранного угла в вершине  $A$  большого икосаэдра.

Сферическим изображением многогранного угла  $V$  на сферу  $S$  будем называть проекцию  $K_1 K_2 \dots K_n$  полярного многоугольника  $C'_1 C'_2 \dots C'_n$  на сферу  $S$  при центральном проектировании относительно точки  $O$ .

Площадью сферического изображения назовем сумму площадей сферических треугольников  $AK'_i K'_{i+1}$ .

Заметим, что никакие два смежных сферических треугольника не имеют общих внутренних точек и сумма их углов при вершине  $A$  равна  $\text{rot}(V; L; O) \cdot 2\pi$ .

**3. Теорема (аналог теоремы Гаусса).** Площадь сферического изображения многогранного угла без особенностей  $(V, L, O)$  на сферу  $S$  равна числу  $2\pi \cdot \text{rot}(V, L, O) - \sum \alpha_i$ .

Число  $2\pi \cdot \text{rot}(V) - \sum \alpha_i$  называем *кривизной реализации многогранного угла*  $(V, L, O)$ .

**4. Доказательство теоремы.** В случае отсутствия особенностей у данного многогранного угла  $V$  лучи  $e_{j-1}$  и  $p_{j-1}$  лежат в одном полупространстве относительно плоскости лучей  $AO$  и  $e_j$ , а лучи  $e_{j+1}$  и  $p_j$  лежат в другом полупространстве относительно этой же плоскости.

Пусть плоскости граней  $Q_j, Q_{j+1}$  пересекают ребра  $p_j$  и  $p_{j+1}$  в точках  $F_j$  и  $F_{j+1}$  соответственно.

Рассмотрим два существенно различных случая взаимного расположения тройки граней относительно точки  $O$ .

1. Тройку граней  $T'_j$  многогранного угла без особенностей  $(V, L, O)$  будем называть *тройкой первого типа*, если точка  $C_j$  принадлежит грани  $G_j$  (рис. 12, 13).

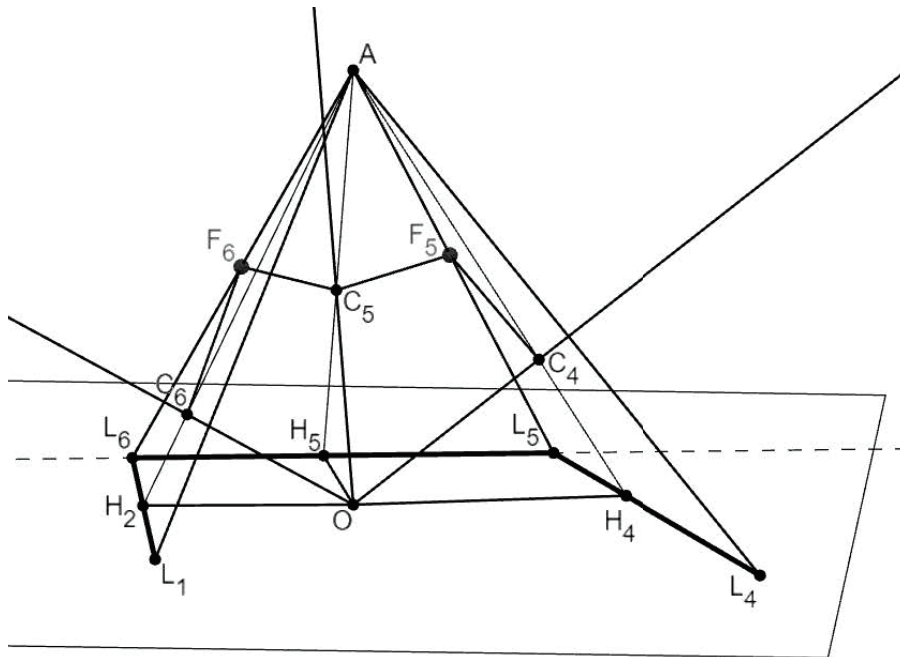


Рис. 12. Проекция точки  $O$  на плоскости всех граней тройки  $T'_5$  принадлежат соответствующим граням.

2. Тройку граней  $T'_j$  многогранного угла без особенностей  $(V, L, O)$  будем называть *тройкой второго типа*, если точка  $C_j$  не принадлежит грани  $G_j$  (рис. 14).

**Лемма.** Величина двугранного угла, образованного гранями  $Q_j$  и  $Q_{j+1}$ , равна  $\pi - \alpha_j$ ,  $\angle Q_j Q_{j+1} = \pi - \alpha_j$ , где  $\alpha_j$  — плоский угол грани  $G_j$  угла  $(V, L, O)$ .

Для тройки граней первого типа утверждение очевидно, поскольку линейным углом двугранного угла, образованного гранями  $Q_j$  и  $Q_{j+1}$ , является угол  $F_j C_j F_{j+1}$  четырехугольника  $AF_j C_j F_{j+1}$ . В четырехугольнике углы с вершинами  $F_j$  и  $F_{j+1}$  — прямые, следовательно, сумма оставшихся двух углов равна  $\pi$ . Доказательство проиллюстрировано на рисунке 15(a), на котором изображена плоскость середины тройки граней.

Для тройки граней  $T'_5$  второго типа справедливость утверждения леммы продемонстрирована на рисунке 15(b). Через  $\beta_5$  обозначен двугранный угол, образованный гранями  $Q_5$  и  $Q_6$ ,  $\alpha_5$  — плоский угол  $L_5 A L_6$  многогранного угла  $V$ ,  $C_5$  — проекция точки  $O$  на плоскость грани  $G_5$ ,  $F_5$  и  $F_6$  — точки пересечения ребер  $AL_5$  и  $AL_6$  с гранями  $Q_5$  и  $Q_6$  угла  $W$  соответственно.

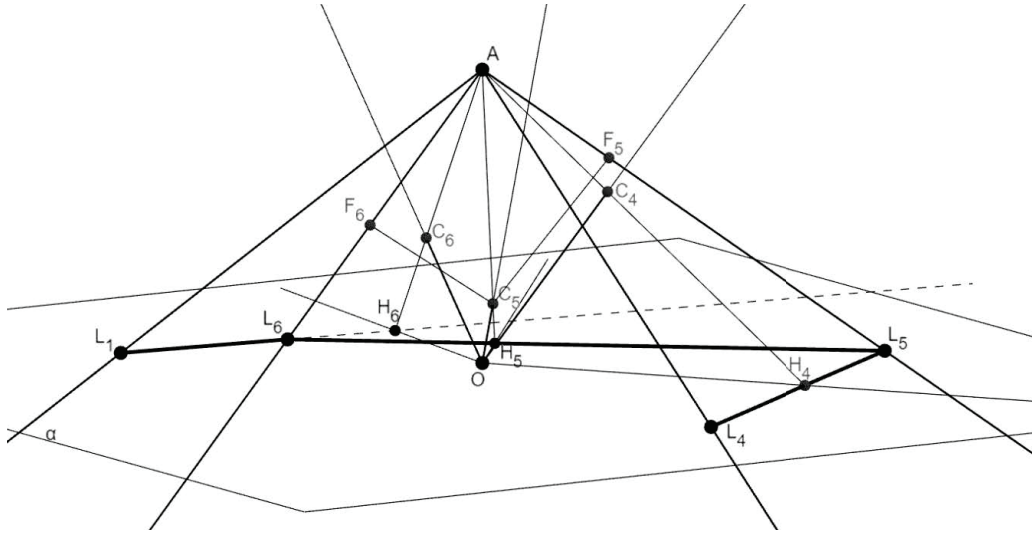


Рис. 13. Проекция точки  $O$  на плоскость одного из края тройки  $T'_5$  не принадлежит этой грани.

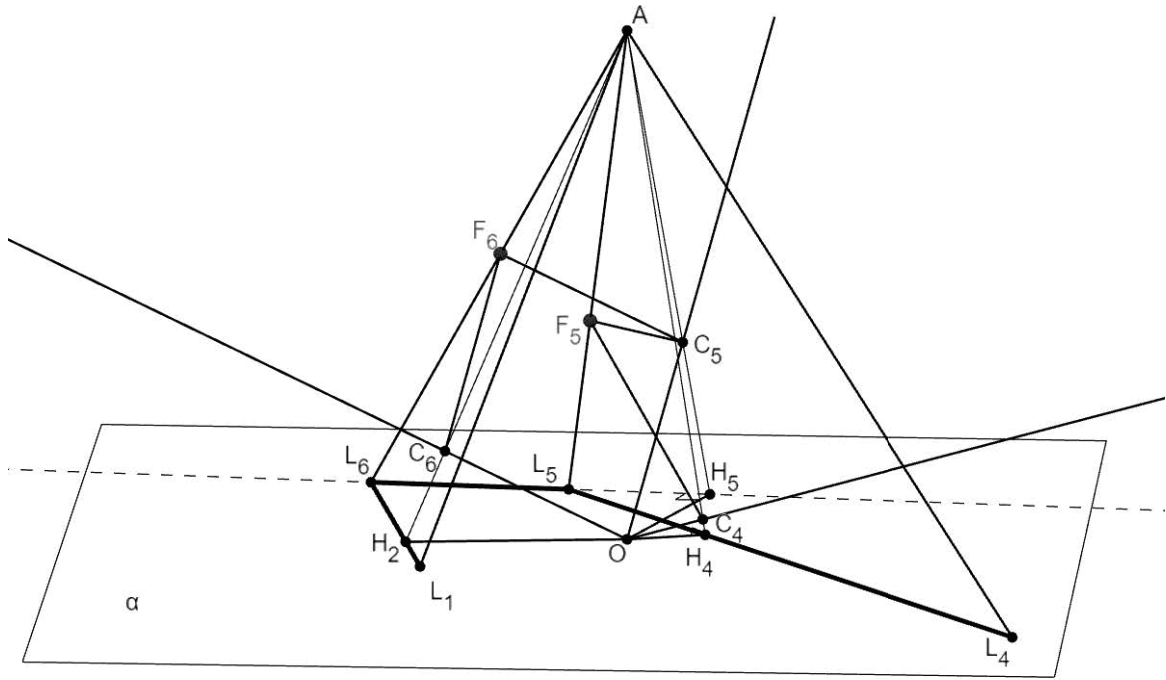


Рис. 14. Тройка граней  $T'_5$  многогранного угла без особенностей  $(V, L, O)$  второго типа.

На рисунке видны два подобных прямоугольных треугольника, острый угол  $\alpha_5$  одного из которых равен углу, смежному с углом  $\beta_5$ . Получаем требуемое равенство  $\angle\beta_5 = \angle Q_5 Q_6 = \pi - \alpha_5$ . Лемма доказана.

Фигура, полученная объединением двух сферических треугольников  $AK_{j+1}K_j$  и  $AK_jK_{j-1}$ , является частью сферического изображения рассматриваемого многогранного угла  $V$ . Объединение сферических углов  $\angle AK_jK_{j+1}$  и  $\angle K_{j-1}K_jA$  есть сферический угол  $K_{j-1}K_jK_{j+1}$ , величина которого равна величине двугранного угла  $\angle Q_j Q_{j+1}$ . Таким образом,

$$\angle K_{j-1}K_jA + \angle AK_jK_{j+1} = \angle K_{j-1}K_jK_{j+1} = \angle Q_j Q_{j+1} = \pi - \alpha_j.$$

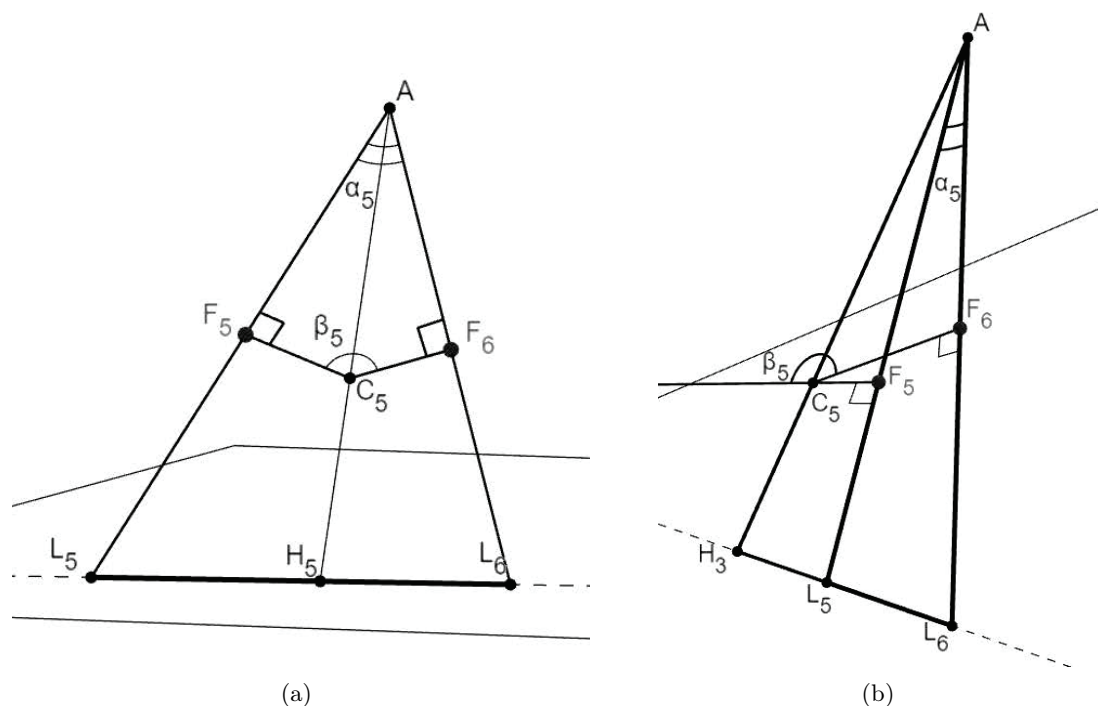


Рис. 15. Плоскость грани  $G_5$  — середины тройки (а) первого (б) второго типа, где  $C_5$  — проекция на эту плоскость точки  $O$ ,  $F_5$  и  $F_6$  — точки пересечения ребер  $AL_5$  и  $AL_6$  с гранями  $Q_5$  и  $Q_6$  угла  $W$  соответственно.

Площадь  $S(V)$  сферического изображения многогранного угла  $V$  равна сумме площадей сферических треугольников  $AK_jK_{j+1}$ .

$$\begin{aligned}
 S(V) &= \sum_{j=1}^n S(AK_jK_{j+1}) = \sum_{j=1}^n (\angle K_jAK_{j+1} + \angle AK_jK_{j+1} + \angle K_jK_{j+1}A - \pi) = \\
 &= \sum_{j=1}^n \angle K_jAK_{j+1} - \sum_{j=1}^n (\pi - \angle K_{j-1}K_jK_{j+1}) = 2\pi \cdot \text{rot}(V) - \sum_{j=1}^n (\pi - (\pi - \alpha_j)) = 2\pi \cdot \text{rot}(V) - \sum_{j=1}^n \alpha_j.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Д. Избранные труды. Т. 2. Выпуклые многогранники. — Новосибирск: Наука, 2007.
2. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия 11. Учебник для углублённого изучения. — М.: Просвещение, 2000.
3. Вернер А. Л., Антипова Л. А. Строение невыпуклых однородных многогранников с выпуклыми гранями. — СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2021.

Антипова Любовь Александровна

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург

E-mail: pridoroga31@yandex.ru