ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 31–41
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-31-41

УДК 514.755.5

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ КОМПЛЕКСОВ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P^n, СОДЕРЖАЩИХ КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ТОРСОВ И ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХСЯ КОНФИГУРАЦИЕЙ ИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПРЯМЫХ

© 2023 г. **И. В. БУБЯКИН**

Аннотация. Статья посвящена дифференциальной геометрии комплексов двумерных плоскостей проективного пространства P^n, содержащих конечное число торсов. Найдено необходимое условие, при котором комплекс C^ρ содержит конечное число торсов, изучены свойства комплексов двумерных плоскостей, которые определяются особой конфигурацией характеристических прямых торсов, принадлежащих комплексу, установлено строение и условия существования таких комплексов двумерных плоскостей, а также определена самодвойственность исследуемых комплексов.

Ключевые слова: грассманово многообразие, комплекс многомерных плоскостей, многообразие Сегре.

ON THE DIFFERENTIAL GEOMETRY OF COMPLEXES OF TWO-DIMENSIONAL PLANES OF THE PROJECTIVE SPACE P^n CONTAINING A FINITE NUMBER OF TORSOS AND CHARACTERIZED BY THE CONFIGURATION OF THEIR CHARACTERISTIC LINES

© 2023 **I. V. BUBYAKIN**

Abstract. This paper is devoted to the differential geometry of complexes of two-dimensional planes in the projective space P^n containing a finite number of torsos. We find a necessary condition under which the complex C^ρ contains a finite number of torsos, examine the properties of complexes of two-dimensional planes, which are determined by a special configuration of characteristic straight torsos belonging to the complex, and establish the structure and conditions for the existence of such complexes. The self-duality of such complexes is determined.

Keywords and phrases: Grassmann manifold, complex of multidimensional planes, Segre manifold.
AMS Subject Classification: 53B10

1. Введение. В монографии [16] М. А. Акивис и В. В. Гольдберг разработали теорию подмногообразий в многомерном проективном пространстве. В частности, рассматриваются подмногообразия грассмановых многообразий. В [2] они изучили многообразия с вырожденным гауссовым отображением, которые являются многомерными аналогами торсов или развертывающихся поверхностей трехмерного евклидова пространства. В последнее время многообразия с вырожденным гауссовым отображением изучаются как с проективной точки зрения, так и с евклидовой. М. А. Акивис и В. В. Гольдберг написали монографию [17] по проективной дифференциальной геометрии, в которой были получены некоторые фундаментальные результаты. Например, что многообразия с вырожденным гауссовым отображением включают в себя не только конусы и торсы, но и достаточно широкий класс гиперповерхностей, которые не являются конусами или торсами. В своих рассуждениях М. А. Акивис и В. В. Гольдберг систематически использовали фокальные образы: фокальные гиперповерхности и фокальные конусы, ассоциированные с многообразием с вырожденным гауссовым отображением. Это позволяет авторам представить геометрию исследуемых многоообразий и провести полную их классификацию.

В фундаментальной монографии [18], наряду с глубоким изучением дифференциальной геометрии конформного и псевдоконформного пространства произвольной размерности и подмногообразий в этих пространствах, М. А. Акивис и В. В. Гольдберг основательно исследовали дифференциальную геометрию грассмановых многообразий, многообразий с грассмановой структурой и многообразий с почти грассмановой структурой. М. А. Акивис рассматривает почти грассманову структуру как расслоение конусов Сегре на многообразии. Результаты, полученные в этой монографии, имеют фундаментальный характер по проективной и конформной дифференциальным геометриям. Эти результаты являются классическими — настолько они глубоки как по содержанию, так и по форме и полноте изложения.

Указанное определение почти грассмановой структуры использовали в дальнейшем И. М. Гельфанд и С. П. Гиндикин в интегральной геометрии Радона—Хелгасона (см. [10]), а также в других своих работах, решая основную задачу интегральной геометрии для n-мерных допустимых комплексов прямых и n-мерных допустимых комплексов m-мерных плоскостей в проективном пространстве P^n. Полученные И. М. Гельфандом и С. П. Гиндикиным формулы обращения лежат в основе компьютерной томографии. Такие задачи были положены в основу послойного изображения внутренней структуры исследуемого объекта. В том числе в этих исследованиях были получены новейшие научные достижения; в 2003 г. за изобретение метода магнитно-резонансной томографии — способа получения томографических послойных изображений для исследования внутренних органов и тканей человека — П. Мэнсфилд и П. Лотербур получили Нобелевскую премию по физиологии и медицине. В 2010 г. была создана четырехмерная электронная томография — техника визуализирования динамики трехмерных объектов во времени. Эта техника позволяет наблюдать за пространственно-временными характеристиками микрообъектов.

Таким образом, М. А. Акивис и В. В. Гольдберг открыли новое поле исследований в проективной дифференциальной геометрии, в частности, дифференциальной геометрии подмногообразий грассманова многообразия, которое успешно развивается и применяется в настоящее время. Актуальность таких исследований заключается в том, что дифференциальная геометрия подмногообразий грассмановых многообразий расширяет теорию грассмановых многообразий [11–14], связана с исследованиями лагранжевых и квантовых грассмановых многообразий [3, 4], а также применяется в теоретической физике [19, 20].

Предметом исследования настоящей статьи является геометрия комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве P^n, содержащих конечное число торсов и характеризующихся особой конфигурацией их характеристических прямых. Отметим, что некоторые классы допустимых комплексов [10] из изучаемых комплексов двумерных плоскостей исследовались в [5]. Настоящая работа относится к исследованиям в области проективной дифференциальной геометрии на основе метода подвижного репера Э. Картана и метода внешних дифференциальных форм [16]. Эти методы позволяют с единой точки зрения изучать дифференциальную геометрию подмногообразий различных размерностей грассманова многообразия, а также обобщить полученные результаты для конкретных многообразий на более широкие классы многообразий многомерных плоскостей. Основная задача дифференциальной геометрии подмногообразий грассмановых многообразий заключается в проведении единой классификации различных классов таких подмногообразий, выяснения их строения и связанная с этим задача определения произвола их существования, а также изучение свойств подмногообразий различных классов. Данные исследования являются продолжением работ [6–9, 21]. Для изучения таких подмногообразий применяется грассманово отображение многообразия $G(2,n)$ на $3(n-2)$-мерное алгебраическое многообразие $\Omega(2,n)$ пространства P^N, где $N = C^3_{n+1} - 1$. Заметим, что в дифференциальной геометрии подмногообразий грассманова многообразия операцию суммирования будем производить по правилу Эйнштейна, как это принято в тензорном анализе, в частности, в его приложениях к общей теории относительности.

В [1, 15] М. А. Акивис отмечает, что пересечение алгебраического многообразия $\Omega(2,n)$ с его касательным пространством $T_l\Omega(2,n)$ представляет собой конус Сегре $C(3, n-2)$. Этот конус имеет размерность n и несет плоские образующие размерностей $n-2$ и 3, пересекающиеся по прямым. Проективизация $PB_l(2)$ этого конуса есть многообразие Сегре $S(2, n-3)$. Многообразие Сегре $S(2, n-3)$ инвариантно при проективных преобразованиях пространства $P^{3(n-2)-1} = PT_l\Omega(2,n)$, являющегося проективизацией с центром в точке l касательного пространства $T_l\Omega(2,n)$ к алгебраическому многообразию $\Omega(2,n)$, и его будем использовать для классификации рассматриваемых подмногообразий грассманова многообразия $G(2,n)$, а также для интерпретации их свойств в терминах проективных алгебраических многообразий. Классификация подмногообразий грассманова многообразия $G(2,n)$ основана на различных конфигурациях плоскости $PT_l\Omega(2,n)$ и многообразия Сегре $S(2, n-3)$.

Так как дифференциальная геометрия грассмановых многообразий далеко еще не изучена, то такой подход к их исследованию представляется актуальным. Дифференциальная геометрия грассмановых многообразий представляет самостоятельный интерес для дифференциальной геометрии, а также одновременно является одним из важных средств построения и изучения других многообразий в проективных пространствах. Одной из наиболее красивых областей дифференциальной геометрии, где во всей полноте проявляются преимущества инвариантных бескоординатных методов исследования, является теория комплексов многомерных плоскостей проективного пространства [5].

2. Отображение и многообразие Сегре. Отображение Сегре определяется как отображение

$$\varphi\colon P^m \times P^n \to P^{(m+1)(n+1)-1},$$

которое переводит упорядоченную пару точек X и Y проективных пространств P^m и P^n в точку Z, однородные координаты которой — попарные произведения однородных координат точек X и Y, записанные в лексикографическом порядке:

$$\varphi\colon (x_0 : x_1 : \ldots : x_m), (y^0 : y^1 : \ldots : y^n) \to (x_0y^0 :, x_0y^1 : \ldots : x_iy^p : .. : x_my^n).$$

Образ этого отображения является проективным алгебраическим многообразием, называемым многообразием Сегре в честь итальянского математика Беньямино Сегре (1903—1977) и обозначается $S(m,n)$. Размерность многообразия Сегре $S(m,n)$ равна $m+n$. Если координаты точки Z в пространстве $P^{(m+1)(n+1)-1}$ обозначить через z^u_a $(a, b = 0, 1, \ldots, m$ и $u, v = 0, 1, \ldots, n)$, то многообразие Сегре $S(m,n)$ представляет собой пересечение квадрик:

$$z^u_a z^v_b - z^v_a z^u_b = 0.$$

Многообразие Сегре $S(m,n)$ — это алгебраическое многообразие порядка C^m_{m+n}. Запишем однородные координаты точки проективного пространства $P^{(m+1)(n+1)-1}$ в виде прямоугольной матрицы (z^u_a) размеров $(m+1) \times (n+1)$. Тогда последняя система уравнений эквивалентна условию вида

$$\operatorname{rang}(z^u_a) = 1.$$

Многообразие Сегре $S(m,n)$ можно определить параметрическими уравнениями

$$z^u_a = x_a y^u$$

(см. [1, 15]), где z_a^u — однородные координаты точки проективного пространства $P^{(m+1)(n+1)-1}$. Из этих параметрических уравнений вытекает, что многообразие Сегре $S(m,n)$ является образом прямого произведения двух проективных пространств P^m и P^n размерностей соответственно m и n. Отметим одно важное свойство многообразий Сегре $S(m,n)$, а именно эти многообразия остаются инвариантными при проективных преобразованиях пространства P^N, определяемых уравнениями

$$z_a^{*u} = a_v^u b_a^b z_b^v.$$

Многообразие Сегре $S(m,n)$ несет n-параметрическое семейство m-мерных плоских образующих: α-образующих, для получения параметрических уравнений которых необходимо зафиксировать в последних уравнениях однородные координаты y^u точки проективного пространства P^n, а также m-параметрическое семейство n-мерных плоских образующих: β-образующих, для получения параметрических уравнений которых необходимо зафиксировать в последних уравнениях однородные координаты x_a точки проективного пространства P^m. При этом через каждую точку многообразия Сегре $S(m,n)$ проходит одна плоская образующая одного семейства и одна плоская образующая другого семейства. Любые две плоские образующие различных семейств пересекаются в одной точке, а плоские образующие одного семейства не имеют общих точек.

Многообразие Сегре $S(m,n)$ можно представить как семейство $(m+n-1)$-мерных алгебраических многообразий Сегре $S_\lambda(m,n-1)$ для всех гиперплоскостей λ проективного пространства P^n или как семейство $(m+n-1)$-мерных алгебраических многообразий Сегре $S_\mu(m-1,n)$ для всех гиперплоскостей μ проективного пространства P^m. Замечая, что пересечение алгебраических многообразий Сегре $S_\lambda(m,n-1)$ и $S_\mu(m-1,n)$ для двух фиксированных проективных пространств P^n и P^m представляет собой $(m+n-2)$-мерное алгебраическое многообразие Сегре $S_{\lambda\mu}(m-1,n-1)$, можно многообразие Сегре $S(m,n)$ представить как семейство $(m+n-2)$-мерных алгебраических многообразий Сегре $S_{\lambda\mu}(m-1,n-1)$ для всех гиперплоскостей λ и μ проективных пространств P^n и P^m.

Рассмотрим в качестве примера двумерное многообразие Сегре $S(1,1)$. Многообразие Сегре $S(1,1)$ представляет собой невырожденную линейчатую квадрику трехмерного проективного пространства, несущую однопараметрическое семейство прямолинейных α-образующих и однопараметрическое семейство прямолинейных β-образующих. Через каждую точку этой квадрики проходит одна α-образующая и одна β-образующая. При этом две прямолинейные образующие, принадлежащие различным семействам, пересекаются, а две прямолинейные образующие, принадлежащие одному семейству, не имееют общих точек. Квадрика Сегре $S(1,1)$ определятся уравнением

$$z_0^0 z_1^1 - z_0^1 z_1^0 = 0.$$

Многообразие Сегре $S(1,1)$ можно представить как одномерное многообразие α-образующих и как одномерное многообразие β-образующих. С другой стороны, это многообразие Сегре $S(1,1)$ образуют прямые, пересекающие три фиксированные прямые общего положения трехмерного проективного пространства. Здесь следует заметить, что в аффинных координатах двумерному многообразию Сегре $S(1,1)$ соответствуют однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.

3. Характеристические прямые и трехмерные характеристические плоскости торсов, принадлежащих комплексу двумерных плоскостей. В настоящей работе продолжаем исследования, начатые в [6–9, 21]. В проективном пространстве P^n рассмотрим ρ-мерные комплексы C^ρ двумерных плоскостей, содержащие конечное число торсов — развертывающихся поверхностей. Условие, при котором комплексы C^ρ содержат конечное число торсов, определяется из следующих рассуждений. Рассмотрим проективизацию касательной плоскости $T_l\Omega(2,n)$ с центром в точке l. Эта проективизация представляет собой проективное пространство $P^{3(n-2)-1} = PT_l\Omega(2,n)$. На основании теоремы Грассмана в проективном пространстве должно выполняться следующее равенство:

$$\dim PT_lV^\rho + \dim S_l(2,n-3) = \dim P^{3(n-2)-1} + \dim(PT_lV^\rho \cap S_l(2,n-3)).$$

Если размерность пересечения плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(2, n-3)$ равна r, то получим

$$(\rho - 1) + (2 + (n-3)) = 3(n-2) - 1 + r.$$

Отсюда следует, что

$$\rho - 1 = 2(n-3) + r.$$

Утверждение, что комплекс C^ρ двумерных плоскостей в проективном пространстве P^n содержит конечное число торсов, означает равенство нулю размерности пересечения плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(2, n-3)$, т.е. $r = 0$. Если $r = 0$, то искомую зависимость размерности комплекса C^ρ, его двумерной образующей и проективного пространства P^n, получаем в виде:

$$\rho - 1 = 2(n-3).$$

Таким образом, комплекс C^ρ двумерных плоскостей в проективном пространстве P^n содержит конечное число торсов тогда и только тогда, когда размерность комплекса C^ρ, его двумерной образующей и проективного пространства P^n связаны соотношением $\rho - 1 = 2(n-3)$.

Для пятимерных комплексов двумерных плоскостей пятимерного пространства, которые содержат конечное число торсов, обнаруживается инвариантная зависимость их строения от конфигурации характеристических трехмерных плоскостей, касательных к торсам, и характеристических прямых в двумерной образующей L, по которой пересекаются две соседние образующие торсов (5). Отсюда возникает вопрос: имеют ли рассматриваемые комплексы C^ρ двумерных плоскостей, содержащие конечное число торсов, подобную инвариантную зависимость. Комплексу C^ρ при грассмановом отображении [16] соответствует ρ-мерное многообразие V^ρ, лежащее на алгебраическом многообразии $\Omega(2, n)$, являющемся образом многообразия $G(2, n)$ двумерных плоскостей проективного пространства P^n. В каждой своей точке l, соответствующей двумерной плоскости L проективного пространства P^n, многообразие V^ρ имеет ρ-мерную касательную плоскость T_lV^ρ. Проективизация касательной плоскости T_lV^ρ с центром в точке l представляет собой $(\rho-1)$-мерную проективную плоскость PT_lV^ρ. Различным видам взаимного расположения плоскости PT_lV^ρ и инвариантного многообразия Сегре $S_l(2, n-3) = P^2 \times P^{n-3}$, являющимся проективизацией конуса $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка, соответствуют различные классы комплексов $C^\rho \subset G(2, n)$. При этом конус $B_l(2)$ есть конус Сегре $C(3, n-2)$ и представляет собой пересечение алгебраического многообразия $\Omega(2, n)$ и его касательного пространства $T_l\Omega(2, n)$, т.е.

$$B_l(2) = \Omega(2, n) \cap T_l\Omega(2, n).$$

В пространстве P^n рассмотрим семейство точечных реперов A_I $(I, J, K = 0, 1, \ldots, n)$ и семейство реперов, образованных гиперплоскостями

$$\alpha^I = (-1)^I (A_0, \ldots, A_{I-1}, A_{I+1}, \ldots, A_n).$$

Уравнения перемещения этих реперов имеют вид:

$$dA_I = \omega_I^J A_J, \quad d\alpha^I = -\omega_J^I \alpha^J,$$

где ω_I^J — линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие структурным уравнениям проективного пространства P^n:

$$d\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J.$$

Пусть L — двумерная плоскость пространства P^n. Свяжем с этой плоскостью семейство точечных реперов так, чтобы точки A_i, $i = 0, 1, 2$, принадлежали плоскости L. Тогда

$$dA_i = \omega_i^j A_j + \omega_i^p A_p, \quad dA_p = \omega_p^i A_i + \omega_p^q A_q,$$

где $i, j = 0, 1, 2$ и $p, q = 3, 4, \ldots, n$. Отсюда видно, что двумерная плоскость L в пространстве P^n зависит от $3(n-2)$ параметров, линейными комбинациями дифференциалов которых являются формы ω_i^p. На многообразии $\Omega(m, n)$ асимптотические направления второго порядка, выходящие из точки l, определяются условием

$$d^2 l = 0 \ (\mathrm{mod}\ T_l\Omega(m, n)).$$

Отсюда следует, что уравнения конуса $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка имеют вид

$$\omega_i^p\omega_j^q - \omega_i^q\omega_j^p = 0. \tag{1}$$

Из этих уравнений видно, координаты ω_i^p точки конуса $B_l(2)$ допускают параметрическое представление

$$\omega_i^p = a_i x^p. \tag{2}$$

Поэтому конус $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка совпадает с конусом Сегре $C_l(3, n-2)$. Рассмотрим теперь проективизацию касательной плоскости $T_l\Omega(2,n)$ с центром в точке l. Эта проективизация представляет собой проективное пространство $P^{3(n-2)-1} = PT_l\Omega(2,n)$, в котором формы ω_i^p являются однородными координатами произвольной точки. При проективизации асимптотическому конусу $B_l(2)$ соответствует многообразие Сегре $S_l(2, n-3)$ проективного пространства $P^{3(n-2)-1}$, определяемое теми же уравнениями (1), что и конус $B_l(2)$ в касательном пространстве $T_l\Omega(2,n)$. Многообразие Сегре $S_l(2, n-3)$ представляет собой $(3(n-2)-1)-2(n-3) = (n-1)$-мерную алгебраическую поверхность порядка $C_{n-1}^2 = C_{n-1}^{n-3}$ (см. [22–24]), несущую два семейства плоских образующих размерностей 2 и $n-3$, зависящих соответственно от $n-3$ и 2 параметров. При этом две образующие, принадлежащие различным семействам, имеют общую точку, а две образующие, принадлежащие одному семейству, не пересекаются. Через каждую его точку проходит по одной образующей из каждого семейства. В пространстве P^n конусу Сегре $S_l(2, n-3)$ соответствует совокупность двумерных плоскостей, пересекающих двумерную плоскость L по прямым. Каждая из этих плоскостей лежит в одной трехмерной плоскости с плоскостью L. Многообразие Сегре $S_l(2, n-3)$ остается инвариантным при проективных преобразованиях пространства $P^{3(n-2)-1}$.

Плоскость PT_lV^ρ в пространстве $P^{3(n-2)-1} = PT_l\Omega(2,n)$ определяется теми же уравнениями, что и касательная плоскость T_lV^ρ в касательном пространстве $T_l\Omega(2,n)$. Поскольку на комплексе C^ρ двумерная плоскость L зависит от ρ параметров, то среди форм ω_i^p лишь ρ линейно независимых. Следовательно, комплекс C^ρ задается $n-1$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$ дифференциальными уравнениями:

$$\Lambda_p^{\alpha i}\omega_i^p = 0, \tag{3}$$

где ω_i^p — линейные дифференциальные формы, обращение в нуль которых фиксирует двумерную плоскость L на комплексе C^ρ.

Рассмотрим однопараметрическое семейство двумерных плоскостей L в пространстве P^n. Такое семейство представляет собой трехмерную поверхность с двумерными плоскими образующими. Эта поверхность называется торсом [16, 17], если она является тангенциально вырожденной поверхностью ранга один. Торсу на алгебраическом многообразии $\Omega(2,n)$ соответствует кривая, касательные к которой служат прямолинейными образующими этого многообразия. Данная кривая является асимптотической линией многообразия $\Omega(2,n)$, поэтому в произвольной точке этой линии выполняются уравнения (1). Следовательно, дифференциальные уравнения торсов в пространстве P^n можно записать в виде

$$\omega_i^p = a_i x^p dt. \tag{4}$$

Каждый торс, проходящий через двумерную плоскость L, определяет на ней характеристическую прямую, которая является пересечением двух бесконечно близких образующих, и характеристическую трехмерную плоскость, касательную плоскость к торсу. Найдем уравнения характеристических образов торсов. Пусть $M = x^iA_i$ $(i = 0, 1, 2)$ — произвольная точка двумерной плоскости L. Дифференциал этой точки, в силу (4), вычисляется следующим образом:

$$dM = (dx^i + x^j\omega_j^i)A_i + (a_ix^i)(x^pA_p)dt,$$

где $p = 3, 4, \ldots, n$. Отсюда видно, что характеристическая прямая в двумерной плоской образующей L комплекса C^ρ определяется уравнением

$$a_ix^i = 0,$$

а характеристическая трехмерная плоскость, содержащая двумерную плоскую образующую L комплекса C^ρ, определяется двумерной плоскостью L и точкой

$$S = x^p A_p.$$

Из уравнений (3), ввиду (4), получим следующую систему уравнений:

$$\Lambda_p^{\alpha i} a_i x^p = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n-1. \tag{5}$$

Эта система уравнений определяет характеристическую прямую торса, принадлежащего комплексу C^ρ, если выполняется условие

$$\operatorname{rang}(\Lambda_p^{\alpha i} a_i) = n - 3. \tag{6}$$

Из этого соотношения определяются характеристические прямые в двумерной образующей L комплекса C^ρ. Условие:

$$\operatorname{rang}(\Lambda_p^{\alpha i} x^p) = 3 \tag{7}$$

определяет точки S пересечения характеристических трехмерных плоскостей с двойственной к двумерной плоскости L в пространстве P^n $(n-2)$-мерной плоскостью. Эти точки вместе с двумерной плоскостью L определяют трехмерные характеристические плоскости торса.

4. К дифференциальной геометрии комплексов C^ρ, определяемых конфигурацией характеристических прямых торсов. В проективном пространстве P^n рассмотрим ρ-мерный комплекс C^ρ $(\rho = 2(n-3)+1)$ двумерных плоскостей L и C_{n-1}^2 различных торсов, принадлежащих этому комплексу C^ρ. Комплекс C^ρ назовем специальным, если для каждой его образующей L торса характеристические прямые — прямые пересечения двух бесконечно близких образующих и трехмерные характеристические плоскости — трехмерные касательные плоскости к торсам имеют специальную конфигурацию [5]. Рассмотрим специальные комплексы двумерных плоскостей в проективном пространстве P^n, содержащие конечное число торсов, у которых в каждой образующей L имеются характеристические прямые, проходящие через одну точку. При этом характеристические прямые, принадлежащие одному пучку, различны, а трехмерные характеристические плоскости соответствующих торсов находятся в общем положении. Если число пучков, содержащих характеристические прямые торсов, равно α, то рассматриваемый комплекс двумерных плоскостей обозначим через $C^\rho(\alpha)$.

Строение комплексов $C^\rho(1)$ выясняет следующая теорема.

Теорема 1. *Комплекс C^ρ двумерных плоскостей является комплексом $C^\rho(1)$ тогда и только тогда, когда его образующие касаются тангенциально невырожденной гиперповерхности.*

Доказательство. Предположим, что комплекс C^ρ двумерных плоскостей является комплексом $C^\rho(1)$. Тогда в его образующей $L = A_0 \wedge A_1 \wedge A_2$ имеются характеристические прямые, принадлежащие одному пучку. Свяжем с таким комплексом репер так, чтобы вершина A_0 совпадала с центром пучка прямых. Точки $A_1, A_2, A_1 + \lambda_1 A_2, \dots, A_1 + \lambda_{n-5} A_2$ поместим на $n-2$ характеристические прямые. Далее расположим в трехмерных характеристических плоскостях, проходящих через плоскость L соответствующих торсов, вершины $A_3, A_4, \dots, A_n$. Тогда из (5) получим, что

$$\Lambda_3^{\alpha 2} = 0, \quad \Lambda_4^{\alpha 1} = 0, \quad \Lambda_5^{\alpha 1} - \Lambda_5^{\alpha 2} = 0, \tag{8}$$

$$\Lambda_4^{\alpha 1} - \lambda_1 \Lambda_4^{\alpha 2} = 0, \quad \Lambda_n^{\alpha 1} - \lambda_{n-5} \Lambda_n^{\alpha 2} = 0, \tag{9}$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$, $i = 0, 1, \dots, m$, $p = 3, 4, \dots, n$. В силу этих соотношений система уравнений (3), определяющая рассматриваемые комплексы, не содержит линейных дифференциальных форм

$$\omega_2^3, \quad \omega_1^4, \quad \omega_1^5 - \omega_2^5, \quad \omega_1^4 - \lambda_1 \omega_2^4, \quad \dots, \quad \omega_1^n - \lambda_{n-5} \omega_2^n.$$

Следовательно, все входящие в систему уравнений (3) формы можно выразить через $n-3$ линейно независимые формы θ^r $(r = 1, 2, \dots, n-3)$, дополняющие до базиса комплекса указанные $n-2$ формы. В частности, линейные формы ω_0^p $(p = 3, 4, \dots, n)$ выражаются через базисные формы θ^r в виде

$$\omega_0^p = \lambda_r^p \theta^r. \tag{10}$$

Ввиду (10) дифференциал точки A_0 запишется так:

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega_0^k A_k + (\lambda_r^p A_p)\theta^r,$$

где $k = 1, 2$, $p = 3, 4 \ldots, n$, $r = 1, 2, \ldots, n-3$. Отсюда видно, что точка A_0 описывает тангенциально невырожденную гиперповерхность, касательная гиперплоскость в точке A_0 к которой определяется плоскостью L и точками $\lambda_r^p A_p$. Следовательно, образующие L комплекса $C^\rho(1)$ касаются этой тангенциально невырожденной гиперповерхности.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть все образующие L комплекса C^ρ касаются некоторой тангенциально невырожденной гиперповерхности. Совместим вершину A_0 с текущей точкой этой гиперповерхности. В ее касательную гиперплоскость, содержащую плоскость $L = A_0 \wedge A_1 \wedge A_2$, поместим вершины $A_3, A_4, \ldots, A_{n-1}$. Тогда уравнение этой гиперповерхности примет вид

$$\omega_0^n = 0. \tag{11}$$

Формы $\omega_0^3, \omega_0^4, \ldots, \omega_0^{n-1}$, линейно независимые на гиперповерхности (11), будут независимыми и на комплексе C^ρ. Ввиду этого их можно включить в число базисных форм комплекса C^ρ. Дополним их до базиса комплекса C^ρ независимыми формами θ^s, где $s = 1, 2, \ldots, n-2$.

Однопараметрическое семейство плоскостей L, для которых $dA_0 \in L$, определяется уравнениями

$$\omega_0^p = 0, \tag{12}$$

$$\omega_k^p = \lambda_{ks}^p \theta^s, \tag{13}$$

$k = 1, 2$, $p = 3, 4, \ldots, n$ и $s = 1, 2, \ldots, n-2$, где

$$\theta^s = \mu^s dt. \tag{14}$$

Среди этих семейств имеются торсы, которые в силу (4) определяются уравнениями

$$\omega_2^p = \nu \omega_1^p. \tag{15}$$

Согласно (13), (14), (15) получим

$$(\lambda_{2s}^p - \nu \lambda_{1s}^p)\mu^s = 0. \tag{16}$$

Для того, чтобы эта система имела ненулевое решение относительно μ^s, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\det(\lambda_{2s}^p - \nu \lambda_{1s}^p) = 0. \tag{17}$$

Это условие представляет собой уравнение степени $n-2$ относительно ν. Поэтому оно определяет для каждой образующей комплекса C^ρ в общем случае $n-2$ торса, характеристические прямые которых принадлежат одному пучку с центром в точке A_0.

В силу (13) и (14) дифференциал точки A_k запишется в виде

$$dA_k = \omega_k^0 A_0 + \omega_k^l A_l + (\lambda_{ks}^p \mu^s A_p)dt. \tag{18}$$

Уравнение (17) имеет в общем случае $n-2$ различных корней. Тогда направления, определяемые решениями μ^s системы уравнений (16), соответствующие этим корням, будут линейно независимыми. Ввиду этого из (18) вытекает, что трехмерные характеристические плоскости, касательные к соответствующим торсам, находятся в общем положении.

Найдем уравнения характеристических прямых, проходящих через точку A_0. Дифференциал точки $M = x^i A_i$ двумерной плоскости L имеет вид

$$dM = (dx^i + x^j \omega_j^i)A_i + x^i \omega_i^p A_p. \tag{19}$$

Отсюда видно, что характеристические прямые определяются уравнениями

$$x^i \omega_i^p = 0, \tag{20}$$

где формы ω_i^p удовлетворяют уравнениям (4). Характеристические прямые, проходящие через точку A_0, находятся в силу (12) и (13) из условия

$$x^k \lambda_{ks}^p \mu^s = 0. \tag{21}$$

Ввиду (12) имеем, что уравнения
$$x^1 + \nu x^2 = 0 \tag{22}$$
при различных значениях ν, удовлетворяющих (15), определяют на каждой образующей комплеса C^ρ $n-2$ различных характеристических прямых, принадлежащих пучку с центром в точке A_0. Таким образом, построенный комплекс двумерных плоскостей L является комплексом $C^\rho(1)$. Теорема полностью доказана. □

Рассмотрим теперь комплекс $C^\rho(2)$, в каждой образующей которого имеется два пучка прямых, содержащих $n-2$ характеристические прямые. В силу доказанной теоремы 1 такие комплексы представляют собой комплексы C^ρ двумерных плоскостей L, касающихся двух тангенциально невырожденных гиперповерхностей. Точки касания плоскостей L с этими гиперповерхностями являются центрами указанных выше двух пучков прямых. При этом справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Общие касательные к двум тангенциально невырожденным гиперповерхностям, порождающим комплекс $C^\rho(2)$, являются характеристическими прямыми образующих этого комплекса.*

Доказательство. Совместим вершины A_0 и A_1 с текущими точками двух тангенциально невырожденных гиперповерхностей, касательные гиперплоскости которых содержат образующую L комплекса $C^\rho(2)$. В $(n-2)$-мерную плоскость, по которой пересекаются касательные гиперплоскости, поместим вершины $A_3, A_4, \ldots, A_{n-2}$. Вершины A_4 и A_5 поместим в соответствующие касательные гиперплоскости. Тогда уравнения гиперповерхностей примут вид
$$\omega_0^n = 0, \tag{23}$$
$$\omega_1^{n-1} = 0. \tag{24}$$
Данные уравнения выполняются на комплексе $C^\rho(2)$, а следовательно, совпадают с двумя из $n-1$ уравнений (3), определяющих рассматриваемые комплексы $C^\rho(2)$. Ввиду этого, условию (6), определяющему характеристические прямые на двумерной плоскости L, удовлетворяют тангенциальные координаты прямой $A_0 \wedge A_1$ — общей касательной двух тангенциально невырожденных гиперповерхностей (21) и (22). Следовательно, эта касательная прямая является характеристической прямой образующей L комплекса $C^\rho(2)$. Теорема доказана. □

Из теоремы 2 вытекает, что у комплексов $C^\rho(\alpha)$ в каждой образующей всякие пучки прямых, содержащих $n-2$ характеристических прямых торсов, имеют общую характеристическую прямую. Двумерные плоскости, касающиеся α тангенциально невырожденных гиперповерхностей, образуют комплекс коразмерности α, произвол существования которого равен соответственно одной, двум, $\ldots$, $n-1$ функциям $n-3$ аргументов. Эти функции определяют тангенциально невырожденные гиперповерхности в пространстве P^n. Поскольку комплексы $C^\rho(\alpha)$ представляют собой сечения общего вида комплексов двумерных плоскостей коразмерности α ($\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$), произвол существования комплексов $C^\rho(1)$ равен $n-2$ функциям $2(n-3)+1$ аргументов, комплексов $C^\rho(2)$ равен $n-3$ функциям $2(n-3)+1$ аргументов, $\ldots$, комплексов $C^\rho(n-2)$ равен одной функции $2(n-3)+1$ аргументов, комплексов $C^\rho(n-1)$ равен $n-1$ функциям $n-1$ аргументов. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Комплекс C^ρ является комплексом $C^\rho(\alpha)$ тогда и только тогда, когда его образующие L касаются α тангенциально невырожденных гиперповерхностей. При этом комплексы $C^\rho(\alpha-1)$ определяются с произволом $(n-\alpha)-1$ функций $2(n-3)+1$ аргументов, а комплексы $C^\rho(n-1)$ определяются с произволом $n-1$ функций $n-1$ аргументов.*

Комплексы $C^\rho(\alpha)$ являются сомодвойственными. Рассмотрим, например, комплексы $C^\rho(1)$. Образующие этих комплексов касаются некоторой тангенциально невырожденной гиперповерхности. Совместим вершину A_0 с текущей точкой этой гиперповерхности. Поместим вершины $A_3, A_4, \ldots, A_{n-1}$ в касательную гиперплоскость к этой гиперповерхности, проходящую через образующую L комплекса $C^\rho(1)$. Тогда уравнение рассматриваемой гиперповерхности примет вид
$$\omega_0^n = 0. \tag{25}$$

Данное уравнение выполняется на комплексе $C^{\rho}(1)$. Тогда одно из уравнений (5) запишется следующим образом:

$$a_0 x^n = 0.$$

Рассмотрим характеристические прямые на плоскости L, не принадлежащие пучку прямых с центром в точке A_0. Для таких прямых, ввиду последнего равенства, получим

$$x^n = 0.$$

Это уравнение показывает, что трехмерные характеристические плоскости соответствующих торсов лежат в касательной гиперплоскости к тангенциально невырожденной гиперповерхности (23).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Если характеристические прямые $n-2$ проходящих через двумерную плоскость L торсов комплекса $C^{\rho}(1)$ принадлежат одному пучку γ, то трехмерные касательные плоскости C^2_{n-2} других торсов лежат в одной гиперплоскости — касательной к гиперповерхности, описываемой центром пучка γ и наоборот, если трехмерные характеристические плоскости $n-2$ проходящих через плоскость L торсов комплекса $C^{\rho}(1)$, принадлежат одной гиперплоскости π, то характеристические прямые C^2_{n-2} других торсов принадлежат одному пучку, центр которого описывает тангенциально невырожденную гиперповерхность, в каждой точке которой касающуюся гиперплоскости π.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акивис М. А.* Ткани и почти грассмановы структуры// Сиб. мат. ж. — 1982. — *23*, № 6. — С. 6–15.
2. *Акивис М. А., Гольдберг В. В.* Многообразия с вырожденным гауссовым отображением с кратными фокусами и скрученные конусы// Изв. вузов. Мат. — 2003. — № 11. — С. 3–14.
3. *Арнольд В. И.* Комплексный лагранжев грассманиан// Функц. анал. прилож. — 2000. — *34*, № 3. — С. 63–65.
4. *Арнольд В. И.* Лагранжев грассманиан кватернионного гиперсимплектического пространства// Функц. анал. прилож. — 2001. — *35*, № 1. — С. 74–77.
5. *Бубякин И. В.* Геометрия пятимерных комплексов двумерных плоскостей. — Новосибирск: Наука, 2001.
6. *Бубякин И. В.* О строении пятимерных комплексов двумерных плоскостей проективного пространства P^5 с единственным торсом// Мат. заметки СВФУ. — 2017. — *24*, № 2. — С. 3–12.
7. *Бубякин И. В.* О строении комплексов m-мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов// Мат. заметки СВФУ. — 2017. — *24*, № 4. — С. 3–16.
8. *Бубякин И. В.* О строении некоторых комплексов m-мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов, I// Мат. заметки СВФУ. — 2019. — *26*, № 2. — С. 1–14.
9. *Бубякин И. В.* О строении некоторых комплексов m-мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов, II// Мат. заметки СВФУ. — 2019. — *26*, № 4. — С. 14–24.
10. *Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И.* Избранные задачи интегральной геометрии. — М.: Добросвет, 2007.
11. *Макоха А. Н.* Геометрическая конструкция линейного комплекса плоскостей B_3// Изв. вузов. Мат. — 2018. — № 11. — С. 15–26.
12. *Нерсесян В. А.* Допустимые комплексы трехмерных плоскостей проективного пространства P^6, II// Уч. зап. Ереван. ун-та. Сер. физ. мат. — 2002. — № 1. — С. 34–38.
13. *Нерсесян В. А.* Допустимые комплексы трехмерных плоскостей проективного пространства P^6, II// Уч. зап. Ереван. ун-та. Сер. физ. мат. — 2001. — № 3. — С. 35–39.
14. *Стеганцева П. Г., Гречнева М. А.* Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 2. — С. 65–75.
15. *Akivis M. A.* On the differential geometry of a Grassmann manifold// Tensor. — 1982. — *38*. — P. 273–282.
16. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Projective Differential Geometry of Submanifolds. — North-Holland, 1993.
17. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Differential Geometry of Varieties with Degenerate Gauss Map. — New York: Springer-Verlag, 2004.
18. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Conformal Differetial Geometry and Its Generalizations. — New York: Wiley, 2011.

19. *Arkani-Hamed N., Bourjaily J. L., Cachazo F., Goncharov A. B., Postnikov A., Trnka J.* Scattering amplitudes and the positive Grassmannian/ arXiv: 1212.5605 [hep-th].
20. *Arkani-Hamed N., Trnka J.* The Amplituhedron// J. High Energy Phys. — 2014. — *10.* — P. 1–33.
21. *Bubyakin I. V.* To geometry of complexes of m-dimensional planes in projective space P^n containing a finite number of developable surfaces// Мат. Междунар. конф., посв. 100-летию В. Т. Базылева (Москва, 22-25 апреля 2019 г.). — М.: МГПУ, 2019. — С. 17–18.
22. *Hassett B.* Introduction to Algebraic Geometry. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.
23. *Landsberg J. M.* Algebraic Geometry and Projective Differential Geometry. — Seoul: Seoul Natl. Univ., 1997.
24. *Room T. G.* The Geometry of Determinantal Loci. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1938.

Бубякин Игорь Витальевич
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск
E-mail: bubyakiniv@mail.ru