ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 42–50
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-42-50

УДК 514.8

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2023 г. **М. П. БУРЛАКОВ, Н. И. ГУСЕВА**

Аннотация. В статье рассматривается комплексное пространство-время, реализованное в алгебре бикватернионов. В этом формализме даются уравнения Максвелла и динамические уравнения Лоренца. Доказана теорема о тождестве магнитных монополей и тахионов, несущих электрический заряд.

***Ключевые слова*:** комплексное пространство-время, бикватернионы, условия регулярности, уравнения Максвелла, обобщённая теорема Стокса.

ELECTRODYNAMICS IN COMPLEX SPACE

© 2023 **M. P. BURLAKOV, N. I. GUSEVA**

Abstract. In this paper, we examine the complex space-time realized in the biquaternion algebra and the Maxwell and Lorentz equations in this formalism. Also, we prove a theorem on the identity of magnetic monopoles and tachyons carrying an electric charge.

***Keywords and phrases*:** complex space-time, biquaternions, regularity conditions, Maxwell equations, generalized Stokes theorem.

***AMS Subject Classification*:** 15A66, 15A67, 35Q61

Кватернионы с комплексными координатами рассматривал ещё У. Гамильтон, он и назвал их *бикватернионами.* В двадцатых годах прошлого века эта алгебра (в матричном варианте) была использована П. Дираком для записи уравнений релятивистского электрона. В данной статье будет показано, что уравнения Максвелла также можно записать в алгебре бикватернионов, что позволяет установить идентичность тахионов, несущих электрический заряд, с магнитными монополями.

Алгебру бикватернионов $\mathbf{H}(\mathbb{C})$ можно рассматривать как алгебру *альтернионов* (см. [8]) над трёхмерным (вещественным) евклидовым пространством $\mathbf{E}_3$. Если $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathbf{E}_3$, то векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, бивекторы $\mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_{31} = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, тривектор $\mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ и единица образуют базис линейного пространства алгебры альтернионов $\mathbf{Al}(\mathbf{E}_3)$, т.е. произвольным элементом $\mathbf{x}$ алгебры $\mathbf{Al}(\mathbf{E}_3)$ будет

$$\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_{23}\mathbf{e}_{23} + x_{31}\mathbf{e}_{31} + x_{12}\mathbf{e}_{12} + x_{123}\mathbf{e}_{123},$$

а произведение в $\mathbf{Al}(\mathbf{E}_3)$ задаётся структурными тождествами

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_h = (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_h) + \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_h \tag{1}$$

с дополнительным условием ассоциативности.

Алгебра $\mathbf{Al}(\mathbf{E}_3)$ обладает *внутренней комплексификацией*: так как $\mathbf{e}_{123} \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{123}$, а также $\mathbf{e}_{123}^2 = -1$, то полагают $\mathbf{e}_{123} = i = \sqrt{-1}$. Тогда легко видеть, что $\mathbf{e}_{23} = i\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_{31} = i\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_{12} = i\mathbf{e}_3$, т.е. $\mathbf{Al}(\mathbf{E}_3) = \mathbf{H}(\mathbb{C})$, и

$$\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_{23}\mathbf{e}_{23} + x_{31}\mathbf{e}_{31} + x_{12}\mathbf{e}_{12} + x_{123}\mathbf{e}_{123} =$$
$$= (x_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) + i(x_{123} + x_{23}\mathbf{e}_1 + x_{31}\mathbf{e}_2 + x_{12}\mathbf{e}_3).$$

При этом для векторов $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3 \in \mathbf{E}_3 \subset \mathbf{H}(\mathbb{C})$

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = (\mathbf{x},\mathbf{y}) + i\mathbf{x}\times\mathbf{y}. \tag{2}$$

Псевдоевклидово пространство-время Минковского реализуется на линейном вещественном пространстве $\mathbf{M}_4$, натянутом на векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и единицу. А фундаментальная форма на $\mathbf{M}_4$ задаётся произведением элемента $\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \in \mathbf{M}_4 \subset \mathbf{H}(\mathbb{C})$ на сопряжённый ему элемент $\overline{\mathbf{x}} = x_0 - x_1\mathbf{e}_1 - x_2\mathbf{e}_2 - x_3\mathbf{e}_3 \in \mathbf{M}_4 \subset \mathbf{H}(\mathbb{C})$, так как $\mathbf{x}\cdot\overline{\mathbf{x}} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

Вложение псевдоевклидова пространства Минковского в комплексное пространство алгебры бикватернионов полезно во многих отношениях. В частности, в пространстве бикватернионов единообразно описывается динамика материальных тел, движущихся с любой скоростью.

Пусть движение материальной точки с массой покоя m задано бикватернионом

$$\mathbf{r}(\tau) = t(\tau) + x(\tau)\mathbf{e}_1 + y(\tau)\mathbf{e}_2 + z(\tau)\mathbf{e}_3 \in \mathbf{M}_4 \subset \mathbf{H}(\mathbb{C}),$$

где

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt, \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2, \quad v_1 = \frac{dx}{dt}, \quad v_2 = \frac{dy}{dt}, \quad v_3 = \frac{dz}{dt}$$

и c — скорость света в вакууме. Тогда для импульса $\mathbf{p}$ данной материальной точки получим выражение

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = m\frac{d\mathbf{r}(\tau)}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3}$$

Если $v < c$, то импульс будет вещественным бикватернионом, а если $v > c$, то, как видно из (3), импульс станет чисто мнимым бикватернионом.

Материальные частицы, движущиеся со скоростью большей скорости света, называют *тахионами*, а частицы движущиеся со скоростью меньшей скорости света — *брадионами* [2]. Непосредственно тахионы и брадионы не взаимодействуют, что видно из закона сохранения импульса. Действительно, пусть $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ импульсы двух материальных частиц; после их столкновения они приобретут импульсы $\mathbf{p'}_1$ и $\mathbf{p'}_2$, и по закону сохранения

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2. \tag{4}$$

Если обе частицы брадионы или тахионы, то $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}'_1$, но если одна частица будет тахионом, а другая брадионом, то из равенства (4) следует, что $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1$, а это и означает, что тахионы и брадионы непосредственно не взаимодействуют. Однако их взаимодействие может быть опосредованным, например, через электромагнитные поля.

Чтобы понять характер электромагнитного взаимодействия брадионов и тахионов, запишем уравнения Максвелла в гиперкомплексном формализме.

Теорема 1 (об уравнениях Максвелла)**.** *Пусть*

$$\mathbf{F} = E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3 + H_1 i\mathbf{e}_1 + H_2 i\mathbf{e}_2 + H_3 i\mathbf{e}_3$$

бикватернионнозначная функция $\mathbf{F}\colon \mathbf{M}_4 \to \mathbf{H}(\mathbb{C})$ *и*

$$\mathbf{D}_4^+ = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_3.$$

Тогда условие левой регулярности функции $\mathbf{F}$ *относительно оператора* $\mathbf{D}_4^+$

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}{}_4^+\mathbf{F} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_3\right)\mathbf{F} = 0 \tag{5}$$

эквивалентно однородным уравнениям Максвелла для векторов

$$\mathbf{E} = E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3 \quad \textit{и} \quad \mathbf{H} = H_1\mathbf{e}_1 + H_2\mathbf{e}_2 + H_3\mathbf{e}_3$$

напряжённости электрического и магнитного поля (см. [5]).

Доказательство. Действительно:

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}_4^+\mathbf{F} = \left(\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}\right) + i\left(\frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z}\right) + \\ + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_1}{\partial t}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial E_2}{\partial t}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial E_3}{\partial t}\mathbf{e}_3\right) + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial H_1}{\partial t}i\mathbf{e}_1 + \frac{\partial H_2}{\partial t}i\mathbf{e}_2 + \frac{\partial H_3}{\partial t}i\mathbf{e}_3\right) - \\ - \left(\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 - \left(\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x}\right)\mathbf{e}_2 - \left(\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y}\right)\mathbf{e}_3 + \\ + \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\right)i\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x}\right)i\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y}\right)i\mathbf{e}_3 = 0,$$

Доказательство утверждения сразу получается, если выражение для $\overrightarrow{\mathbf{D}}_4^+\mathbf{F}$ приравнять нулю и полученные дифференциальные уравнения записать в формализме векторного анализа. В результате получим систему однородных уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \end{cases} \qquad \square$$

В классической электродинамике важную роль играют скалярный и векторный потенциалы ϕ и $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ электромагнитного поля, через которые выражаются векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{6}$$

или в координатах:

$$E_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t}, \quad E_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_2}{\partial t}, \quad E_3 = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_3}{\partial t},$$
$$H_1 = \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \quad H_2 = \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \quad H_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}.$$

Потенциал для электромагнитного поля можно ввести и в гиперкомплексном формализме. Для этого возьмём линейный дифференциальный оператор

$$\mathbf{D}_4^- = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_1 - \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_2 - \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_3,$$

сопряжённый оператору $\mathbf{D}_4^+$, и рассмотрим функцию $\mathbf{\Phi} = \phi - \mathbf{A} = \phi - A_1\mathbf{e}_1 - A_2\mathbf{e}_2 - A_3\mathbf{e}_3$. Тогда

$$\mathbf{D}_4^-\Phi = -\frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{e}_1 - \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{e}_2 - \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{e}_3 - \frac{1}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{c}\frac{\partial A_2}{\partial t}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{c}\frac{\partial A_3}{\partial t}\mathbf{e}_3 + \\ + \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{e}_{23} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{e}_{31} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{e}_{12} + \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Если потребовать для компонент векторного и скалярного потенциалов выполнение калибровочного условия Лоренца:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \tag{7}$$

то получим, что

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}_4^-\mathbf{\Phi} = E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3 + H_1\mathbf{e}_{23} + H_2\mathbf{e}_{31} + H_3\mathbf{e}_{12} = \mathbf{F}. \tag{8}$$

Из представления (8) функции электромагнитного поля $\mathbf{F}$ немедленно следует, что, если поле $\mathbf{F}$ удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла, то скалярный потенциал $\phi \equiv A_0$ и все компоненты A_k векторного потенциала $\mathbf{A}$ электромагнитного поля $\mathbf{F}$ удовлетворяют волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial t^2} = 0. \tag{9}$$

Это утверждение сразу получается из того, что

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}_4^+\overrightarrow{\mathbf{D}}_4^- \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{10}$$

и потому из условия $\overrightarrow{\mathbf{D}}_4\mathbf{F} = 0$ получим

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}_4^+\overrightarrow{\mathbf{D}}_4^-\mathbf{\Phi} = \overrightarrow{\mathbf{D}}_4^+\mathbf{F} = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{\Phi} = 0. \tag{11}$$

Заметим, кстати, что из (8) также следует, что, если напряжённости электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитного поля $\mathbf{H}$ удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла, то вещественные компоненты E_k и H_k бикватернионнозначной функции электромагнитного поля $\mathbf{F}$ также удовлетворяют волновому уравнению.

Однородные уравнения Максвелла (уравнения Максвелла без токов и зарядов) представляют собой условие регулярности бикватернионнозначной функции напряжённости электромагнитного поля $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z, t)$, т.е. система уравнений Максвелла эквивалентна уравнению (☐). В связи с этим естественно возникает вопрос: как в гиперкомплексном формализме можно записать неоднородные уравнения для электромагнитного поля, порождённого электрическими зарядами и токами?

Для этого введём функцию

$$\mathbf{J} = \rho - \frac{j_1\mathbf{e}_1 + j_2\mathbf{e}_2 + j_3\mathbf{e}_3}{c} \equiv \rho - \frac{\mathbf{j}}{c}, \tag{12}$$

где ρ — плотность электрического заряда, а $\mathbf{j} = j_1\mathbf{e}_1 + j_2\mathbf{e}_2 + j_3\mathbf{e}_3$ — плотность электрического тока. Тогда имеет место следующее утверждение.

Следствие 1 (об уравнениях Максвелла). *Уравнение*

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}\mathbf{F} = 4\pi\mathbf{J} \tag{13}$$

эквивалентно системе неоднородных уравнений Максвелла с электрическими зарядами и токами:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho \\ &\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \\ &\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Запись неоднородных уравнений Максвелла с токами и зарядами в форме *гиперкомплексного дифференциального уравнения* (7) имеет много преимуществ по сравнению с традиционной *векторной записью* этих великих уравнений (подобно тому как векторная форма записи уравнений Максвелла более предпочтительна по сравнению с их координатной записью). Например, запись однородных уравнений Максвелла в форме (☐) позволяет средствами гиперкомплексного анализа получать законы сохранения динамических величин для электромагнитных полей [5]. В частности, справедливое в силу уравнения (5) интегральное тождество *типа Коши*

$$\int\limits_{\partial\Theta} \mathbf{F}^* \cdot \sigma_4 \cdot \mathbf{F} = \int\limits_{\Theta} (\mathbf{F}^*\overleftarrow{\mathbf{D}}_4^+ \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^* \cdot \overrightarrow{\mathbf{D}}_4^+\mathbf{F})dV_4 = 0,$$

где $\mathbf{F}^* = E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3 - H_1 i\mathbf{e}_1 - H_2 i\mathbf{e}_2 - H_3 i\mathbf{e}_3$, а

$$\sigma_4 = -c^{-1}dx \wedge dy \wedge dz + \mathbf{e}_1 dy \wedge dz \wedge dt - \mathbf{e}_2 dz \wedge dx \wedge dt + \mathbf{e}_3 dx \wedge dy \wedge dt$$

представляет собой закон сохранения энергии-импульса электромагнитного поля в пространственно-временной области Θ, а интегральное тождество

$$\int\limits_{\partial\Theta} \mathbf{\Phi} \cdot \sigma_4 \cdot \mathbf{F} = \int\limits_{\Theta} (\mathbf{\Phi}\overleftarrow{\mathbf{D}}_4^+ \cdot \mathbf{F} + \mathbf{\Phi} \cdot \overrightarrow{\mathbf{D}}_4^+\mathbf{F})dV_4 = 0,$$

где $\mathbf{\Phi} = \varphi + \mathbf{A} \equiv \varphi + A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$, φ — скалярный и $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ — векторный потенциалы электромагнитного поля, является следствием однородных уравнений Максвелла и формул (☐), выражающих напряжённости электрического и магнитного поля из скалярного и векторного потенциала. Оно соответствует закону сохранения некоторой динамической величины для электромагнитного поля.

Чтобы выяснить физический смысл этой динамической величины, возьмём в качестве области интегрирования Θ полосу пространства-времени, ограниченную гиперплоскостями T_1 с уравнением $t = t_1$ и T_2 с уравнением $t = t_2$. Тогда, считая электромагнитное поле достаточно быстро убывающим до нуля на бесконечности, получим следующую интегральную величину

$$\mathbf{S}(T) = \iiint\limits_T (\overline{\mathbf{\Phi}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Phi}) dV_3,$$

которая сохраняет своё значение на всех гиперплоскостях T с уравнением $t = \mathrm{const}$ или, что то же самое, на всём трёхмерном пространстве во все моменты времени. И так как

$$\overline{\mathbf{\Phi}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Phi} = (\varphi + \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{E} + i\mathbf{H}) + (\mathbf{E} + i\mathbf{H}) \cdot (\varphi - \mathbf{A}) = 2\varphi\mathbf{E} - 2\mathbf{A} \times \mathbf{H} + 2i\varphi\mathbf{H} + 2i\mathbf{A} \times \mathbf{E},$$

то эта величина имеет смысл собственного момента импульса (спина) электромагнитного поля, поскольку в калибровке, при которой скалярный потенциал полагают равным нулю, плотность собственного момента импульса электромагнитного поля равна $s \equiv \mathbf{A} \times \mathbf{E}$.

Так в самых общих чертах выглядит классическая электродинамика Максвелла в гиперкомплексном формализме.

Такой формализм позволяет нам не только записывать в бескоординатной форме уравнения электродинамики, но и вскрывает глубинную связь этих уравнений с геометрической структурой пространства и времени. И уже поэтому гиперкомплексный подход к описанию электромагнитных полей обладает несомненной ценностью. Но эта ценность многократно увеличивается в связи с тем, что в этом формализме просто решаются некоторые давние проблемы классической электродинамики.

Важно ещё то, что те же методы гиперкомплексного анализа, которые применялись к задачам электродинамики, можно использовать и для исследования других физических полей. В частности, с помощью гиперкомплексного анализа получаем возможность записывать различные уравнения теории поля в инвариантной форме, учитывающей геометрическую структуру пространства-времени.

Но, пожалуй, основным достоинством бикватернионной записи уравнений Максвелла с токами и зарядами является решение одной давней проблемы классической электродинамики при помощи такой формы этих великих уравнений. Речь пойдёт о проблеме магнитных зарядов и о существовании частиц, несущих изолированный магнитный полюс. Из практики известно, что любой магнит всегда имеет два полюса, которые условно называют северным и южным. И если какой-либо магнит разделить на несколько частей, то каждая часть снова будет иметь по два полюса.

А может ли некоторое материальное тело (например, элементарная частица) иметь единственный полюс — северный или южный? Такой изолированный полюс получил название *магнитного заряда*, а частицы, несущие магнитный заряд, стали называть *магнитными монополями*. Гипотезу о магнитных монополях ещё в 1931 году высказал знаменитый физик-теоретик Поль Адриен Морис Дирак в статье «Квантовые сингулярности в электромагнитном поле». Исходя из квантовомеханических соображений, Дирак предположил, что существуют частицы, несущие магнитный заряд и чисто теоретически вывел некоторые свойства этих гипотетических частиц, которые с тех пор получили название монополей Дирака [10].

Авторитет Дирака был настолько велик, а его рассуждения обладали такой безупречной логикой, что большинство физиков были уверены в том, что магнитные монополи вскоре будут обнаружены экспериментально. Но шли годы и десятилетия, а поиск магнитных монополей не приносил результатов. Другие теоретические предсказания Дирака (например, его гипотеза о существовании античастиц) находили блестящее подтверждение в экспериментах. А магнитные монополи упорно ускользали от всех попыток их обнаружить. Так возникла проблема магнитных монополей, решения которой нет до сего дня.

Как должны выглядеть базовые уравнения электродинамики, если предположить, что магнитные заряды существуют? Теория, в которой как электрические, так и магнитные заряды выступают в качестве источников электромагнитного поля, базируется на обобщённых уравнениях

Максвелла, которые в векторном формализме имеют такой вид:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho_\varepsilon\\&\operatorname{rot}\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\varepsilon\end{aligned}\right\};\quad\left.\begin{aligned}&\operatorname{div}\mathbf{H}=4\pi\rho_\mu\\&\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\mu\end{aligned}\right\}.\tag{15}$$

где ρ_ε — плотность электрических зарядов, ρ_μ — плотность магнитных зарядов, $\mathbf{j}_\varepsilon=j_1^\varepsilon\mathbf{e}_1+j_2^\varepsilon\mathbf{e}_2+j_3^\varepsilon\mathbf{e}_3$ — плотность тока электрических зарядов, а $\mathbf{j}_\mu=j_1^\mu\mathbf{e}_1+j_2^\mu\mathbf{e}_2+j_3^\mu\mathbf{e}_3$ — плотность тока магнитных зарядов [10].

Чтобы записать обобщённые уравнения Максвелла в гиперкомплексном формализме, достаточно в уравнение (13) вместо (12) подставить следующую бикватернионнозначную функцию тока:

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}_\varepsilon+\mathbf{J}_\mu\equiv\rho_\varepsilon+\rho_\mu\mathbf{e}_{123}-\frac{\mathbf{j}_\varepsilon}{c}+\frac{\mathbf{j}_\mu}{c},\tag{16}$$

тогда обобщённые уравнения Максвелла с электрическими и магнитными зарядами и токами (15) можно записать в виде (13).

Гиперкомплексная форма записи (13) обобщённых уравнений Максвелла предпочтительнее их традиционной записи (15). Это становится понятным, если положим $\mathbf{e}_{123}=i\equiv\sqrt{-1}$. Тогда плотность электрического тока

$$\mathbf{J}_\varepsilon=\rho_\varepsilon-\frac{\mathbf{j}_\varepsilon}{c}\equiv\rho_\varepsilon-\frac{j_1^\varepsilon\mathbf{e}_1+j_2^\varepsilon\mathbf{e}_2+j_3^\varepsilon\mathbf{e}_3}{c}$$

будет вещественным 4-вектором, а плотность тока магнитных зарядов будет чисто мнимым 4-вектором

$$\mathbf{J}_\mu=i\left(\rho_\mu-\frac{\mathbf{j}_\mu}{c}\right)\equiv i\left(\rho_\mu-\frac{j_1^\mu\mathbf{e}_1+j_2^\mu\mathbf{e}_2+j_3^\mu\mathbf{e}_3}{c}\right).$$

Рассмотрим одиночный электрический заряд ε, движущийся со скоростью

$$\mathbf{v}=v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2+v_3\mathbf{e}_3.$$

Для него

$$\mathbf{J}=\varepsilon\mathbf{u}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{\varepsilon(v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2+v_3\mathbf{e}_3)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.\tag{17}$$

Когда $v^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2<c^2$, бикватернион $\mathbf{J}$ будет вещественным, а если $v^2>c^2$, то бикватернион $\mathbf{J}$ станет чисто мнимым. Но поскольку любой электрический ток представляет собой поток электрически заряженных частиц, то можно утверждать, что электрический ток тахионов выражается чисто мнимым бикватенионом. И подставляя

$$\mathbf{J}=i\rho+(j_1i\mathbf{e}_1+j_2i\mathbf{e}_2+j_3i\mathbf{e}_3)\tag{18}$$

в бикватернионное уравнение (7), получим такую систему уравнений

$$\begin{cases}\operatorname{div}\mathbf{E}=0,\\\operatorname{rot}\mathbf{H}-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=0;\end{cases}\quad\begin{cases}\operatorname{div}\mathbf{H}=4\pi\rho,\\\operatorname{rot}\mathbf{E}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\dfrac{4\pi\rho}{c}\mathbf{j}.\end{cases}\tag{19}$$

Эта система уравнений описывает электромагнитные поля, которые порождаются *магнитными зарядами* и *магнитными токами.* И таким образом получается, что токи электрически заряженных тахионов создают такие же электромагнитные поля, как и токи брадионов, несущих магнитный заряд.

Рассмотрим теперь характер взаимодействия с электромагнитным полем брадионов и тахионов. Для этого запишем в гиперкомплексном формализме *уравнения Лоренца*

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\varepsilon(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{H}/c)\tag{20}$$

для движения в электромагнитном поле частиц с электрическим зарядом ε и массой покоя m. Чтобы это векторное уравнение переписать как бикватернионное уравнение, умножим бикватернион (четырёхмерной) скорости

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{e}_2 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

справа на бивектор электромагнитного поля $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} = (E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3 + H_1 i\mathbf{e}_1 + H_2 i\mathbf{e}_2 + H_3 i\mathbf{e}_3)\cdot(u_0 + u_1\mathbf{e}_2 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) = \\ = u_0(E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3) + u_0(H_1 i\mathbf{e}_1 + H_2 i\mathbf{e}_2 + H_3 i\mathbf{e}_3) + \\ + (E_1u_1 + E_2u_2 + E_3u_3) + i(H_1u_1 + H_2u_2 + H_3u_3) + \\ + (u_2H_3 - u_3H_2)\mathbf{e}_1 + (u_3H_1 - u_1H_3)\mathbf{e}_2 + (u_1H_2 - u_2H_1)\mathbf{e}_3 + \\ + (u_2E_3 - u_3E_2)i\mathbf{e}_1 + (u_3E_1 - u_1E_3)i\mathbf{e}_2 + (u_1E_2 - u_2E_1)i\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что динамическое уравнение

$$m\frac{d\mathbf{u}(\tau)}{d\tau} = \varepsilon\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}/c \tag{21}$$

в своей вещественной векторной части даст уравнение Лоренца (12). Если взять мнимую векторную часть уравнения (13), то получим динамическое уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} = \varepsilon(\mathbf{H} - \mathbf{v}\times\mathbf{E}/c), \tag{22}$$

которому должно подчиняться движение частиц, несущих магнитный заряд. Но этому же уравнению подчиняется и движение электрически заряженных тахионов. Таким образом, объединяя выводы из уравнений (11) и (14), получаем следующее утверждение, которое сформулируем как теорему.

Теорема 2 (первая теорема о магнитных монополях). *Электромагнитное поле, источником которого являются токи тахионов, несущих электрические заряды, совпадает с электромагнитным полем, порождённым токами брадионов несущих магнитные заряды.*

Доказанная теорема утверждает, что поток электрически заряженных тахионов порождает такое же электромагнитное поле, как и поток магнитно заряженных брадионов. Можно показать и обратное. А именно то, что электрически заряженные тахионы ведут себя в стороннем электромагнитном поле как частицы, несущие магнитный заряд. Другими словами, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3 (вторая теорема о магнитных монополях). *Электрически заряженный тахион во внешнем электромагнитном поле движется также как и магнитный монополь.*

Для доказательства этой теоремы запишем в гиперкомплексном формализме уравнение Лоренца (20), которому подчиняется движение заряженных частиц c зарядом e в стороннем электромагнитном поле.

Пусть $\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ 4-*скорость* заряженной материальной частицы. Умножим этот вектор справа на бикватернионнозначную функцию $\mathbf{F} = E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3 + H_1\mathbf{e}_{23} + H_2\mathbf{e}_{31} + H_3\mathbf{e}_{12}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} = u_0(E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3) + u_0(H_1\mathbf{e}_{23} + H_2\mathbf{e}_{31} + H_3\mathbf{e}_{12}) + \\ + (E_1u_1 + E_2u_2 + E_3u_3) + (H_1u_1 + H_2u_2 + H_3u_3)\mathbf{e}_{123} + \\ + (u_2H_3 - u_3H_2)\mathbf{e}_1 + (u_3H_1 - u_1H_3)\mathbf{e}_2 + (u_1H_2 - u_2H_1)\mathbf{e}_3 - \\ - (u_2E_3 - u_3E_2)\mathbf{e}_{23} - (u_3E_1 - u_1E_3)\mathbf{e}_{31} - (u_1E_2 - u_2E_1)\mathbf{e}_{12}.\end{aligned} \tag{23}$$

Тогда динамическое уравнение

$$m\frac{d\mathbf{u}(\tau)}{d\tau} = e\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}/c \tag{24}$$

в своей векторной части даст нам уравнение Лоренца (20), так как

$$u_0 = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_1 = \frac{v_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_2 = \frac{v_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_3 = \frac{v_3}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\mathrm{vek}\left(m\frac{d\mathbf{u}(\tau)}{d\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{mv(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Если взять бивекторную часть уравнения (24), то получим такое уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{mv(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = e\left(\mathbf{H} - v\times\frac{\mathbf{E}}{c}\right), \tag{25}$$

которому должно подчиняться движение частиц, несущих магнитный заряд. Но этому же уравнению подчиняется и движение электрически заряженных тахионов, скорость которых даётся чисто мнимым вектором. Это и доказывает вторую теорему о магнитных монополях.

Заметим ещё, что нулевая (скалярная) компонента гиперкомплексного уравнения (24) представляет собой уравнение изменения кинетической энергии движущегося заряженного брадиона:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = v_1E_1 + v_2E_2 + v_3E_3, \tag{26}$$

а тривекторная (псевдоскалярная) компонента уравнения (24) представляет собой уравнение изменения кинетической энергии движущегося заряженного тахиона:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = v_1H_1 + v_2H_2 + v_3H_3. \tag{27}$$

Итак, электромагнитное поле электрически заряженных тахионов совпадает с электромагнитным полем, порождённым токами магнитных зарядов, и движение электрически заряженных тахионов подчиняется динамическому уравнению частиц, несущих магнитный заряд.

Утверждение теорем о магнитных монополях объясняет неудачи экспериментаторов, упорно ищущих частицы, несущие магнитный заряд [5]: пока не будут найдены тахионы, не будут обнаружены и магнитные монополи. С другой стороны, из этой теоремы следует существование магнитного фотоэффекта (возможно, обнаруженного в экспериментах Эренгафта). Он помещал в магнитное поле железные пылинки, которые освещал сильным световым лучом. При этом пылинки изменяли траекторию движения таким образом, как если бы свет выбивал из них магнитные заряды. Позднее опыты Эренгафта воспроизводили другие физики, но разумного объяснения аномальному движению железных пылинок под действием света (эффекта Эренгафта) до сих пор не получено, как и не обнаружено следов выбитых магнитных зарядов.

Разумное объяснение результатам опытов Эренгафта даёт нам отождествление магнитных монополей с электрически заряженными тахионами. В таком случае будем наблюдать взаимодействие железных пылинок со сверхсветовыми электронами, точно такое же, как с магнитными монополями, но сами тахионы, несущие электрический заряд, нашими приборами обнаружены быть не могут. Это сразу следует из гиперкомплексной формы уравнений Максвелла, продолженных в область сверхсветовых скоростей.

Мир брадионов и мир тахионов разделён барьером скорости света. Если скорость некоторого брадиона будет расти, приближаясь к скорости света, то многие его геометрические и физические характеристики будут стремиться к бесконечности. Например, для релятивистской массы M любого материального тела с собственной (инвариантной) массой m будем иметь:

$$M = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \to \infty,$$

когда $v \to c$. Это же справедливо и для релятивистского импульса, энергии, момента импульса и т. д.

Генрих Герц, открывший электромагнитные волны, как-то сказал об уравнениях Максвелла: «*Нельзя изучать эту удивительную теорию, не испытывая по временам такого чувства, будто математические формулы живут собственной жизнью, обладают собственным разумом — кажется, что эти формулы умнее нас, умнее даже самого автора, как будто они дают нам больше, чем в своё время было в них заложено*» [3]. Это замечательное высказывание выдающегося физика XIX века не раз оправдывалось в прошлом и не раз ещё будет подтверждаться в будущем. Стоит нам чуть более внимательно приглядеться к этим великим уравнениям — и они открывают нам всё новые и новые знания об окружающем мире. И кажется, что все тайны вселенной скрыты в иероглифах формул, о которых Оливер Хевисайд написал после первого с ними знакомства: «*Это было нечто великое, и ещё более великое, и наивеличайшее*».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлаков И. М., Бурлаков М. П.* Введение в гиперкомплексный анализ. — LAMBERT, 2017.
2. *Бурлаков И. М., Бурлаков М. П.* Геометрические структуры линейных алгебр. — LAMBERT, 2017.
3. *Герц Г. Р.* Принципы механики, изложенные в новой связи. — М.: Изд-во АН СССР, 1959.
4. *Минковский Г.* Пространство и время// Усп. физ. наук. — 1959. — *69*. — С. 303–320.
5. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство-время. — М: Мир, 1987.
6. *Применко Л. А.* Математические идеи О. Хевисайда// в кн.: Из истории развития физико-математических наук. — Киев, 1981. — С. 37–44.
7. *Реками Э.* Теория относительности и её обобщения// в кн.: Астрофизика, кванты и теория относительности. — М.: Мир, 1982. — С. 53–128.
8. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы геометрии. — М: ГИТТЛ, 1955.
9. *Хунд Ф.* История квантовой теории. — Киев: Наукова думка, 1980.
10. *Dirac P. A. M.* Quantised singularities in the electromagnetic field// Proc. Roy. Soc. Ser. A. — 1931. — *133*, № 821. — P. 60–72.

Бурлаков Михаил Петрович
Московский педагогический государственный университет
E-mail: burlakovmihail@mail.ru

Гусева Надежда Ивановна
Московский педагогический государственный университет;
Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва
E-mail: ngus12@mail.ru