ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 51–62
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-51-62

УДК 519.17

ОСТОВНЫЕ ЛЕСА И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

© 2023 г. **Е. И. ДЕЗА**

Аннотация. В статье рассмотрены вопросы перечисления некоторых графов специального вида. Получен ряд новых результатов о числе остовных лесов графов, играющих важную роль в теории информации. Рассмотрены свойства остовных сходящихся лесов ориентированных графов, участвующих в построении квазиметрики среднего времени первого прохода — обобщенной метрической структуры, тесно связанной с эргодическими однородными цепями Маркова. Изучены характеристики остовных корневых лесов и остовных сходящихся лесов неориентированных и ориентированных графов, необходимых для построения матрицы относительной лесной доступности — одной из мер близости вершин графовых структур. Рассуждения проведены на основе нескольких простейших графовых моделей, в том числе на базе простого пути, простого цикла, графа-гусеницы и их ориентированных аналогов.

Ключевые слова: граф, путь, цикл, граф-гусеница, остовной сходящийся корневой лес ориентированного графа, остовной корневой лес неориентированного графа, цепь Маркова, среднее время первого прохода, матрица относительной лесной доступности.

SPANNING FORESTS AND SPECIAL NUMBERS

© 2023 **E. I. DEZA**

Abstract. In this paper, we discuss enumerating some graphs of a special type. New results on the number of spanning forests of graphs playing an important role in information theory are obtained. We consider properties of convergent spanning forests of directed graphs involved in the construction of the quasi-metric of the mean time of the first pass, which is a generalized metric structure closely related to ergodic homogeneous Markov chains. We examine characteristics of spanning root forests and convergent spanning forests of directed and undirected graphs that are used for constructing the matrix of relative forest availability, which is one of the proximity measures of vertices of graphs. The reasonings are illustrated by several simple graph models, including a simple path, a simple cycle, a caterpillar graph, and their oriented analogs.

Keywords and phrases: graph, path, cycle, caterpillar graph, convergent spanning root forest of a directed graph, spanning root forest of an undirected graph, Markov chain, mean time of the first pass, relative forest accessibility matrix.

AMS Subject Classification: 54E25, 54E35

1. Введение. Вопросы перечисления тех или иных графовых структур (помеченных, непомеченных, ориентированных, неориентированных и др.) представляют собой хорошо разработанную часть классической теории графов. Особое место среди перечислительных проблем занимают утверждения, связанные с подсчетом тех или иных деревьев и, как естественное обобщение, лесов. Так, важное место в прикладных задачах теории информации занимают вопросы, связанные с исследованием обобщенных метрических структур на цепях Маркова.

Исследование количества сходящихся лесов ориентированных графов, используемых для моделирования марковских процессов, является естественной составной частью указанной проблематики [4,7,10–12]. Полученные нами результаты в этой области — доказательство теорем о числе остовных деревьев и остовных 2-деревьевых лесов ориентированных и неориентированных путей, циклов и графов-гусениц — представлены в разделе 3.

Матрица относительной лесной доступности является одной из известных мер близости между вершинами графов и орграфов; особенно часто она используется в приложениях, связанных с различными аспектами алгебраической теории графов [6, 8]. Для проведения соответствующих исследований важна информация о количестве тех или иных типов остовных лесов графов и ориентированных графов, использующихся при решении прикладных задач. Полученные нами результаты в этой области — доказательство теорем о числе остовных лесов ориентированных и неориентированных путей, циклов и графов-гусениц — представлены в разделе 4.

Раздел 2 носит вспомогательный характер. Он содержит базовую информацию о графовых структурах, фигурирующих в исследовании, и числах Фибоначчи, существенно использующихся при доказательстве теорем в случае неориентированных графовых конструкций.

2. Базовые определения. Для формулировки и доказательства основных результатов статьи вспомним базовые понятия теории неориентированных и ориентированных графов [4, 7].

Неориентированный граф (*граф*) G — пара $\langle V, E\rangle$, где $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ — множество, называемое множеством вершин графа G, а $E \subset \{(i, j) \mid i, j \in V,\ i \neq j\}$ — некоторое подмножество множества неупорядоченных пар различных элементов из V, называемое множеством ребер графа G.

Простейшими графами являются *неориентированный путь* $P_n = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\}$, и *неориентированный цикл* $C_n = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)\}$. Несложное преобразование графа P_n дает нам *граф-гусеницу* $T_n = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 5), \dots, (n-1, n)\}$.

Подграфом графа G называется любой граф, множество вершин которого является подмножеством вершин графа G, а множество ребер является подмножеством множества ребер графа G. Остовной подграф графа G — подграф, содержащий все вершины графа G.

Граф называется *связным*, если для любых двух его вершин существует соединяющий их путь. Компонентой графа G называется максимальный связный подграф графа G.

Дерево — связный граф, не содержащий циклов. *Корневое дерево* — дерево, в котором выбрана одна вершина, называемая *корнем. Корневое остовное дерево* графа G — остовной подграф графа G, являющийся корневым деревом.

Лес — граф, каждая компонента которого является деревом. *Корневой остовной лес* графа G — остовной подграф графа G, все компоненты которого являются корневыми деревьями.

Ориентированный граф (*орграф*) Γ — пара $\langle V, E\rangle$, где $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ — множество, называемое множеством вершин графа G, а $E \subset \{\langle i, j\rangle \mid i, j \in V,\ i \neq j\}$ — некоторое подмножество множества упорядоченных пар различных элементов из V, называемое множеством дуг орграфа Γ. Другими словами, ориентированный граф — это граф, ребрам которого присвоено направление.

Простейшими орграфами являются *ориентированный путь* $\overrightarrow{P_n} = \langle V, E\rangle$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\langle n, n-1\rangle, \langle n-1, n-2\rangle, \dots, \langle 2, 1\rangle\}$ и *ориентированный цикл* $\overrightarrow{C_n} = \langle V, E\rangle$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\langle n, n-1\rangle, \langle n-1, n-2\rangle, \dots, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, n\rangle\}$. Простейшее преобразование ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$ дает нам *ориентированный граф-гусеницу* $\overrightarrow{T_n} = \langle V, E\rangle$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\langle n, n-1\rangle, \langle n-1, n-2\rangle, \dots, \langle 5, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$.

Подорграфом орграфа Γ называется любой орграф, множество вершин которого является подмножеством вершин орграфа Γ, а множество дуг является подмножеством множества дуг орграфа Γ. Остовной подорграф графа Γ — подорграф, содержащий все вершины орграфа Γ.

Орграф называется *слабо связным*, если соответствующий неориентированный граф связен. *Слабой компонентой* орграфа называется любой его максимальный слабосвязный подграф.

Сходящееся дерево — слабосвязный орграф, в котором одна вершина, называемая *корнем*, имеет нулевое значение для исходящей степени, а оставшиеся вершины имеют для исходящей степени значение 1.

Сходящийся лес орграфа Γ — остовной подорграф орграфа Γ, все слабые компоненты которого являются сходящимися деревьями. Говорят, что сходящийся лес *сходится к корням* его сходящихся деревьев.

Числами Фибоначчи называются элементы рекуррентно задаваемой последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, в то время как $u_1 = u_2 = 1$. Числа Фибоначчи обладают рядом интересных свойств, которые можно найти, например, в [1]. В частности, они удовлетворяют многочисленным тождествам, некоторые из которых будут использованы в нашей работе:

(i) $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1$;
(ii) $u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$;
(iii) $u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$.

3. Перечисление остовных лесов, связанных с квазиметрикой среднего времени первого прохода. Пусть Γ — взвешенный орграф без петель, вершины которого равны $1, 2, \ldots, n$, а веса дуг равны вероятностям перехода некоторой однородной эргодической цепи Маркова. *Среднее время первого прохода* из состояния i в состояние j в данной цепи Маркова может быть представлено как

$$m_{ij} = q_j^{-1} \cdot \begin{cases} f_{ij}, & \text{если } i \neq j, \\ q, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

где f_{ij} — суммарный вес входящих лесов орграфа Γ, состоящих из двух деревьев, и имеющих одно дерево, содержащее i, а другое дерево, сходящееся к j, q_j — суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к j в Γ, а

$$q = \sum_{k=1}^{n} q_k$$

(см. [2, 4, 7, 10–12]).

Таким образом, для построения матрицы среднего времени первого прохода нам нужна информация о количестве корневых (сходящихся) остовных деревьев и корневых (сходящихся) остовных 2-деревьевых лесов ориентированных и неориентированных графов. В этом разделе представлены доказательства полученных нами результатов для неориентированных и ориентированных путей и графов-гусениц.

Теорема 1. *Для числа корневых остовных деревьев имеют место следующие утверждения*:

(i) *число остовных корневых сходящихся деревьев ориентированного пути* $\overrightarrow{P_n}$, $n \geqslant 2$, *равно* 1;
(ii) *число остовных корневых сходящихся деревьев ориентированного графа-гусеницы* $\overrightarrow{T_n}$, $n \geqslant 4$, *равно* 1;
(iii) *число остовных корневых деревьев неориентированного пути* P_n, $n \geqslant 2$, *равно* n;
(iv) *число остовных корневых сходящихся деревьев неориентированного графа-гусеницы* T_n, $n \geqslant 4$, *равно* n.

Доказательство. Для ориентированного графа-гусеницы $\overrightarrow{T_n}$ существует ровно одно остовное корневое дерево: выбирая в качестве корня вершину 1, получаем остовное дерево, сходящееся к 1, которое совпадает с самим графом $\overrightarrow{T_n}$; выбирая в качестве корня любую вершину $i \neq 1$, убеждаемся, что в графе $\overrightarrow{T_n}$ не существует остовного дерева, сходящегося к i.

Рассуждения для ориентированного пути совершенно аналогичны.

Для неориентированного графа-гусеницы T_n существует ровно одно остовное дерево с фиксированным корнем i: оно совпадает с T_n. Выбирая вершину i из n вершин графа T_n, получаем n остовных корневых деревьев графа T_n.

Рассуждения для неориентированного пути совершенно аналогичны. $\square$

Замечание. Для ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$ существует n остовных деревьев. Для неориентированного цикла C_n существует n^2 остовных деревьев [3].

Теорема 2. *Для числа 2-деревьевых остовных лесов имеют место следующие утверждения:*

(i) *число остовных 2-деревьевых сходящихся лесов ориентированного пути* $\overrightarrow{P_n}$, $n \geqslant 2$, *равно* $n-1$;

(ii) *число остовных 2-деревьевых сходящихся лесов ориентированного графа-гусеницы* $\overrightarrow{T_n}$, $n \geqslant 4$, *равно* $n-1$;

(iii) *число остовных 2-деревьевых корневых лесов неориентированного пути* P_n, $n \geqslant 2$, *равно* $n(n^2-1)/6$;

(iv) *число остовных 2-деревьевых корневых лесов неориентированного графа-гусеницы* T_n, $n \geqslant 4$, *равно* $n(n^2-7)/6+3$.

Доказательство. Для подсчета остовных 2-деревьевых сходящихся лесов орграфа $\overrightarrow{T_n}$ рассмотрим две возможности. Сначала предположим, что одно из двух деревьев нашего леса сходится к вершине 1, а другое — к произвольной вершине $j \neq 1$. Нетрудно убедиться, что в этом случае два дерева, образующие лес, определены однозначно; искомый 2-деревьевый сходящийся лес получается уничтожением дуги $\langle j, j-1\rangle$. При этом $n-1$ возможный выбор j обеспечивает $n-1$ лес. Предположив, что ни одно из двух деревьев 2-деревьевого леса не сходится к 1, т.е. пытаясь найти два дерева с корнями $i \neq 1$, $j \neq 1$, убеждаемся, что такая ситуация невозможна.

Рассуждения для ориентированного пути совершенно аналогичны.

Для подсчета остовных 2-деревьевых корневых лесов графа T_n выберем две вершины i, j в качестве корней соответствующих деревьев. Заметим, что при фиксированных i, j, $4 \leqslant i < j \leqslant n$, получаем ровно $j-i$ остовных 2-деревьевых корневых лесов графа T_n. Каждый из этих лесов может быть получен уничтожением одного из $j-i$ ребер $(i, i+1)$, $(i+1, i+2)$, …, $(j-1, j)$ графа T_n.

Так, существует ровно 1 остовной 2-деревьевый лес, в котором деревья имеют корни 4 и 5: одно дерево представляет собой граф-гусеницу на 4 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4, второе — путь на $n-4$ вершинах $5, 6, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем 5. Существует ровно 2 остовных 2-деревьевых леса, в которых деревья имеют корни 4 и 6: в первом случае одно дерево представляет граф-гусеницу на 4 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4, второе — путь на $n-4$ вершинах $5, 6, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем 6; во втором случае получаем граф-гусеницу на 5 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4 и путь на $n-5$ вершинах $6, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем 6. Существует ровно 3 остовных 2-деревьевых леса, в которых деревья имеют корни 4 и 7: в первом случае одно дерево представляет собой граф-гусеницу на 4 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4, второе — путь на $n-4$ вершине $5, 6, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем 7; во втором случае получаем граф-гусеницу на 5 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4 и путь на $n-5$ вершинах $6, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем 7; в третьем случае получаем граф-гусеницу на 6 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4 и путь на $n-6$ вершинах $7, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем 7. Рассуждения легко продолжить, рассмотрев любую пару вершин i, j, $4 \leqslant i < j \leqslant n$. Существует ровно $j-i$ остовных 2-деревьевых лесов, в которых деревья имеют корни i и j: в первом случае одно дерево представляет собой граф-гусеницу на i вершинах с выделенной вершиной-корнем i, в то время как второе дерево является путем на вершинах $i+1, i+2, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем j; во втором случае получаем граф-гусеницу на $i+1$ вершине с выделенной вершиной-корнем i и путь на вершинах $i+2, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем j; …; в последнем случае получаем граф-гусеницу на $j-1$ вершине с выделенной вершиной-корнем i и путь на вершинах $j, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем j.

Таким образом, фиксируя вершину $i = 4$ и меняя вершину j от 5 до n, получим $1+2+\ldots+(n-4)$ остовных 2-деревьевых корневых лесов; фиксируя вершину $i = 5$ и меняя вершину j от 6 до n, получим $1+2+\ldots+(n-5)$ остовных 2-деревьевых корневых лесов; фиксируя вершину $i = 6$ и меняя вершину j от 7 до n, получим $1+2+\ldots+(n-6)$ остовных 2-деревьевых корневых лесов; …; наконец, фиксируя вершину $i = n-1$ и вершину $j = n$, получим ровно один остовной 2-деревьевый корневой лес. Непосредственный подсчет позволяет получить для числа 2-деревьевых корневых лесов графа T_n красивую формулу $1\cdot(n-4)+2\cdot(n-5)+3\cdot(n-6)+\ldots+(n-4)\cdot 1$:

$$\begin{array}{l} 1+2+\ldots+(n-6)+(n-5)+(n-4)+ \\ 1+2+\ldots+(n-6)+(n-5)+ \\ 1+2+\ldots+(n-6)+ \\ \qquad\qquad\ldots \\ 1 \\ \hline =1\cdot(n-4)+2\cdot(n-5)+3\cdot(n-6)+\ldots+(n-4)\cdot 1. \end{array}$$

Для получения явной формулы произведем формальное суммирование. При $k=n-3$ получим:

$$\sum_{i=1}^{k} i(k-i)=\sum_{i=1}^{k}(ik-i^2)=k\sum_{i=1}^{k} i-\sum_{i=1}^{k} i^2=$$
$$=\frac{k^2(k+1)}{2}-\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{k(k+1)(k-1)}{6}=\frac{k(k^2-1)}{6}.$$

Другими словами, вклад рассмотренных случаев в общий подсчет равен

$$\frac{(n-3)((n-3)^2-1)}{6}.$$

Фиксируя вершину $i=1$ и меняя вершину j от 4 до n, получим

$$1+2+\ldots+(n-3)=\frac{(n-3)(n-2)}{2}$$

остовных 2-деревьевых корневых лесов. Фиксируя вершину $i=2$ и меняя вершину j от 1 до n, исключая 3, получим

$$1+2+\ldots+(n-2)=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

остовных 2-деревьевых корневых лесов. То же количество получится при фиксации вершины $i=3$ и последовательном рассмотрении в качестве вершины j всех вершин от 1 до n, исключая 2.

Наконец, фиксируя в качестве корней вершины 2, 3, получим ровно две возможности, уничтожая либо ребро $(1,2)$, либо ребро $(1,3)$; в каждом из рассмотренных случаев остовной 2-деревьевый лес состоит из изолированной вершины-корня (2 и 3, соответственно), и простого пути, содержащего все остальные верщины графа T_n.

Общий подсчет дает теперь величину

$$\frac{(n-3)((n-3)^2-1)}{6}+\frac{(n-3)(n-2)}{2}+2\cdot\frac{(n-2)(n-1)}{2}+2=$$
$$=\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6}+(n-2)(n-1)+2=\frac{(n-2)(n-1)(n+3)}{6}+2=\frac{n^3-7n+18}{6}.$$

Рассуждения для неориентированного пути совершенно аналогичны первой части подсчета, проведенного при фиксированных i, j, $1\leqslant i<j\leqslant n$, что дает величину $n(n^2-1)/6$. □

Замечание. Для ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$ существует $n(n-1)/2$ остовных 2-деревьевых сходящихся лесов. Для неориентированного цикла C_n существует $n^2(n^2-1)/12$ остовных 2-деревьевых корневых лесов (см. [3]).

4. Перечисление лесов, связанных с матрицей относительной лесной доступности. Матрица относительной лесной доступности графа G (орграфа Γ) на n вершинах определяется по закону

$$\frac{((f_{ij}))}{f},$$

где f_{ij} — количество остовных корневых (сходящихся) лесов графа G (орграфа Γ), в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j, а f — общее количество остовных корневых (сходящихся) лесов графа G (орграфа Γ) [3, 5, 6, 8]. В этом разделе приведены доказательства теорем, дающих формулы для числа соответствующих остовных конструкций в ориентированных и неориентированных путях и графах-гусеницах.

Теорема 3. *Для числа остовных лесов имеют место следующие утверждения*:

(i) *число остовных сходящихся лесов ориентированного пути* $\overrightarrow{P_n}$, $n \geqslant 2$, *равно* 2^{n-1};

(ii) *число остовных сходящихся лесов ориентированного графа-гусеницы* $\overrightarrow{T_n}$, $n \geqslant 4$, *равно* 2^{n-1};

(iii) *число остовных корневых лесов неориентированного пути* P_n, $n \geqslant 2$, *равно числу Фибоначчи* u_{2n};

(iv) *число остовных корневых лесов неориентированного графа-гусеницы* T_n, $n \geqslant 4$, *равно* $4u_{2n-3}$.

Доказательство. Для ориентированного графа-гусеницы $\overrightarrow{T_n}$, $n \geqslant 4$, при получении остовного корневого сходящегося леса достаточно выбрать и уничтожить любое подмножество множества $\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 5,4\rangle, \ldots, \langle n, n-1\rangle\}$ всех $n-1$ дуг данного орграфа. Корни сходящихся деревьев, представляющих собой подорграфы в полученном орграфе, будут определены однозначно. Поскольку число подмножеств множества из $n-1$ элемента равно 2^{n-1}, получим ровно 2^{n-1} остовных корневых сходящихся лесов ориентированного графа-гусеницы $\overrightarrow{T_n}$, $n \geqslant 4$.

Для ориентированного пути рассуждения совеременно аналогичны.

Для неориентированного графа-гусеницы T_n, $n \geqslant 4$, при получении остовного корневого леса воспользуемся соображениями индукции и представленными выше свойствами чисел Фибоначчи.

Для $n = 4$ имеем ровно 20 (т.е. $4u_5 = 4u_{2\cdot 4-3}$) корневых лесов графа T_n: 4 леса содержат по одному дереву (выбираем только корень из четырех имеющихся вершин 1, 2, 3, 4); 9 лесов содержат по два дерева (одно из которых — изолированная вершина 2, 3 или 4, а другое — путь на остальных трех вершинах; выбор корня дает три возможности для каждого случая изолированной вершины, всего 9 вариантов); 6 лесов содержат по 3 дерева (две изолированные вершины и путь на остальных двух вершинах; сохранение одного из трех ребер даст три варианта, каждый из которых будет дублирован тем или иным выбором корня в пути на двух вершинах); наконец, один лес содержит 4 дерева, каждое из которых представляет собой изолированную вершину.

Для $n = 5$ имеем ровно 52 (т.е. $4u_7 = 4u_{2\cdot 5-3}$) корневых леса графа T_n. Они получаются следующим образом. Изолированная вершина-корень 5 «расширяет» предыдущий случай $n = 4$, давая $4u_5 = 20$ возможностей. Вершина 5, связанная с корнем 4, еще раз «расширяет» предыдущий случай $n = 4$, давая $4u_5 = 20$ возможностей. Наконец, вершина 5, рассматриваемая как корень и связанная ребром с вершиной 4, дает еще 12 случаев: уничтожив ребро $(1, 4)$, получаем возможность построить 8 лесов, модифицируя полученный путь на вершинах 2, 1, 3 (три леса, состоящие из одного дерева, 4 леса, состоящие из двух деревьев и 1 лес, состоящий из трех деревьев); сохраняя ребро $(1, 4)$, получим 4 возможных леса, сохраняя или уничтожая ребра $(1, 2)$ и $(3, 1)$ (оба сохранены, оба уничтожены, одно их двух сохранено). Замечая, что $8 = 4 \cdot u_3$, в то время как $4 = 4 \cdot u_1$, получаем для $n = 5$ величину $4(u_5 + u_5 + u_3 + u_1)$. Пользуясь свойствами чисел Фибоначчи, можем утверждать, что $u_5 + u_3 + u_1 = u_6$ и, следовательно,

$$4(u_5 + u_5 + u_3 + u_1) = 4(u_5 + u_6) = 4u_7 = 4_{2\cdot 5-3}.$$

Для доказательства общего случая заметим, что

$$u_{2n} = u_{2n-1} + u_{2n-3} + \ldots + u_3 + u_1.$$

Воспользуемся этой формулой. Получая граф T_{n+1} добавлением к T_n новой вершины $n+1$, мы должны рассмотреть следующие возможности.

Если $n+1$ — изолированная вершина (и, следовательно, дерево с корнем $n+1$), то получаем ровно столько остовных лесов, сколько лесов было найдено для T_n, другими словами, $4u_{2n-3}$.

Если вершина $n+1$ связана с вершиной n ребром и не является корнем, то вновь получаем ровно столько остовных лесов, сколько лесов было найдено для T_n, другими словами, $4u_{2n-3}$.

Если $n+1$ связана с n ребром и является корнем, то получаем следующие случаи.

Дерево (путь) на вершинах $n+1$, n с корнем $n+1$ и любой корневой лес на $n-1$ вершине $n-1,\ldots,2,1$ (т.е. любой корневой лес графа T_{n-1}), всего $4u_{2(n-1)-3}$ возможностей. Дерево (путь) на вершинах $n+1$, n, $n-1$ с корнем $n+1$ и любой корневой лес на $n-2$ вершинах $n-2,\ldots,2,1$ (т.е. любой корневой лес графа T_{n-2}), всего $4u_{2(n-2)-3}$ возможностей. Дерево (путь) на вершинах $n+1$, n, $n-1$, $n-2$ с корнем $n+1$ и любой корневой лес на $n-3$ вершинах $n-3,\ldots,2,1$ (т.е. любой корневой лес графа T_{n-3}), всего $4u_{2(n-3)-3}$ возможностей … Дерево (путь) на вершинах $n+1,n,n-1,\ldots,5$ с корнем $n+1$ и любой корневой лес на 4 вершинах 1, 2, 3, 4 (т.е. любой корневой лес графа T_4), всего $4u_{2\cdot 4-3}=4u_5$ возможностей. Дерево (путь) на вершинах $n+1,n,n-1,\ldots,5,4$ с корнем $n+1$ и любой корневой лес на вершинах 2, 1, 3 (т.е. любой корневой лес графа P_3), всего $8=4u_3$ возможностей. Наконец, дерево на вершинах $n+1,n,n-1,\ldots,5,4,1$ с корнем $n+1$, к которому, возможно, «добавлены» вершины 2 и 3 (обе, одна или не одной; в первом случае получаем лес, состоящий из одного дерева, во втором и третьем — лес из двух деревьев, одно из которых представляет собой изолированную вершину, в последнем — лес из трех деревьев, два из которых представляют собой изолированные вершины 2 и 3), всего $4=4u_1$ возможности.

Данный пересчет дает число $4u_{2(n+1)-3}$ корневых остовных лесов графа T_{n+1}:

$$4u_{2n-3}+4u_{2n-3}+4u_{2(n-1)-3}+\ldots+4u_5+4u_3+4u_1=4(u_{2n-3}+u_{2n-2})=4u_{2n-1}=4u_{2(n+1)-3}.$$

Для неориентированного пути рассуждения аналогичны. Учитывая, что для $n=1$ имеем ровно один (т.е. $u_2=1$) корневой лес графа P_n, в то время как для $n=2$ имеем ровно три (т.е. $u_4=3$) корневых леса графа P_n, построения индукционного шага сводятся к нахождению суммы

$$2u_{2n}+u_{2(n-1)}+\ldots+u_4+u_2+1=u_{2(n+1)}.$$

Теорема полностью доказана. □

Замечание. Для ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$ существует 2^n-1 остовных сходящихся лесов. Для неориентированного цикла C_n существует $u_{2n+1}+u_{2n+3}-2$ остовных корневых лесов [3, 5].

Теорема 4. *Для числа остовных лесов имеют место следующие утверждения*:

(i) *число f_{ij} остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, $n\geqslant 2$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j, равно*:

$$f_{ii}=\begin{cases}2^{n-1}, & i=1,\\ 2^{n-2}, & 2\leqslant i\leqslant n;\end{cases}\qquad f_{ij}=\begin{cases}2^{n-i}, & j=1,\\ 2^{n-i+j-2}, & 2\leqslant j<i\leqslant n,\\ 0, & 1\leqslant i<j\leqslant n;\end{cases}$$

(ii) *число f_{ij} остовных сходящихся лесов ориентированного графа-гусеницы $\overrightarrow{T_n}$, $n\geqslant 4$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j, равно*:

$$f_{ii}=\begin{cases}2^{n-1}, & i=1,\\ 2^{n-2}, & 2\leqslant i\leqslant n;\end{cases}\qquad f_{ij}=\begin{cases}2^{n-2}, & j=1,\ i=2,3,\\ 2^{n-i+2}, & j=1,\ i=4,\ldots,n,\\ 0, & j=2,3,\ i=1,4,\ldots,n,\\ 2^{n-i+j-2}, & 4\leqslant j<i\leqslant n,\\ 0, & 1\leqslant i<j\leqslant n;\end{cases}$$

(iii) *число f_{ij} остовных корневых лесов неориентированного пути P_n, $n\geqslant 2$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j, равно $u_{2\min(i,j)-1}\cdot u_{2(n+1-\max(i,j))-1}$, $i,j=1,\ldots,n$;*

(iv) *число f_{ij} остовных корневых лесов неориентированного графа-гусеницы T_n, $n\geqslant 4$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j, равно*:

$$f_{ii}=\begin{cases}4u_{2n-5}, & i=1,\\ u_{2n-1}-u_{2n-6}, & i=2,3,\\ 4u_{2k-4}\cdot u_{2(n-k)+1}, & 4\leqslant i\leqslant n;\end{cases}\qquad f_{ij}=4u_{2\max(i,j)-2}\cdot u_{2(n-\min(i,j))+1},\quad 4\leqslant i\neq j\leqslant n.$$

Доказательство. Рассмотрим доказательство теоремы для ориентированного графа-гусеницы $\overrightarrow{T_n}$, $n \geqslant 4$.

Рассматривая величину f_{11}, нетрудно убедиться в том, что в любом сходящемся остовном лесе ориентированного графа-гусеницы вершина 1 всегда принадлежит дереву, сходящемуся к вершине 1. Таким образом, f_{11} равно общему числу остовных сходящихся лесов орграфа $\overrightarrow{T_n}$, т.е. 2^{n-1}.

Рассмотрим величину f_{ii}, $i \neq 1$. Чтобы получить дерево, сходящееся к i, нужно обязательно отбросить дугу $\langle i, i-1\rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного графа-гусеницы, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к i, необходимо, после уничтожения дуги $\langle i, i-1\rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \dots, \langle i-1, i-2\rangle, \langle i+1, i\rangle, \dots, \langle n, n-1\rangle\}$ оставшихся $n-2$ дуг ориентированного графа $\overrightarrow{T_n}$. Это можно сделать 2^{n-2} способами.

Рассмотрим величину f_{i1}, $i \neq 1$. Если $i = 2$, то для получения дерева, содержащего 2 и сходящегося к 1, нужно сохранить дугу $\langle 2,1\rangle$ между 2 и 1. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного графа-гусеницы, в которых вершина 2 принадлежит дереву, сходящемуся к 1, необходимо, сохранив дугу $\langle 2,1\rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества оставшихся $n-2$ дуг ориентированного графа-гусеницы $\overrightarrow{T_n}$; это можно сделать 2^{n-2} способами. Те же рассуждения имеют место, если $i = 3$. Чтобы получить дерево, содержащее i, $4 \leqslant i \leqslant n$, и сходящееся к 1, нужно сохранить все дуги $\langle 4,1\rangle, \langle 5,4\rangle, \dots, \langle i, i-1\rangle$ между 1 и i. Остальные $n-i+2$ дуг можно отбрасывать или оставлять произвольным образом.

Это можно сделать 2^{n-i+2} способами.

Рассмотрим величину f_{ij}, $4 \leqslant j < i \leqslant n$. Чтобы получить дерево, содержащее i и сходящееся к j, нужно сохранить все дуги $\langle j+1, j\rangle, \langle j+2, j+1\rangle, \dots, \langle i, i-1\rangle$, между j и i. Кроме того, выбор корня j требует уничтожения дуги $\langle j, j-1\rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного пути, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к j, $4 \leqslant j < i \leqslant n$, необходимо, сохранив дуги $\langle j+1, j\rangle, \langle j+2, j+1\rangle, \dots, \langle i, i-1\rangle$ и уничтожив дугу $\langle j, j-1\rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества оставшихся $n-(i-j)-2$ дуг ориентированного графа-гусеницы $\overrightarrow{T_n}$. Это можно сделать $2^{n-(i-j)-2}$ способами.

Рассматривая величину f_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, нетрудно убедиться в том, что она равна нулю: деревьев, содержащих i и сходящихся к j, в данном случае не существует. Аналогичным образом не существует деревьев, содержащих $i = 1, 3, 4, \dots, n$ и сходящихся к 2, как и деревьев, содержащих $i = 1, 2, 4, \dots, n$ и сходящихся к 3.

Рассуждения для ориентированного пути абсолютно аналогичны, если проводить их с учетом более простой структуры рассматриваемого графа.

Рассмотрим доказательство теоремы для неориентированного графа-гусеницы T_n, $n \geqslant 4$.

Рассмотрим величину f_{11}. Чтобы получить дерево, содержащее 1 и имеющее корень 1, ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Проведем рассуждения индукцией по числу вершин n нашего графа.

Для $n = 4$ имеем ровно 8 (т.е. $4u_3 = 4u_{2\cdot 4-5}$) корневых лесов графа T_n, один из корней которого равен 1: рассматривая путь на 3 вершинах 2, 1, 3, получим из него 4 корневых леса, одним из корней которого является 1 (один, содержащий одно дерево, два — содержащих два дерева и один — содержащий три дерева); добавим вершину 4; изолированная вершина-корень 4 «расширяет» предыдущий случай, давая 4 возможности; вершина 4, связанная с корнем 1, еще раз «расширяет» предыдущий случай, давая 4 возможности.

Для $n = 5$ имеем ровно 20 (т.е. $4u_5 = 4u_{2\cdot 5-5}$) корневых лесов графа T_n, один из корней которого равен 1. Они получаются так. Изолированная вершина-корень 5 «расширяет» предыдущий случай $n = 4$, давая $4u_3 = 8$ возможностей. Вершина 5, связанная с вершиной 4 и не являющаяся корнем, еще раз «расширяет» предыдущий случай $n = 4$, давая $4u_3 = 8$ возможностей. Наконец, вершина 5, рассматриваемая как корень и связанная ребром с вершиной 4, дает еще 4 случая:

уничтожив ребро $(1, 4)$, получаем возможность построить 4 леса, одним из корней которого является 1, так, как описано выше.

Для доказательства общего случая заметим, что

$$u_{2n} = u_{2n-1} + u_{2n-3} + \ldots + u_3 + u_1.$$

Воспользуемся этой формулой. Получая граф T_{n+1} добавлением к T_n новой вершины $n + 1$, должны рассмотреть следующие возможности.

Если $n + 1$ — изолированная вершина (и, следовательно, дерево с корнем $n + 1$), то получаем ровно столько остовных лесов, сколько лесов было найдено для T_n, другими словами, $4u_{2n-5}$.

Если вершина $n + 1$ связана с вершиной n ребром и не является корнем, то вновь получаем ровно столько остовных лесов, сколько лесов было найдено для T_n, другими словами, $4u_{2n-5}$.

Если вершина $n+1$ связана с вершиной n ребром и является корнем, то, отбросив ребро $(i, i+1)$, $4 \leqslant i \leqslant n - 1$, получим дерево на i вершинах с корнем 1 слева, которое можно превращать в лес любым из u_{2i-5} способов, и путь на $n - i$ вершинах справа с корнем $n + 1$. Если слева уберем ребро $(1, 4)$, получим слева простой путь на 3 вершинах, который даст нам $4 = 4u_1$ возможности. Пробегая по всем ребрам $(n - 1, n), \ldots, (4, 5), (1, 4)$, получим

$$4(u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2(n-1)-5})$$

возможностей.

Суммируя, получим следующий результат:

$$\begin{aligned}4(u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2(n-1)-5}) + 4u_{2n-5} + 4u_{2n-5} =\\ = 4(u_1 + u_3 + \ldots + u_5 + u_{2n-5}) + 4u_{2n-5} = 4(u_{2n-4} + u_{2n-5}) = 4u_{2n-3} = 4u_{2(n+1)-5}.\end{aligned}$$

Рассмотрим величину f_{22}. Чтобы получить дерево, содержащее 2 и имеющее корень 2, ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Проведем рассуждения индукцией по числу вершин n нашего графа.

Для $n = 4$ имеем ровно 12 (т.е. $u_7 - u_2$) корневых лесов графа T_n, один из корней которого равен 2: рассматривая путь на 3 вершинах 2, 1, 3, получим из него $5 = u_5$ корневых лесов, один из корней которых равен 2 (один лес, представляющий собой дерево, три леса из двух деревьев и один лес из трех деревьев); добавим вершину 4; изолированная вершина-корень 4 «расширяет» предыдущий случай, давая $5 = u_5$ возможностей; вершина 4, связанная с вершиной 1 и не являющаяся корнем, вновь «расширяет» предыдущий случай, давая $5 = u_5$ возможностей; наконец, вершина-корень 4, связанная с вершиной 1, дает $2 = u_2$ возможности (один лес, содержащий два дерева, и один — содержащий три дерева).

Для $n = 5$ имеем ровно 31 (т.е. $u_9 - u_4$) корневых леса графа T_n, один из корней которого равен 2. Они получаются так. Изолированная вершина-корень 5 дает $12 = u_7 - u_2$ возможностей. Вершина 5, связанная с вершиной 4 и не являющаяся корнем, вновь дает $12 = u_7 - u_2$ возможностей; наконец, вершина-корень 5, связанная с вершиной 4, дает $5 = u_5$ возможностей, если уничтожено ребро $(1, 4)$, и $2 = u_2$ возможности, если ребро $(1, 4)$ сохранено.

Для доказательства общего случая получим граф T_{n+1} добавлением к T_n новой вершины $n+1$, рассмотрев следующие возможности.

Если $n + 1$ — изолированная вершина (и, следовательно, дерево с корнем $n + 1$), то получаем ровно столько остовных лесов, сколько их существует для T_n, другими словами, $u_{2n-1} - u_{2n-6}$.

Если вершина $n + 1$ связана с вершиной n ребром и не является корнем, то, отбросив ребро $(i, i + 1)$, $4 \leqslant i \leqslant n - 1$, получим дерево на i вершинах слева, которое можно превращать в лес, содержащий корень 2, любым из $u_{2i-1} - u_{2i-6}$ способов, и путь на $n - i$ вершинах справа с корнем $n + 1$. Если уберем ребро $(1, 4)$, то получим слева простой путь на 3 вершинах, который даст нам $5 = u_5$ возможностей. Если ребро $(1, 4)$ сохранено, то слева получим $2 = u_3$ возможностей, уничтожив ребро $(1, 2)$ и произвольным образом обращаясь с ребром $(1, 3)$. Пробегая по всем ребрам $(n - 1, n), \ldots, (4, 5), (1, 4)$, получим

$$u_3 + u_5 + (u_7 - u_2) + (u_9 - u_4) + \ldots + (u_{2(n-1)-1} - u_{2(n-1)-6})$$

возможностей.

Суммируя, получим следующий результат:

$$u_3 + u_5 + (u_7 - u_2) + (u_9 - u_4) + \ldots + (u_{2(n-1)-1} - u_{2(n-1)-6}) + 2(u_{2n-1} - u_{2n-6}) =$$
$$= (u_3 + \ldots + u_{2n-1}) - (u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n-6}) + u_{2n-1} - u_{2n-6} =$$
$$= u_{2n} - 1 - (u_{2n-5} - 1) + u_{2n-1} - u_{2n-6} = u_{2n} + u_{2n-1} - (u_{2n-5} + u_{2n-6}) =$$
$$= u_{2n+1} - u_{2n-4} = u_{2(n+1)-1} - u_{2(n+1)-6}.$$

Для величины f_{33} расссуждения абсолютно аналогичны.

Рассмотрим величину f_{nn}. Чтобы получить дерево, содержащее n и имеющее корень n, ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Проведем рассуждения индукцией по числу вершин n нашего графа.

Для $n = 4$ имеем ровно 12 (т.е. $4u_4 = 4u_{2\cdot 4-4}$) корневых лесов графа T_n, один из корней которого равен n: рассматривая путь на 3 вершинах 2, 1, 3, получим из него $8 = u_6 = u_{2\cdot 3}$ корневых лесов; добавим вершину 4; изолированная вершина-корень 4 «расширяет» предыдущий случай, давая 8 возможностей; вершина-корень 4, связанная с вершиной 1, дает 4 возможности (один лес, содержащий одно дерево, два — содержащих два дерева и один — содержащий три дерева).

Для $n = 5$ имеем ровно 32 (т.е. $4u_6 = 4u_{2\cdot 5-4}$) корневых леса графа T_n, один из корней которого равен n. Они получаются так. Изолированная вершина-корень 5 дает $20 = 4u_5 = 4u_{2\cdot 4-3}$ возможностей. Вершина-корень 5, связанная с вершиной 4, не являющейся корнем, дает $8 = 4u_3$ возможностей, если уничтожено ребро $(1, 4)$, и $4 = 4u_1$ возможности, если ребро $(1, 4)$ сохранено.

Для доказательства общего случая заметим, что

$$u_{2n} = u_{2n-1} + u_{2n-3} + \ldots + u_3 + u_1.$$

Воспользуемся этой формулой. Получая граф T_{n+1} добавлением к T_n новой вершины $n + 1$, должны рассмотреть следующие возможности.

Если $n + 1$ — изолированная вершина (и, следовательно, дерево с корнем $n + 1$), то получаем ровно столько остовных лесов, сколько их существует для T_n, другими словами, $4u_{2n-3}$.

Если вершина-корень $n + 1$ связана с вершиной n ребром, то, отбросив ребро $(i, i + 1)$, $4 \leqslant i \leqslant n - 1$, получим дерево на i вершинах слева, которое можно превращать в лес любым из u_{2i-3} способов, и путь на $n - i$ вершинах справа с корнем $n + 1$. Если уберем ребро $(1, 4)$, то получим слева простой путь на 3 вершинах, который дает $8 = 4u_3$ возможностей. Если ребро $(1, 4)$ сохранено, то слева получим $4 = 4u_1$ возможностей, произвольным образом обращаясь с ребрами $(2, 1)$ и $(3, 1)$.

Пробегая по всем ребрам $(n, n - 1), \ldots, (4, 5), (1, 4)$, получим

$$4(u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2(n-1)-3})$$

возможностей. Суммируя, получим следующий результат:

$$4(u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2(n-1)-3}) + 4u_{2n-3} =$$
$$= 4(u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2(n-1)-3} + u_{2n-3}) = 4u_{2n-2} = 4u_{2(n+1)-4}.$$

Рассмотрим величину f_{kk}, $4 \leqslant k \leqslant n - 1$. Чтобы получить дерево, содержащее k и имеющее корень k, ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Проведем рассуждения индукцией по числу вершин n нашего графа.

Для $n = 4$ такого k не существует.

Для $n = 5$ имеем $k = 4$. В этом случае имеем ровно 24 (т.е. $4u_4u_3$) корневых леса графа T_n, один из корней которого равен 4. Они получаются так. Изолированная вершина-корень 5 дает $12 = 4u_4$ возможностей. Вершина 5, связанная с вершиной 4 и не являющаяся корнем, также дает $12 = 4u_4$ возможностей.

Для доказательства общего случая рассмотрим граф T_n. В этом случае $k = 4, 5, \ldots, n - 1$. Зафиксировав $4 \leqslant k \leqslant n - 1$, рассмотрим следующие возможности.

Отбросив ребро $(k, k + 1)$, получим дерево на k вершинах слева, которое можно превращать в лес с корнем k любым из $4u_{2k-4}$ способов, и путь на $n - k$ вершинах справа, который можно первращать в лес любым из $u_{2(n-k)}$ способов. Сохранив ребро $(k, k + 1)$ и отбросив ребро

$(k+1,k+2)$, получим слева дерево на k вершинах, которое можно превращать в лес с корнем k любым из $4u_{2k-4}$ способов, с «дополнительным» ребром $(k,k+1)$, не влияющим на рассмотрение, и путь на $n-k-1$ вершинах справа, который можно превращать в лес любым из $u_{2(n-k-1)}$ способов. Сохранив ребра $(k,k+1)$, $(k+1,k+2)$ и отбросив ребро $(k+2,k+3)$, получим слева дерево на k вершинах, которое можно превращать в лес с корнем k любым из $4u_{2k-4}$ способов, с «дополнительными» ребрами $(k,k+1)$, $(k+1,k+2)$, не влияющими на рассмотрение, и путь на $n-k-2$ вершинах справа, который можно превращать в лес любым из $u_{2(n-k-2)}$ способов… Сохраняя ребра $(k,k+1),\dots,(n-2,n-1)$ и отбрасывая ребро $(n-1,n)$, получим слева дерево на k вершинах, которое можно превращать в лес с корнем k любым из $4u_{2k-4}$ способов, с «дополнительными» ребрами $(k,k+1),\dots,(n-2,n-1)$, не влияющими на рассмотрение, и путь на одной вершине справа, который можно превратить в лес ровно одним (формально, u_2) способом. Сохраняя все ребра $(k,k+1),\dots,(n-1,n)$, получим слева дерево на k вершинах, которое можно превращать в лес с корнем k любым из $4u_{2k-4}$ способов, с «дополнительными» ребрами $(k,k+1),\dots,(n-1,n)$, не влияющими на рассмотрение. Пробегая таким образом по всем ребрам $(n-1,n),\dots,(k,k+1)$, и учитывая, что числа «правых» и «левых» воозможностей независимы и, следовательно, перемножаются, получим в итоге

$$4u_{2k-4}(1+u_2+\ldots+u_{2(n-k-1)}+u_{2(n-k)}) = 4u_{2k-4}u_{2(n-k)+1}$$

возможностей.

Рассмотрим величину f_{ij}, $4 \leqslant i < j \leqslant n$. Чтобы получить дерево, содержащее i и имеющее корень j, нужно обязательно сохранить все $j-i$ ребер между j и i. Остальные ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом.

Посмотрим, какие возможности можем получить, отбрасывая те или иные ребра «справа» от вершины j.

Если справа от вершины j ничего не убираем, то в качестве искомого леса получаем дерево с корнем j — путь на вершинах $i,i+1,\dots,j,\dots,n$ с корнем j; единственная возможность, 1. Если справа уберем ребро $(n-1,n)$ и сохраним все ребра $(j,j+1)$, $(j+1,j+2)$,…, $(n-2,n-1)$, получим справа единственное дерево на одной вершине n с корнем n; единственная возможность, $1=u_2$. Если справа уберем ребро $(n-2,n-1)$ и сохраним все ребра $(j,j+1)$, $(j+1,j+2)$,…, $(n-2,n-1)$, получим справа две вершины $n-1$, n; на них можем построить любые остовные корневые леса, $3=u_{2\cdot 2}$ возможностей. Если, двигаясь по этому пути, уберем ребро $(j,j+1)$, то получим справа $n-j$ вершин $j+1,\dots,n$; на них можем построить любые остовные корневые леса, $u_{2(n-j)}$ возможностей. Таким образом, число «правых» преобразований равно $u_{2(n-j)+1}$:

$$1+u_2+u_4+\ldots+u_{2(n-j)} = u_{2(n-j)+1}.$$

Посмотрим, какие возможности можно получить, отбрасывая те или иные ребра «слева» от вершины i.

Если слева от вершины i ничего не убираем, то в качестве искомого леса получаем дерево с корнем j — граф на j вершинах $1,2,\dots,i,\dots,j$ с корнем j; единственная возможность, 1. Если уберем ребро $(i-1,i)$ и сохраним все ребра $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,1)$,…, $(i-2,i-1)$, то получим слева граф на $i-1$ вершине, на которых можно построить любые остовные корневые леса, $4u_{2(i-1)-3}$ возможностей. Если, двигаясь по указанному пути, уберем ребро $(4,5)$ и сохраним все ребра $(5,6),\dots,(i-1,i)$, получим слева граф на 4 вершинах, из которого можно строить любые корневые леса, всего $4u_5$ возможностей. Если уберем ребро $(1,4)$ и сохраним все ребра $(4,5),\dots,(i-1,i)$, получим слева простой путь на 3 вершинах, на которых можем построить любые остовные корневые леса, всего $u_{2\cdot 3}=4u_3$ возможностей. Если слева ребро $(1,4)$ сохранено, как и все ребра $(4,5),\dots,(i-1,i)$, то получим $4=4u_1$ возможностей, произвольным образом обращаясь с ребрами $(2,1)$ и $(3,1)$.

Таким образом, число «левых» преобразований равно $4u_{2(i-2)}$:

$$4(u_1+u_3+u_5+\ldots+u_{2(i-2)-3}+u_{2(i-1)-3}) = 4u_{2(i-1)-2} = u_{2(i-2)}.$$

Поскольку «правые» и «левые» операции осуществляются независимо друг от друга, то для получения общего числа остовных деревьев числа таких операций необходимо перемножить, что и даст искомый результат.

Для неориентированного пути рассуждения аналогичны.

Заметим, что аналогичная схема рассуждений позволяет нам получить все возможные значения для величины f_{ij} в случае неориентированного графа-гусеницы, не указанные в формулировке теоремы. Именно,

$$f_{12} = f_{13} = f_{21} = f_{31} = 2u_{2(n-3)+1}, \quad f_{14} = f_{41} = 4u_{2(n-4)+1},$$
$$f_{24} = f_{42} = f_{34} = f_{43} = 2u_{2(n-4)+1}.$$

Мы не рассматриваем доказательства этих утверждений лишь в целях сохранения компактности текста статьи. $\square$

Замечание. Для ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$ имеют место соотношения

$$f_{ij} = 2^{(j-i)-1}, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$
$$f_{ij} = 2^{n-(i-j)-1}, \quad 1 \leqslant j < i \leqslant n.$$

Для неориентированного цикла C_n имеют место соотношения

$$f_{ij} = u_{2|j-i|} + u_{2(n-|j-i|)}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

(см. [3, 5]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1978.
2. *Деза Е. И., Мханна Б.* О специальных свойствах некоторых квазиметрик// Чебышев. сб. — 2020. — *21*, № 1. — С. 145–164.
3. *Деза Е. И., Мханна Б.* Вопросы перечисления остовных лесов некоторых графов// Чебышев. сб. — 2021. — *22*, № 3. — С. 77–99.
4. *Chebotarev P.* A graph theoretic interpretation of the mean first passage times/ `arXiv: math/0701359 [math.PR]`.
5. *Chebotarev P.* Spanning forest and the Golden ratio// Discr. Appl. Math. — 2008. — *156*. — P. 813–821.
6. *Chebotarev P., Agaev R.* Forest matrices around the Laplacian matrix// Lin. Alg. Appl. — 2002. — *356*. — P. 253–274.
7. *Chebotarev P., Deza E.* Hitting time quasi-metric and its forest representation// Optim. Lett. — 2020. — *14*. — P. 291–307.
8. *Chebotarev P. Yu., Shamis E. V.* On proximity measures for graph vertices// Automat. Remote Control. — 1998. — *59*. — P. 1443–1459.
9. *Deza M., Deza E., Vidali J.* Cones of weighted and partial metrics// Proc. Int. Conf. on Algebra, 2010. — Hackensack, New Jersey: World Scientific, 2012. — P. 177–197.
10. *Kirkland S. J., Neumann M.* Group Inverses of M-Matrices and Their Applications. — CRC Press, 2012.
11. *Leighton T., Rivest R. L.* The Markov chain tree theorem. Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249. — Cambridge, Massachusetts: Laboratory of Computer Science, MIT, 1983.
12. *Meyer C. D., Jr.* The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains// SIAM Rev. — 1975. — *17*. — P. 443–464.

Деза Елена Ивановна
Московский педагогический государственный университет
E-mail: `elena.deza@gmail.com`