



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 104–114
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-104-114

УДК 514.172.45

О НЕСОСТАВНЫХ RR -МНОГОГРАННИКАХ ВТОРОГО ТИПА

© 2023 г. В. И. СУББОТИН

Аннотация. Рассмотрена задача существования одного класса замкнутых выпуклых многогранников в E^3 — так называемых несоставных RR -многогранников. Проверка существования заключается в нахождении уравнения, из которого следует не только существование многогранника, но и вычисляется угол ромбов ромбической вершины.

Ключевые слова: RR -многогранник второго типа, ромбическая вершина, звезда вершины, несоставной RR -многогранник.

ON NONCOMPOSITE RR -POLYHEDRA OF THE SECOND TYPE

© 2023 V. I. SUBBOTIN

ABSTRACT. The problem of the existence of one class of closed convex polyhedra in E^3 —the so-called noncomposite RR -polyhedra—is examined. The existence test consists of finding an equation which implies the existence of a polyhedron and allows one to find the angle of rhombuses at a rhombic vertex.

Keywords and phrases: RR -polyhedron of the second type, rhombic vertex, vertex star, noncomposite RR -polyhedron.

AMS Subject Classification: 52B15

1. Введение. Вопрос о существовании и перечислении классов многогранников с заданными комбинаторными или метрическими свойствами — один из важных вопросов классической и современной геометрии многогранников, (см. [1, 2, 9–15, 17–19]). Ответ на этот вопрос для каждого конкретного класса многогранников может быть двояким: либо класс многогранников является метрически определённым (как, например, класс правильных или архимедовых многогранников), либо заданные свойства определяют класс многогранников с некоторым метрическим или даже комбинаторным произволом.

Представляют интерес те классы многогранников, которые могут быть вполне перечислены путём задания условий симметрии. При этом те условия, которые позволяют полностью перечислить класс многогранников с точностью до подобия каждого представителя этого класса, даже если этот класс содержит бесконечные серии многогранников, будем называть *жёсткими*. А те условия, задание которых даёт по крайней мере комбинаторное перечисление класса многогранников, будем называть *сильными*.

Например, класс правильногранных замкнутых выпуклых многогранников в E^3 , изученный в [2] и [15], определяется жёсткими условиями симметрии — условием правильности граней. Сильные условия симметрии можно найти, например, в работе автора [3], в которой найдены все многогранники в E^3 , *сильно симметричные относительно вращения граней*.

В работе автора [4] вводится класс так называемых RR -многогранников в E^3 (от слов «rhombic» и «regular»). В классе RR помимо условия симметрии — наличия правильных граней, есть и условие симметрии на звёзды некоторых вершин — существование в многограннике так называемых

симметричных ромбических вершин. Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению этого класса многогранников.

Напомним основные определения.

Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется RR -многогранником (от слов «*rombic*» и «*regular*»), если у него существуют симметричные ромбические вершины, а все грани, не принадлежащие звёздам этих вершин, являются правильными многоугольниками.

Таким образом, замкнутый выпуклый многогранник в E^3 является RR -многогранником, если множество всех его граней можно разбить на два непустых непересекающихся класса — класс граней, образующих гранные звёзды симметричных ромбических вершин и класс правильных граней.

Если правильные грани RR -многогранника одного типа, то он называется RR -многогранником *первого типа*. RR -многогранник относится ко *второму типу*, если его правильные грани различного типа. Вершина V при этом называется *ромбической*, если её гранная звезда $Star(V)$ состоит из равных и одинаково расположенных, т.е. сходящихся в вершине V либо своими острыми, либо тупыми углами ромбов (не квадратов).

Вершина V называется *симметричной n -ромбической вершиной*, если она расположена на оси вращения звезды $Star(V)$ и порядок оси совпадает с числом n ромбов звезды; для краткости вершину V в этом случае будем называть *n -ромбической*. Случай квадратов в $Star(V)$ исключается, так как в этом случае получаем класс многогранников Джонсона—Залгаллера.

Свободными углами ромбической звезды будем называть углы с вершинами, совпадающими с общей вершиной двух тупых углов двух соседних ромбов.

Если поместить в свободные углы n -ромбической звезды правильные треугольные грани, то получим многогранную поверхность — ромбическую шапочку. Приклеивая к границе шапочки правильный n -угольник, получим выпуклый многогранник, который удобно назвать *n -ромбической пирамидой*.

Несоставным будем называть такой RR -многогранник второго типа, который нельзя разбить плоскостями на части, представляющие собой ромбические пирамиды и выпуклые многогранники с правильными гранями.

Ранее автором были найдены двадцать три RR -многогранника первого типа и доказана полнота списка таких многогранников [5–7], а в работе [8] найдены пятьдесят четыре составных RR -многогранника второго типа и также доказана полнота этого списка. При этом условия симметрии для RR -многогранников первого типа и составных RR -многогранников второго типа являются жёсткими.

В настоящей работе рассматриваются некоторые несоставные RR -многогранники второго типа. Дан подробный вывод так называемых *характеристических уравнений* двух RR -многогранников второго типа. С помощью характеристических уравнений вычисляется угол ромбов при ромбической вершине и из этих уравнений следует существование и единственность рассматриваемых многогранников.

2. Основные результаты. Докажем две теоремы о существовании двух несоставных RR -многогранников.

Теорема 1. *Существует несоставной RR -многогранник с одной тупоугольной ромбической вершиной с тридцатью одной гранью, принадлежащий ко второму типу.*

Доказательство. К правильному плоскому 6-угольнику присоединим ось L его вращения, перпендикулярную плоскости 6-угольника. Рассмотрим совокупность правильных треугольников и квадрата, показанных на рис. 1 и отмеченных жирной линией. Отмеченные фигуры совместно с третьей частью 6-угольника, отмеченной жирным пунктиром, будут являться фундаментальной областью для группы C_{3v} относительно оси L . При действии этой группы получим многогранную поверхность с краем Γ . Далее для нас будет основной задачей доказать возможность присоединения тупоугольной ромбической звезды $Star(V)$ к краю Γ таким образом, чтобы 3-ромбическая вершина V принадлежала оси L и чтобы L являлась осью вращения полученного этим построением RR -многогранника.

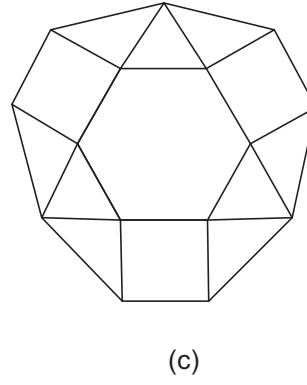
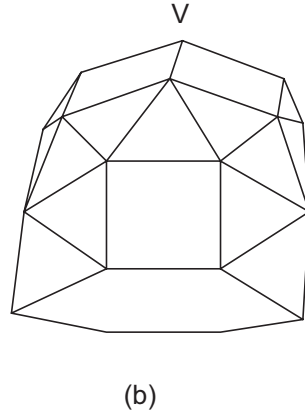
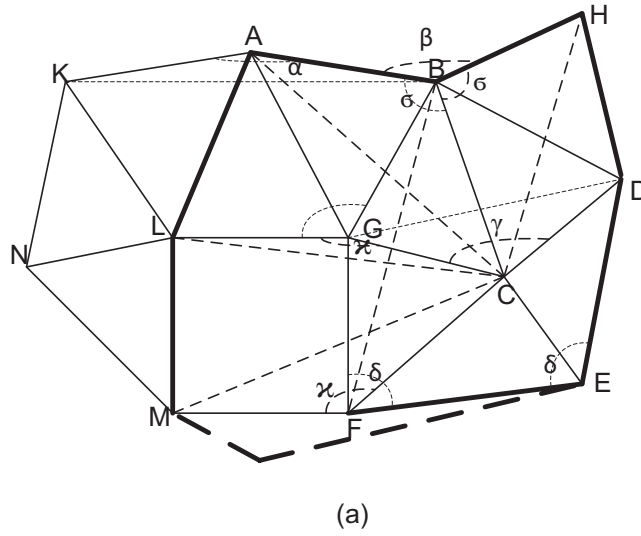


Рис. 1. К доказательству теоремы 1.

Очевидно, для возможной симметричной 3-ромбической вершины V углы KAB (обозначим его α) и ABH (обозначим β) должны быть равны. Идея доказательства состоит в том, чтобы выразить оба эти угла как функции одного и того же угла (γ) многогранника и приравнять их. Из полученного уравнения затем найти величины $\alpha = \beta$ и затем величины углов ромбов ромбической вершины.

Пусть $(3, 6)'$ — двугранный угол с ребром FE между плоскостью $FGDE$ и плоскостью 6-угольного основания многогранника, γ — угол GCD , а δ — равные тупые углы равнобедренной (в силу симметрии многогранника) трапеции $FGDE$. Рассмотрим трёхгранный угол $FMGE$ с вершиной F (см. рис. 1(a)). Так как

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos \delta \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \delta \sin \frac{2\pi}{3} \cos(3, 6)',$$

то, подставляя в это равенство значение

$$\cos \delta = \frac{1}{2} \left(1 - 2 \sin \frac{\gamma}{2} \right), \quad (1)$$

которое следует из равнобедренности трапеции $FGDE$, получим выражение для $\cos(3, 6)'$:

$$\cos(3, 6)' = \frac{1 - 2 \sin \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{3} \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\gamma}{2} - 4 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}}. \quad (2)$$

Пусть $(3, 6)''$ — двугранный угол с ребром FE между плоскостью грани FCE и плоскостью $FGDE$. Тогда, рассматривая трёхгранный угол $FGCE$, из равенства

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos \delta \cos \frac{\pi}{3} + \sin \delta \sin \frac{\pi}{3} \cos(3, 6)''$$

с учётом (1) найдём:

$$\cos(3, 6)'' = \frac{1 + 2 \sin \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{3} \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\gamma}{2} - 4 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}}. \quad (3)$$

Так как $(3, 6)' + (3, 6)'' = (3, 6)$, где $(3, 6)$ — двугранный угол с ребром FE между гранью FCE и плоскостью 6-угольного основания, то из (2) и (3) следует:

$$\cos(3, 6) = \cos \left(\arccos \left(\frac{1 - 2 \sin \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{3} \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\gamma}{2} - 4 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}} \right) + \arccos \left(\frac{1 + 2 \sin \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{3} \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\gamma}{2} - 4 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}} \right) \right). \quad (4)$$

Обозначим через κ плоский угол MFC . Тогда из равенства

$$\cos \kappa = \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} \cos(3, 6)$$

получим:

$$\cos \kappa = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos(3, 6). \quad (5)$$

С другой стороны, обозначая $(4, 3)$ двугранный угол с ребром FG , из равенства

$$\cos \kappa = \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3} \cos(4, 3),$$

используя (5), получим:

$$\cos(4, 3) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(3, 6), \quad (6)$$

где $\cos(3, 6)$ определяется из (4).

Пусть λ — тупой угол BGL равнобедренной трапеции $KBGL$, μ — равные углы BGF и BCF , $(4, 3)'$ — двугранный угол с ребром FG плоскости FGB с плоскостью квадратной грани $LGFM$. Тогда из равенства $\cos \lambda = \cos(\pi/2) \cos \mu + \sin(\pi/2) \sin \mu \cos(4, 3)'$ находим:

$$\cos \lambda = \sin \mu \cos(4, 3)'. \quad (7)$$

Очевидно,

$$(4, 3)' = (4, 3) - \omega, \quad (8)$$

где ω — двугранный угол с ребром FG трёхгранного угла $FGBC$. Из равенства

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\mu}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\mu}{2} \right) + \sin \frac{\pi}{3} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\mu}{2} \right) \cos \omega$$

находим:

$$\cos \omega = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\mu}{2}. \quad (9)$$

Равенство (7) с учётом (8), (6), (9) принимает вид:

$$\cos \lambda = \sin \mu \cos \left(\arccos \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(3, 6) \right) - \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} \right). \quad (10)$$

Далее найдём $\cos \mu$ как функцию угла γ . Из равенства

$$\cos \mu = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} \cos \hat{\mu},$$

где $\hat{\mu}$ — двугранный угол с ребром GC трёхгранного угла $GBCF$, находим:

$$\cos \mu = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos \hat{\mu}. \quad (11)$$

Угол $\hat{\mu} = \hat{\mu}' + \hat{\mu}''$, где $\hat{\mu}'$ — двугранный угол с ребром GC трёхгранного угла $CEGD$, а $\hat{\mu}''$ — двугранный угол с ребром GC трёхгранного угла $CGBD$. Из равенства

$$\cos \delta = \cos \frac{\pi}{3} \cos \gamma + \sin \frac{\pi}{3} \sin \gamma \cos \hat{\mu}'$$

с учётом (1) получим:

$$\cos \hat{\mu}' = \frac{1 - 2 \sin \frac{\gamma}{2} - \cos \gamma}{\sqrt{3} \sin \gamma}. \quad (12)$$

Аналогично из равенства

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \gamma + \sin \frac{\pi}{3} \sin \gamma \cos \hat{\mu}''$$

найдем:

$$\cos \hat{\mu}'' = \frac{1 - \cos \gamma}{\sqrt{3} \sin \gamma}. \quad (13)$$

Подставив из (12) и (13) сумму $\hat{\mu} = \hat{\mu}' + \hat{\mu}''$ в (11), получим:

$$\cos \mu = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos \left(\arccos \frac{1 - 2 \sin \frac{\gamma}{2} - \cos \gamma}{\sqrt{3} \sin \gamma} + \arccos \frac{1 - \cos \gamma}{\sqrt{3} \sin \gamma} \right). \quad (14)$$

В силу равнобедренности трапеции $KBGL$, аналогично равенству (1) найдём

$$1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \cos \lambda,$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{1 + 4 \cos \lambda - 4 \cos^2 \lambda}{2}. \quad (15)$$

Равенство (15) представляет $\cos \alpha$ как функцию угла γ , что можно видеть из (10), если принять во внимание (14) и (4).

Нашей целью будет теперь найти выражение для β как функции угла γ .

Пусть σ — угол ABC и в силу симметрии равный ему угол CBH . Из симметричного трёхгранного угла $CABH$ находим:

$$\cos \beta = \cos^2 \sigma + (1 - \cos^2 \sigma) \cos \hat{a}, \quad (16)$$

где $\hat{a}$ — двугранный угол при ребре BC .

Пусть $\hat{\sigma}$ — двугранный угол с ребром BG между гранями ABG и CBG . Имеем $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}' + \hat{\sigma}''$. Здесь: $\hat{\sigma}'$ — двугранный угол с ребром BG между гранью ABG и плоскостью трапеции $KBGL$, а $\hat{\sigma}''$ — двугранный угол с ребром BG трёхгранного угла $GLBC$. Для $\hat{\sigma}'$ и $\hat{\sigma}''$ имеем:

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \phi + \sin \frac{\pi}{3} \sin \phi \cos \hat{\sigma}', \quad (17)$$

где ϕ — острый угол KBG трапеции $KBGL$, для которого

$$\cos \phi = \frac{1}{2} \left(2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) - 1 \right)$$

в силу равнобедренности трапеции;

$$\cos \kappa = \cos \frac{\pi}{3} \cos \lambda + \sin \frac{\pi}{3} \sin \lambda \cos \hat{\sigma}''. \quad (18)$$

Из (17) и (18) соответственно находим:

$$\cos \hat{\sigma}' = \frac{1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad \cos \hat{\sigma}'' = \frac{4 \cos \kappa - 1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}. \quad (19)$$

Таким образом,

$$\cos \hat{\sigma} = \cos \left(\arccos \left(\frac{1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) + \arccos \left(\frac{4 \cos \kappa - 1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \right), \quad (20)$$

где $\cos \kappa$ в силу (5) и (4), а $\sin \frac{\alpha}{2}$ — в силу (15), являются функциями γ . Таким образом, $\cos \hat{\sigma}$ является функцией γ .

Из трёхгранного угла $BAGC$ находим

$$\cos \sigma = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos \widehat{\sigma},$$

или, пользуясь (20),

$$\cos \sigma = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos \left(\arccos \left(\frac{1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) + \arccos \left(\frac{4 \cos \kappa - 1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \right). \quad (21)$$

Рассмотрим трёхгранный угол $CABH$ с двугранным углом $\widehat{a}$ при ребре BC , входящим в равенство (16). Очевидно, что $\widehat{a} = \bar{a} - 2\widehat{\rho}$, где $\bar{a}$ — двугранный угол с ребром BC между гранями CGB и DCB , а $\widehat{\rho}$ — двугранный угол с ребром BC в симметричном трёхгранном угле $BAGC$. Для последнего угла из равенства

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \sigma + \sin \frac{\pi}{3} \sin \sigma \cos \widehat{\rho}$$

найдем

$$\cos \widehat{\rho} = \arccos \left(\frac{1 - \cos \sigma}{\sqrt{3} \sin \sigma} \right). \quad (22)$$

Двугранный угол $\bar{a}$ найдём из равенства

$$\cos \gamma = \cos \frac{\pi}{3} \cos \sigma + \sin \frac{\pi}{3} \sin \sigma \cos \bar{a}$$

следующим образом:

$$\cos \bar{a} = \frac{4 \cos \gamma - 1}{3}. \quad (23)$$

Подставляя (22) и (23) в равенство $\widehat{a} = \bar{a} - 2\widehat{\rho}$, получим

$$\widehat{a} = \arccos \left(\frac{4 \cos \gamma - 1}{3} \right) - 2 \arccos \left(\frac{1 - \cos \sigma}{\sqrt{3} \sin \sigma} \right). \quad (24)$$

Подставляя $\widehat{a}$ из (24) в равенство (16), получим

$$\cos \beta = \cos^2 \sigma + (1 - \cos^2 \sigma) \cos \left(\arccos \left(\frac{4 \cos \gamma - 1}{3} \right) - 2 \arccos \left(\frac{1 - \cos \sigma}{\sqrt{3} \sin \sigma} \right) \right), \quad (25)$$

где $\cos \sigma$ определяется из (21). В равенстве (21) $\cos \kappa$ находится как функция γ из (5) и (4), а угол α выражается из (15) как функция λ ; λ , в свою очередь, является функцией γ , как легко видеть из (10), учитывая (14) и (4).

Таким образом, $\cos \beta$ и $\cos \alpha$ являются функциями γ . Так как для треугольной ромбической вершины V должно выполняться равенство $\beta = \alpha$, то из (15) и (25) находим основное уравнение для RR -многогранника:

$$\frac{1 + 4 \cos \lambda - 4 \cos^2 \lambda}{2} = \cos^2 \sigma + \sin^2 \sigma \cos \left(\arccos \left(\frac{4 \cos \gamma - 1}{3} \right) - 2 \arccos \left(\frac{1 - \cos \sigma}{\sqrt{3} \sin \sigma} \right) \right). \quad (26)$$

Здесь левая часть есть $\cos \alpha$, а правая равна $\cos \beta$.

Численное решение уравнения (26) даёт единственный корень $\gamma = 2,01 \dots$, или $\gamma = 115,31^\circ \dots$. Следовательно, тупые углы ромбов при вершине V равны $\alpha = \beta = 112,17^\circ \dots$. Заметим, что когда α уменьшается от значения, близкого к π , то γ увеличивается от значения, близкого к 108° , достигая найденного значения $\gamma = 115,31^\circ \dots$

Таким образом, искомым RR -многогранник построен, (см. рис. 1(b)). На рис. 1(c) показан его вид со стороны 6-угольной грани. Теорема 1 доказана. $\square$

Теорема 2. *Существует несоставной RR -многогранник с одной ромбической вершиной степени 4 и с двадцатью пятью гранями, принадлежащий ко второму типу.*

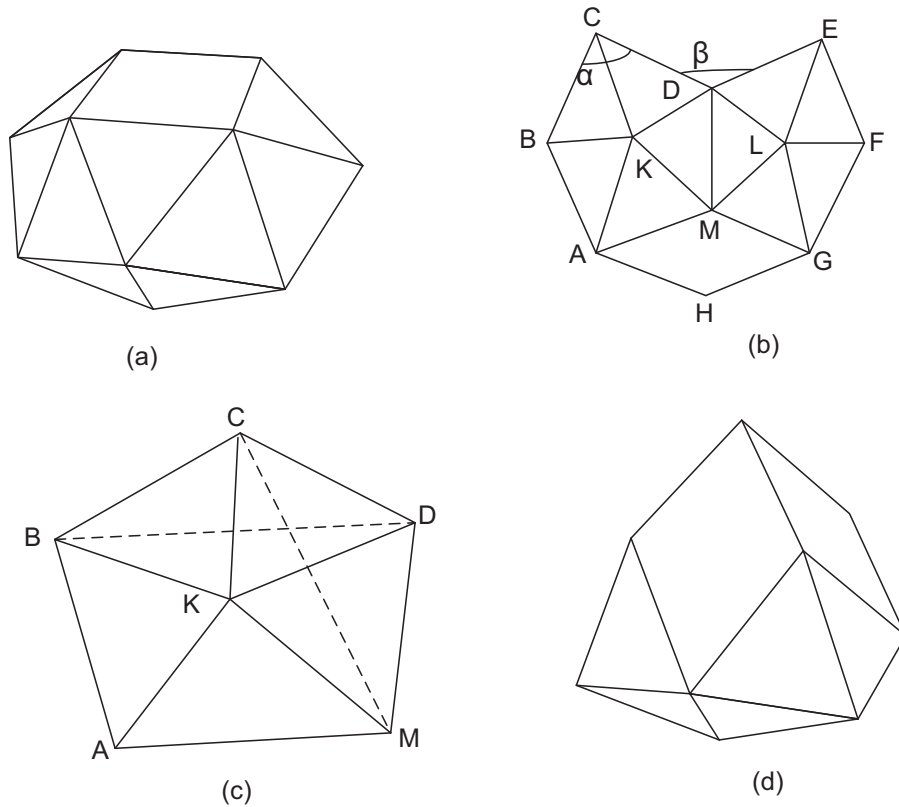


Рис. 2. (a) — плосконосая квадратная антипризма; (b) — к доказательству теоремы 2; (d) — ромбическая плосконосая квадратная «антипризма».

Доказательство. RR -многогранник, существование которого здесь будет доказано, является в некотором смысле «родственным» построенному в теореме 1.

Рассмотрим один из многогранников Джонсона — $J85$ — плосконосую квадратную антипризму, рис. 2(a). Удалим четыре треугольных грани, смежные по ребру верхней квадратной грани, и саму квадратную грань. Получим многогранную поверхность M с треугольными и одной квадратной гранью. Многогранник M ограничен пространственной ломаной, часть $BCDEF$ которой показана на схематичном рисунке 2(b). Нашей целью будет присоединение к краю $\dots BCDEF \dots$ этой поверхности симметричной 4-ромбической звезды. Для этого будет дан вывод характеристического уравнения, аналогичный выводу характеристического уравнения для многогранника, связанного с икосаэдром (см. [7]).

Обозначим Γ граничную ломаную $\dots BCDEF \dots$. Плоский угол между рёбрами CB и CD ломаной Γ , а также все такие углы, которые эквивалентны ему относительно оси вращения 4-го порядка, перпендикулярной оставшейся квадратной грани, обозначим α . Плоский угол между рёбрами CD и ED и между рёбрами, им эквивалентными, обозначим β , (см. рис. 2(b)).

Рассмотрим трёхгранный угол $MCDE$ с вершиной M . Обозначим θ равные в силу симметрии M плоские углы $\widehat{CDM}$ и $\widehat{CKM}$. Пусть Φ — двугранный угол с ребром MD трёхгранного угла $MCDE$. Справедливо равенство

$$\cos \beta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos \Phi. \quad (27)$$

В силу симметрии многогранника M четырёхугольник $ABDM$ является равнобедренной трапецией: $BD \parallel AM$, $AB = MD$; равные тупые углы $\widehat{BAM}$ и $\widehat{DMA}$ обозначим γ .

Так как $\widehat{BCD} = \widehat{BKD} = \alpha$, то, считая рёбра многогранника M единичными, получаем, что длина отрезка $BD = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$. Поэтому

$$\cos \gamma = \frac{1}{2} \left(1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right). \quad (28)$$

Пусть угол φ — двугранный угол при ребре MD трёхгранного угла $MADC$. Тогда, учитывая, что $\widehat{AMG} = \frac{\pi}{2}$, для φ имеем соотношение:

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma \cos \varphi,$$

т.е., учитывая (28):

$$0 = \left(\frac{1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2}}{2} \right)^2 + \left(1 - \left(\frac{1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2}}{2} \right)^2 \right) \cos \varphi. \quad (29)$$

Из (29) находим:

$$\varphi = \arccos \frac{-1 + 4 \sin \frac{\beta}{2} - 4 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{3 + 4 \sin \frac{\beta}{2} - 4 \sin^2 \frac{\beta}{2}}. \quad (30)$$

Двугранный угол Φ можно представить в виде:

$$\Phi = \varphi - 2\kappa, \quad (31)$$

где κ — двугранный угол между плоскостями CDM и плоскостью трапеции $ABDM$.

Пусть λ — острый угол плоскости треугольника MKD с плоскостью трапеции $ABDM$. Тогда для трёхгранного угла $MAKD$ получим

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \gamma + \sin \frac{\pi}{3} \sin \gamma \cos \lambda,$$

откуда

$$\cos \lambda = \frac{1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}. \quad (32)$$

Пусть μ — угол между плоскостью треугольника MKD с плоскостью MDC . Тогда, рассматривая трёхгранный угол $MKCD$, имеем уравнение

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) \cos \frac{\pi}{3} + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{\pi}{3} \cos \mu,$$

из которого находим:

$$\cos \mu = \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}}. \quad (33)$$

Учитывая (32) и (33), получим выражение для двугранного угла κ :

$$\kappa = \arccos \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}} \right) - \arccos \left(\frac{1}{3} \frac{(1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2}) \sqrt{3}}{\sqrt{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \right). \quad (34)$$

Подставляя выражения φ из (30) и κ из (34) в (31), получим:

$$\Phi = \arccos \frac{-1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \arccos \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}} \right) + 2 \arccos \left(\frac{1}{3} \frac{(1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2}) \sqrt{3}}{\sqrt{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \right). \quad (35)$$

Теперь осталось найти только выражение угла θ через α . Для этого представим двугранный угол ω с ребром KD как сумму двух двугранных углов, угла ω_1 между плоскостями BKD и CKD и угла ω_2 между плоскостями BKD и KDM . Для трёхгранного угла $KBCD$ имеем выражение

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} \cos \omega_1,$$

из которого находим

$$\cos \omega_1 = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}. \quad (36)$$

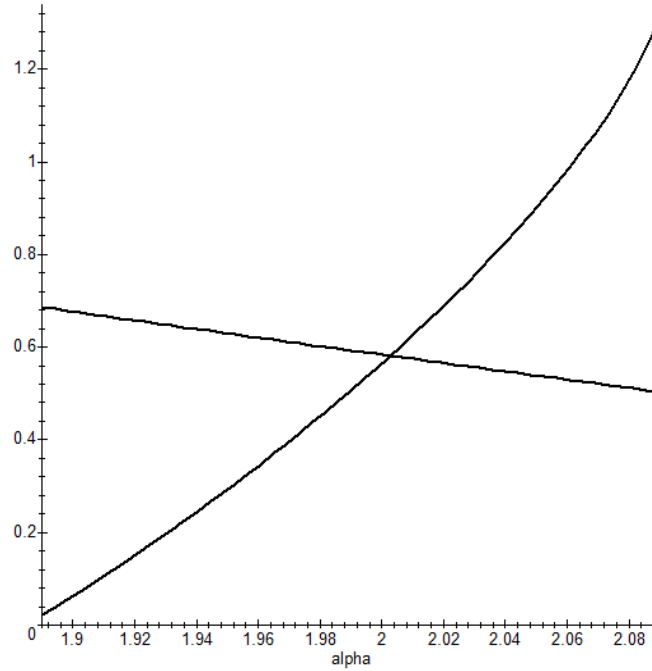


Рис. 3. Решение уравнения (42).

Аналогично из выражения для трёхгранного угла $DBKM$

$$\frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1 \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + \sin \frac{\pi}{3} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \omega_2$$

находим

$$\cos \omega_2 = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} - 1}{\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (37)$$

Из трёхгранного угла $DCKM$ находим:

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} \cos \omega, \quad \cos \theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos \omega. \quad (38)$$

Так как $\omega = \omega_1 + \omega_2$, то, принимая во внимание (36) и (37), из (38) получим

$$\cos \theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos \left(\arccos \frac{\sin \frac{\alpha}{2} - 1}{\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2}} + \arccos \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2}} \right). \quad (39)$$

Можно показать, что углы α и β для остроугольной ромбической вершины связаны соотношением, вывод которого приведён в [5]. В обозначениях настоящей работы это соотношение имеет вид

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\pi(n-2)}{2n}}, \quad (40)$$

где n — степень ромбической вершины. Заметим, что для доказательства (40) достаточно сравнить два выражения для двугранного угла между двумя соседними ромбами ромбической вершины. В частности, при $n = 4$ формула (40) принимает вид

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{\beta}{2} \iff \cos \beta = \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (41)$$

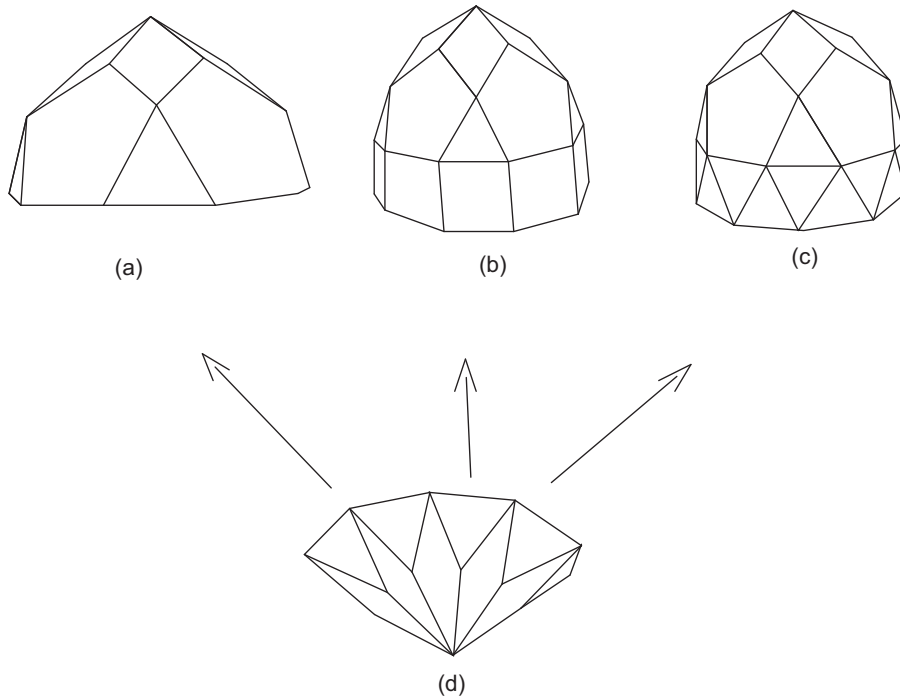


Рис. 4. К замечанию 1: (а) — удлинённая 5-угольная ротонда; (b), (c) — многогранники на основе удлинённой 5-угольной ротонды; (d) — 10-ромбическая пирамида.

С другой стороны, имеем для угла β соотношение (27). С учетом (41), (35) и (39) уравнение (27) принимает вид

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos \left(2 \arccos \left(\frac{1}{3} \frac{(1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2}) \sqrt{3}}{\sqrt{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) - 2 \arccos \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}} + \arccos \frac{-1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right), \quad (42)$$

где

$$\cos \theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos \left(\arccos \frac{\sin \frac{\alpha}{2} - 1}{\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2}} + \arccos \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}} \right). \quad (43)$$

□

С помощью компьютерного вычисления корня уравнения (42) получаем единственный корень: $\alpha = 114,75^\circ \dots$, и острый угол ромбов ромбической вершины $\beta = 73,10^\circ \dots$

На рис. 3 показано пересечение графиков левой и правой частей уравнения (42).

Таким образом, из решения видим, что искомый многогранник существует и является единственным с точностью до подобия. Искомый многогранник представлен на рис. 2(d).

Замечание 1. При перечислении несоставных RR -многогранников второго типа мы не учитываем известные многогранники с правильными гранями и с условными рёбрами, имеющие симметричные ромбические вершины, (см. [19]). Напомним, что условные рёбра в списке работы [19] — это диагонали ромбических граней, разбивающие ромб на два *правильных* треугольника.

Укажем ещё три несоставных RR -многогранника второго типа, у которых существуют ромбические вершины как с углами ромбов, равными $\pi/3$, так и такие вершины, в которых углы

ромбов отличны от $\pi/3$. Такие многогранники получаются присоединением 10-ромбической пирамиды (d) на рис. 4 к 5-угольной удлинённой ротонде рис. 4(a) и к двум другим многогранникам, изображённым на рис. 4(b)-(c).

Таким образом, в отличие от RR -многогранников первого типа, многогранники второго типа могут содержать такие симметричные ромбические вершины, что ромбы одной из них не равны ромбам другой вершины.

Замечание 2. Из вышеизложенных результатов следует, что RR -многогранники можно рассматривать как обобщение класса правильных многогранников с условными рёбрами, приведённого в [19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза М., Гришук В. П., Штогрин А. И. Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках. — М.: МЦНМО, 2007.
2. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями// Зап. науч. семин. ЛОМИ. — 1967. — 2. — С. 1–220.
3. Субботин В. И. Об одном классе сильно симметричных многогранников// Чебышев. сб. — 2016. — № 4. — С. 132–140.
4. Субботин В. И. О двух классах многогранников с ромбическими вершинами// Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2018. — 476. — С. 153–164.
5. Субботин В. И. О полноте списка выпуклых RR -многогранников// Чебышев. сб. — 2020. — 21, № 1. — С. 297–309.
6. Субботин В. И. Существование и полнота перечисления трёхмерных RR -многогранников// в кн.: Геометрические методы в теории управления и математической физике. — Рязань: Изд-во Рязан. гос. ун-та, 2021. — С. 15.
7. Субботин В. И. О существовании RR -многогранников, связанных с икосаэдром// Чебышев. сб. — 2021. — 22, № 4. — С. 253–264.
8. Субботин В. И. О составных RR -многогранниках второго типа// Владикавказ. мат. ж. — 2022. — 24, № 1. — С. 100–108.
9. Berman M. Regular-faced convex polyhedra// J. Franklin Inst. — 1971. — 291, № 5. — P. 329–352.
10. Bokowski J., Wills J. M. Regular polyhedra with hidden symmetries// Math. Intel. — 1988. — 10. — P. 27–32.
11. Coxeter H. S. M. Regular Polytopes. — New York: Dover, 1973.
12. Coxeter H. S. M. Regular and semi-regular polytopes, III// Math. Z. — 1988. — 200, № 21. — P. 3–45.
13. Cromwell P. R. Polyhedra. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
14. Grünbaum B. Regular polyhedra: Old and new// Aequat. Math. — 1977. — 16, № 1-2. — P. 1–20.
15. Johnson N. W. Convex polyhedra with regular faces// Can. J. Math. — 1966. — 18, № 1. — P. 169–200.
16. McMullen P. Geometric Regular Polytopes. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2020.
17. Schulte E. Symmetry of polytopes and polyhedra// in: Handbook of Discrete and Computational Geometry (Goodman J. E., O'Rourke J., Toth C. D., eds.). — CRC Press, 2017.
18. Schulte E., Wills J. M. On Coxeter's regular skew polyhedra// Discr. Math. — 1986. — 60. — P. 253–262.
19. Tupelo-Schneck R. Convex regular-faced polyhedra with conditional edges// <http://tupelo-schneck.org/polyhedra/>.

Субботин Владимир Иванович

Южно-Российский государственный политехнический университет

имени М. И. Платова, Новочеркасск;

Донской государственный аграрный университет, пос. Персиановский, Ростовская область

E-mail: geometry@mail.ru