



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 128–147
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-128-147

УДК 519.2:531/534

СПОНТАННАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ В МАРКОВСКИХ ЦЕПЯХ. II. МЕЗОФРАКТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

© 2023 г. В. В. УЧАЙКИН

Аннотация. Вторая часть обзора демонстрирует применение теоретических положений, развитых в первой части, к анализу статистических характеристик процесса кластеризации наблюдаемого распределения галактик в видимой части Вселенной. В отличие от стандартного подхода к решению динамической задачи о кластеризации гравитационной плазмы, в качестве исходных уравнений принимается не система дифференциальных уравнений, описывающая плазму как непрерывную среду, а интегральное уравнение Орнштейна–Цернике для системы случайно распределенных точек, взаимодействие между которыми учитывается не введением гравитационного потенциала, а подходящим выбором ядра уравнения Орнштейна–Цернике для двухчастичной корреляционной функции. В рамках этой модели случайной среды, названной автором мезофрактальной, найдено 4-параметрическое представление спектра мощности флуктуаций, позволяющее определить статистические параметры такой среды на основе наблюдаемых данных. Первая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 220. — С. 125–144.

Ключевые слова: гравитационная плазма, галактики, уравнение Орнштейна–Цернике, мезофрактальная модель, корреляции, спектр мощности.

SPONTANEOUS CLUSTERING IN MARKOV CHAINS. II. MESOFRACTAL MODEL

© 2023 V. V. UCHAIKIN

ABSTRACT. In the second part of the review, we apply theoretical principles developed in the first part to analysing statistical characteristics of clustering the observed distribution of galaxies in the visible part of the Universe. In contrast to the standard approach to solving the dynamic problem of clustering gravitational plasma based on systems of differential equations that describe the plasma as a continuous medium, we use the Ornstein–Zernike integral equation for a system of randomly distributed points whose interaction is described by an appropriate choice of the kernel of the Ornstein–Zernike equation for the two-particle correlation function. Within the framework of this “mesofractal” model, we find a 4-parameter representation of the spectrum of fluctuation power, which allows one to determine statistical parameters of the medium from the observed data. The first part of this work: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 220. — P. 125–144.

Keywords and phrases: gravitation plasma, galaxies, Ornstein–Zernike equation, mesofractal model, correlations, power spectrum.

AMS Subject Classification: 65P40

1. Вселенная как фрактальная пыль.

1.1. Фрактальная астростатистика. Нет нагляднее образа точечного распределения, чем звездное небо в безлунную ночь. Накопленные к настоящему времени базы данных астрономических наблюдений распределения видимой материи во Вселенной сосредоточены в обзорах, содержащих разнообразную информацию о миллионах и миллионах космических объектов — планет, звёзд, галактик, скоплений галактик, скоплений скоплений галактик, объектов специальных типов — квазаров, пульсаров, радиогалактик и др. Строго говоря, современная космология (наука о возникновении и эволюции Вселенной) должна опираться на всю эту информацию, однако это представляется сегодня невозможным, как невозможен учет всех индивидуальных координат и скоростей молекул газа или жидкости, заключённых в сосуде. Вместо этого в статистической физике используется сжатие информации и представление её в виде некоторой последовательности функций с возрастающим числом аргументов. Функция с нулевым числом аргументов (то есть просто число) ρ представляет собой плотность массы (или плотность числа молекул), функция одной переменной $\xi(r)$ — корреляционную функцию и т. д. [3]. Подобный подход широко используется и при описании вещества в космических масштабах (космографии). В известной серии первоначальных работ по статистике гравитационного поля, порождаемого случайным распределением звезд, Чандрасекар и фон Нейман (1941—1943) представляли их распределение однородным пуассоновским ансамблем, заимствовав эту модель из работы Хольтсмарка (1919), изучавшего флуктуации электрического поля в плазме. Вследствие экранирования усредненные корреляции быстро спадали с расстоянием, и Хольтсмарк пренебрег ими, приняв распределение источников поля пуассоновским. Гравитационные поля не подвержены экранированию, и у Чандрасекара с Нейманом было меньше оснований пренебречь корреляциями. Позднее, когда внимание астрономов переключилось со звезд на галактики, выяснилось, что корреляционная функция распределения галактик в широком диапазоне расстояний имеет степенной вид

$$\xi(r) = (r/r_0)^{-\gamma},$$

где $\gamma = 1,77 \pm 0,04$ и r_0 — *корреляционная длина*. Оказалось также, что скопления галактик (кластеры) и крупномасштабного распределения галактик (КРГ), скопления скоплений (суперкластеры), рассматриваемые как точечные объекты, положения которых определяются координатами центров масс, характеризуются корреляциями того же самого степенного типа.

При этом для галактик r_0 оказывается равным $5h^{-1}$ Мпс, тогда как для кластеров $r_0 \simeq 25h^{-1}$ Мпс и значительно больше для суперкластеров. Это озадачивает: кластеры представляются более коррелированными структурами, чем галактики, из которых они состоят! Другими словами, распределение галактик можно ожидать близким к однородному на расстояниях $10-15h^{-1}$ Мпс, тогда как кластеры и суперкластеры наблюдаются на существенно больших расстояниях [25, 30]. Кроме того, корреляционная длина возрастает с размером выборки (глубиной обзора) [12, 13]. Тогда как обзоры [17, 31] не свидетельствуют о достижении однородности, а скорее всего наводят на мысль о самоподобии наблюдаемых распределений.

Концепция самоподобия и была реализована Б. Мандельбротом в его фрактальной модели распределения галактик, основанной на блужданиях Леви [21, 22]. Используя в качестве определяющего свойство масштабной инвариантности (самоподобия), можно сказать, что *фрактал — это геометрическая структура, которая всегда выглядит одинаково* (по крайней мере, в статистическом смысле), *независимо от разрешения, с каким она наблюдается* [8, с. 49].

Более формальное определение фрактального множества, данное Мандельбротом (см. [22]), таково: это *математический объект, фрактальная (хаусдорфова) размерность D_H которого строго больше, чем его топологическая размерность D_T* . Таким образом, для фрактального точечного распределения в d -мерном пространстве, названного Мандельбротом *фрактальной пылью*, $D_T = 0$ и $0 < D_H \leq d$. Фрактальная размерность $D_H = d$ характеризует однородное распределение, заполняющее пространство. В качестве примера последнего можно рассмотреть однородный пуассоновский ансамбль, для которого

$$\langle N(R) \rangle = \frac{4}{3} \pi \rho R^3, \quad \xi(\mathbf{r}) = 0,$$

а среднее число локальных объектов (частиц, галактик) в единице объема (концентрация) $n(\mathbf{r})$ не зависит ни от точки наблюдения \mathbf{r} , ни от выбора начала системы координат в пространстве. В случае фрактального распределения началом координат выбирается точка, принадлежащая фрактальному множеству, скажем, точка \mathbf{r}_0 . Концентрацию же объектов в точке наблюдения \mathbf{r} будем обозначать $g(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r})$ и называть концентрацией соседей (не обязательно ближайших, если все-таки, ближайших, то это специально оговаривают). Интеграл

$$\int_{U_R} g(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}) d\mathbf{r} = \langle N(\mathbf{r}_0 \rightarrow U_R) \rangle$$

по шару U_R радиусом R с центром в точке \mathbf{r}_0 дает среднее число объектов в этом шаре (объект в точке \mathbf{r}_0 не входит в это число). В вероятностной терминологии это — условное математическое ожидание. Поведение этого числа с увеличением радиуса шара, представленное в виде степенной функции

$$\langle N(\mathbf{r}_0 \rightarrow U_R) \rangle \simeq R^D, \quad R \rightarrow \infty, \quad 0 < D \leq d, \quad (1)$$

как раз и свидетельствует о том, что распределение, с которым мы имеем дело, является фрактальным с фрактальной размерностью D . Очевидно, есть некоторые проблемы в интерпретации этой модели применительно к распределению галактик. Во-первых, даже если игнорировать различие в массах, как это первоначально сделал Мандельброт, мы тут же вынуждены будем ограничиться относительно малыми размерами шара, ибо с увеличением его размера в занимаемую им область войдут новые галактики со своими соседями и тем самым изменят чисто степенное поведение условной плотности. Если же распространить фрактальный признак (1) на все возможные расстояния, то уже в случае трех произвольно расположенных галактик мы сталкиваемся с неопределенностью: концентрация галактик в любой из этих точек зависит от того, какую из двух оставшихся мы выберем в качестве r_0 . Еще одно обстоятельство, требующее выяснения, связано с выполнением космологического принципа — гипотезы о том, что Вселенная пространственно однородна и изотропна [1].

Заметим, что в этом случае не имеет значения, помещается ли центр сферы, в которой производится подсчет, в любую точку множества или в любую другую точку пространства.

Это значит, что переменив точку, взятую в качестве начала координат, мы должны вновь получить изотропное относительно нового начала координат распределение с плотностью числа окружающих её галактик, убывающей относительно неё по тому же степенному закону. Возможно ли это? Нет, если речь идёт о «застывшем» детерминированном распределении: центр симметрии останется на прежнем месте, не совпадающим с новым началом координат. Да, если под плотностью понимать *среднюю плотность*, то есть плотность, усреднённую по статистическому ансамблю таких распределений, а космологический принцип заменить его *слабой формой: усреднённое таким образом распределение вещества во Вселенной должно выглядеть одинаково в любой системе координат, центр которой совпадает с одной из галактик*. Введённый Б. Мандельбротом слабый космологический принцип [21] восстановил (в ограниченном виде) идею равноправия различных систем координат ценой нарушения эквивалентности пустых и занятых веществом точек Вселенной.

1.2. Интегральное уравнение для плотности соседей. Для исследования структуры таких стохастических фракталов мы применили аппарат производящих функционалов [35] (см. также первую часть обзора [3]). Производящий функционал случайного точечного распределения $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \dots\}$, генерируемого частицей, рождённой в точке \mathbf{r} , определяется соотношением

$$G(\mathbf{r} \rightarrow u(\cdot)) = \langle u(\mathbf{X}_1)u(\mathbf{X}_2)u(\mathbf{X}_3) \dots \rangle,$$

где $u(\mathbf{r}) \leq 1$ — пробная функция. Для дальнейших преобразований удобно представить это функционал с помощью интеграла по случайной мере $N(\mathbf{r} \rightarrow d\mathbf{x})$, равной случайному числу точек в $d\mathbf{x}$, образованных частицей, рождённой в точке \mathbf{r} :

$$G(\mathbf{r} \rightarrow u(\cdot)) = \left\langle \exp \left\{ \int N(\mathbf{r} \rightarrow d\mathbf{x}) \ln u(\mathbf{x}) \right\} \right\rangle.$$

Интегрирование здесь ведётся по всему пространству, но функция $u(\mathbf{x})$ отлична от 1 лишь в ограниченной области пространства, так что интеграл предполагается сходящимся (в вероятностном смысле).

Очевидно,

$$G(\mathbf{r} \rightarrow 1) = 1.$$

Первая функциональная производная при $u(\mathbf{x}) = 1$ даёт условную плотность числа галактик в точке \mathbf{x}_1 , порожденных траекторией с началом в точке \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta G(\mathbf{r} \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(\mathbf{x}_1)} \right|_{u=1} &= \left\langle \exp \left\{ \int N(\mathbf{r} \rightarrow d\mathbf{x}) \ln u(\mathbf{x}) \right\} \frac{\delta}{\delta u(\mathbf{x}_1)} \left\{ \int N(\mathbf{r} \rightarrow d\mathbf{x}) \ln u(\mathbf{x}) \right\} \right\rangle_{u=1} = \\ &= \left\langle \exp \left\{ \int N(\mathbf{r} \rightarrow d\mathbf{x}) \ln u(\mathbf{x}) \right\} \left\{ \int N(\mathbf{r} \rightarrow d\mathbf{x}) \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{u(\mathbf{x})} \right\} \right\rangle_{u=1} = \\ &= \frac{N(\mathbf{r} \rightarrow d\mathbf{x}_1)}{d\mathbf{x}_1} \equiv g_1(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x}_1). \end{aligned}$$

Функциональная производная порядка n даёт плотность n -го факториального момента:

$$D_u^{(n)}(x_1, \dots, x_n) G(\mathbf{r} \rightarrow u(\cdot)) \Big|_{u=1} \equiv \frac{\delta^n G(\mathbf{r} \rightarrow u(\cdot))}{\delta u(\mathbf{x}_1) \dots \delta u(\mathbf{x}_n)} \Big|_{u=1} = g_n(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n).$$

Напомним, что факториальным моментом случайного числа точек в измеримой области называют величину

$$\langle N^{[n]}(A) \rangle \equiv \langle N(A)[N(A) - 1] \dots [N(A) - n + 1] \rangle,$$

так что

$$\begin{aligned} \int_A \dots \int_A g_n(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n &= \\ &= \langle N(\mathbf{r} \rightarrow A)[N(\mathbf{r} \rightarrow A) - 1] \dots [N(\mathbf{r} \rightarrow A) - n + 1] \rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Обозначив через $p(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x}) = p(\mathbf{x} - \mathbf{r})$ плотность перехода блуждающей частицы, запишем уравнение для производящего функционала необрывающегося процесса:

$$G(\mathbf{r} \rightarrow u(\cdot)) = \int d\mathbf{x} p(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x}) u(\mathbf{x}) G(\mathbf{x} \rightarrow u(\cdot)).$$

Выполнив функциональное дифференцирование по u и положив $u = 1$, получим интегральное уравнение для плотности числа галактик в точке \mathbf{x} относительно начала траектории блуждающей частицы:

$$g(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{y} p(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) + p(\mathbf{x}).$$

Формальное его решение представляет собой бесконечную сумму многократных свёрток переходных плотностей

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} p^{*j}(\mathbf{x}).$$

Каждое слагаемое здесь даёт распределение координат блуждающей частицы после соответствующего перехода. Собственно движение нас в данном случае не интересует, мы рассматриваем лишь *след*, оставленный частицей в виде бесконечного множества точек в пространстве — тех самых точек, где воображаемая частица испытала столкновения. Образ блуждающей частицы просто позволяет лучше представить себе общую картину корреляций в этом множестве случайных точек и воспользоваться готовым математическим аппаратом теории многократного рассеяния [2].

Из предыдущего должно быть ясно, что $g(\mathbf{x})$ характеризует плотность числа частиц (в данном случае, галактик) в точке \mathbf{x} при условии, что начало координат выбрано в одной из галактик. Наглядности ради, называют ее *плотностью соседей*, хотя это не означает, что они находятся близко от этой «нулевой» галактики. Точнее говоря, $g(\mathbf{x})$ есть плотность числа галактик в точке \mathbf{x}

при условии, что начало координат выбрано в одной из других галактик (в отсутствие корреляций эта плотность не зависела бы от выбора начала координат даже в случае неоднородной среды).

1.3. *Моменты соседней галактики.* Чтобы найти высшие моменты случайного числа $N(R)$, характеризующие его флуктуации свойства, возьмем n -ю функциональную производную от обеих частей уравнения для производящего функционала,

$$D_u^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)G(\mathbf{r} \rightarrow u(\cdot)) = \int d\mathbf{x}p(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x})D_u^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)[u(\mathbf{x})G(\mathbf{x} \rightarrow u(\cdot))].$$

Производная от произведения двух сомножителей, стоящая под интегралом в правой части, запишется в виде (напомним: символ s означает симметризацию по всем n переменным правой части):

$$D_u^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)[u(\mathbf{x})G(\mathbf{x} \rightarrow u(\cdot))] \stackrel{s}{=} \\ \stackrel{s}{=} u(\mathbf{x})G^{(n)}(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, u(\cdot)) + n\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)G^{(n-1)}(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, u(\cdot)).$$

Подставляя это выражение в предыдущее уравнение, полагая $u = 1$ и используя свойство дельта-функции при интегрировании по \mathbf{x} во втором слагаемом, приходим к интегральному уравнению относительно плотности n -го факториального момента:

$$g^{[n]}(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \int d\mathbf{x}p(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x})g^{[n]}(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) + np(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x}_1)g^{[n-1]}(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n).$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что этой системе уравнений удовлетворяют решения

$$g^{[n]}(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \stackrel{s}{=} n!g(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x}_1)g(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) \dots g(\mathbf{x}_{n-1} \rightarrow \mathbf{x}_n).$$

Факториальные моменты случайного числа узлов траектории, начинающейся в начале координат, в шаре U_R радиуса R с центром в начале координат, запишутся в виде

$$\langle N^{[n]} \rangle = n! \int_{U_R} \dots \int_{U_R} g(0 \rightarrow \mathbf{x}_1) \dots g(\mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}_n) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n \sim n!(4\pi A/3)^n R^{\alpha n} K_n(\alpha), \quad R \rightarrow \infty,$$

где

$$K_0(\alpha) = 1, \quad K_1(\alpha) = (3/4\pi) \int_{U_1} r^{-3+\alpha} d\mathbf{x},$$

$$K_n(\alpha) = (3/4\pi)^n \int_{U_1} \dots \int_{U_1} (r_1 r_{1,2} \dots r_{n-1,n})^{-3+\alpha} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_n, \quad r_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|, \quad n > 1.$$

Для вычисления входящих в это выражение кратных интегралов введем систему функций [34]

$$v_n^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \int_{U_1} \dots \int_{U_1} (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| r_{1,2} \dots r_{n-1,n})^{-3+\alpha} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_n,$$

так что

$$K_n(\alpha) = (3/4\pi)^n v_n^{(\alpha)}(0).$$

Функции эти связаны друг с другом рекуррентным образом:

$$v_n^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \int_{U_1} F^{(\alpha)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') v_{n-1}^{(\alpha)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad F^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = r^{-3+\alpha}, \quad v_0^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = 1.$$

Учитывая сферическую симметрию функций $F^{(\alpha)}$ и $v_n^{(\alpha)}$, мы можем представить это соотношение в виде

$$w_n^{(\alpha)}(r) = \int_0^1 F^{(\alpha)}(r, r') w_{n-1}^{(\alpha)}(r') dr', \quad w_n^{(\alpha)}(r) = r v_n^{(\alpha)}(\mathbf{r}),$$

где

$$F^{(\alpha)}(r, r') = \frac{2\pi}{\alpha - 1} [(r + r')^{\alpha-1} - |r - r'|^{\alpha-1}], \quad \alpha \neq 1,$$

$$F^{(1)}(r, r') = 2\pi [\ln(r + r') - \ln |r - r'|].$$

Легко видеть, что $K_n(\alpha)$ выражается через $w_n^{(\alpha)}$ следующим образом:

$$K_n(\alpha) = \left(\frac{3}{4}\pi\right)^n \left[\frac{dw_n^{(\alpha)}(r)}{dr} \right]_{r=0}.$$

Это представление удобно для последовательного вычисления $K_n(\alpha)$ для $\alpha > 1$ с использованием стандартной техники численного интегрирования. Ситуация упрощается в случае $\alpha=1$:

$$v_n^{(1)}(r) = \frac{2\pi}{r} \int_0^1 \ln \frac{|r' + r|}{|r' - r|} v_{n-1}^{(1)}(r') dr',$$

$$v_1^{(1)}(r) = \frac{2\pi}{r} \left\{ r + \frac{1}{2}(1 - r^2) \ln \frac{|1 + r|}{|1 - r|} \right\}.$$

Разлагая $v_n^{(1)}(r)$ в степенной ряд, можно найти следующее рекуррентное соотношение

$$v_n^{(1)}(r) = 2\pi v_{n-1}^{(1)}(0) \left(2 - \sum_{i=1}^{\infty} r^{2i} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} \right) \right) - (4\pi)^2 v_{n-2}^{(1)}(0) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)^2},$$

откуда

$$v_n^{(1)}(0) = 4\pi v_{n-1}^{(1)}(0) - (4\pi)^2 v_{n-2}^{(1)}(0) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)^2},$$

$$v_0^{(1)}(0) = 1, \quad v_1^{(1)}(0) = 4\pi.$$

При $\alpha \leq 1$ подынтегральная функция имеет сингулярность в точке $r' = r$, вызывающую рост ошибки при численном интегрировании. Чтобы избежать этой проблемы, мы преобразуем рекуррентное соотношение к виду

$$\int_0^r w_n^{(\alpha)}(r') dr' = W_n^{(\alpha)}(r) - \frac{4\pi}{\alpha(\alpha-1)} \int_0^1 r'^{\alpha} w_{n-1}^{(\alpha)}(r') dr',$$

где

$$W_n^{(\alpha)}(r) = \frac{2\pi}{\alpha(\alpha-1)} \int_0^1 [(r + r')^{\alpha} - (r - r')|r - r'|^{\alpha-1}] w_{n-1}^{(\alpha)}(r') dr',$$

так что

$$K_n(\alpha) = (3/4\pi)^n [d^2 W_n^{(\alpha)}(r)/dr^2]_{r=0}.$$

Результаты всех этих вычислений представлены в Таблице 1.

2. Мезофрактальная модель КРГ.

2.1. Спаренные траектории Леви–Мандельброта. Рассматриваемая здесь схема построения случайных распределений точек в пространстве не должна ассоциироваться с какими-то физическими процессами во Вселенной и с её эволюцией. Схема марковских блужданий является лишь способом описания наблюдаемых корреляций, а вовсе не объяснением их происхождения и эволюции. Но для количественной теории развития крупномасштабной структуры необходимо сжатие имеющейся наблюдательной информации, и схема блужданий может рассматриваться как один из возможных инструментов такого сжатия. Это — модель, содержащая всего два параметра — α и A . Далекая от моделей, описывающих динамику Вселенной, она выражает высшие корреляционные функции через низшую (двухчастичную), то есть обладает свойством, наблюдаемым

Таблица 1. Коэффициенты $K_n(\alpha)$ для единичной траектории. Значения в скобках взяты из [27] (звёздочкой отмечены значения для $\alpha = 1,23$).

K_n	α							
	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
K_1	12,0	6,00	4,00	3,00	2,40	2,00	1,71	1,50
K_2	140	34,0	14,6	7,80	4,88	3,31	2,42	1,88
K_3	$163 \cdot 10$	185	50,4	19,1	9,38	5,22	3,30	2,29
K_4	$188 \cdot 10^2$	985	168	45,8	17,7	8,13	4,46	2,78
K_5	$215 \cdot 10^3$	$516 \cdot 10$	554	108	33,2	12,6	6,03	3,38

(приближенно) в эксперименте. Однако, вытекающие из этой модели относительные флуктуации числа галактик $N(R)$ оказываются существенно выше наблюдаемых значений.

Следующие соображения позволяют уменьшить модельные флуктуации, сохранив остальные свойства модели (эта модификация была предложена и развита в работах [4, 34]). Предположим, что строим случайное распределение точек на оси, организуя блуждание из начала координат только в одном (положительном) направлении. Вторая половина оси при этом остаётся пустой. Естественный способ заполнить всю ось — это построить аналогичным образом левую часть фрактала, двигаясь от начала координат влево. Построение это не просто завершает фрактал, оно придаёт равноправие всем его атомам: теперь слева и справа от *каждого атома* есть соседи, и расстояние до каждого из них является случайной величиной с одним и тем же законом распределения. Можно интерпретировать полученный фрактал как результат блуждания не двух (гипотетических) частиц в противоположных направлениях, а одной частицы в одном из направлений, то есть, считать, например, что она всё время двигалась в положительном направлении оси x , придя из $-\infty$ и уйдя в ∞ . У такой траектории и построенного на её основе фрактала нет ни начала, ни конца, нарушающих симметрию, все его точки в статистическом смысле равноправны.

Перенесём теперь этот прямолинейный фрактал в трёхмерное пространство, совместив один из атомов с началом координат, а направление каждого из отрезков, соединяющих пару соседних атомов, заменим на случайное, выбранное из изотропного распределения независимо от длины отрезка и его номера. Полученное множество случайных точек $\{\dots, \mathbf{X}_{-3}, \mathbf{X}_{-2}, \mathbf{X}_{-1}, 0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \dots\}$ может рассматриваться как след бесконечной траектории, изотропно блуждающей из бесконечности в бесконечность, но технически (при моделировании и аналитических вычислениях) удобнее рассматривать его как след двух независимых траекторий с общим началом в начале координат. Переход от одиночной траектории к спаренной сразу уменьшает относительные флуктуации модели

$$\delta_{N(R)} = \frac{\sigma_{N(R)}}{\langle N(R) \rangle} = \sqrt{\langle N^{[2]}(R) \rangle / \langle N(R) \rangle^2 - 1 + 1 / \langle N(R) \rangle}$$

в $\sqrt{2}$ раз, существенно приближая их к наблюдаемым значениям.

При больших радиусах обзоров R числа N велики, и факториальные моменты в асимптотике совпадают с обычными, так что следует ожидать выполнения соотношения

$$\langle N_p^{[n]} \rangle \approx \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle N^{[k]} \rangle \langle N^{[n-k]} \rangle \sim \left(\frac{4}{3} \pi A \right)^n R^{\alpha n} Q_n(\alpha), \quad R \rightarrow \infty,$$

Таблица 2. Моменты $\langle Z^n \rangle$ для спаренной траектории. Нижние значения относятся к результатам моделирования методом Монте-Карло.

$\langle Z^n \rangle$	α						
	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75
Z_2	1,49	1,44 $1,51 \pm 0,07$	1,41	1,37 $1,40 \pm 0,06$	1,35	1,33 $1,36 \pm 0,06$	1,33
Z_3	2,93	2,70 $3,04 \pm 0,25$	2,55	2,36 $2,52 \pm 0,21$	2,29	2,22 $2,38 \pm 0,21$	2,22
Z_4	7,18	6,18 $7,5 \pm 1,0$	5,59	4,95 $5,7 \pm 0,8$	4,71	4,51 $5,3 \pm 0,9$	4,54
Z_5	21,0	16,7 22 ± 4	14,4	12,2 16 ± 3	11,4	10,8 15 ± 5	11,0

где $N_p^{[n]}$ — случайное число точек, от пары траекторий, а

$$Q_n(\alpha) = \sum_{k=0}^n K_k(\alpha) K_{n-k}(\alpha).$$

В этом приближении моменты нормированной случайной величины

$$Z = \frac{N_p(R)}{\langle N_p(R) \rangle}$$

не зависят от радиуса R

$$\langle Z^n \rangle \sim n! \frac{Q_n(\alpha)}{(Q_1(\alpha))^n}, \quad R \rightarrow \infty.$$

Еще одно обстоятельство, зафиксированное при анализе результатов моделирования рассматриваемых цепей методом Монте-Карло: вследствие негауссовости Леви-статистики, которой подчиняются расстояния между узлами траектории, возникает эффект перемежаемости, аналогичный одномерным траекториям, рассмотренным в I части обзора. Эффект состоит в том, что вследствие степенного характера асимптотики переходных плотностей распределение узлов вдоль траектории цепи крайне неравномерно, длинные отрезки сменяются группами коротких (тоже изотропно распределенных), а соединяющие их узлы образуют кластеры. Вот к этим-то узлам и относится введенная выше Z -статистика, демонстрирующая их фрактальный характер. Кластеры эти образуют своего рода облака (в космологии — скопления), хаотически разбросанные в пространстве. Общая картина распределения такого типа является следствием конкуренции трех длин: короткой, характеризующей размеры кластеров, промежуточной, характеризующей расстояния между ними, и длинной, характеризующей размеры цепи в целом. С изменением масштаба изображения кластеры превращаются в точно-подобные объекты, образующие в целом картину, подобную либо пуассоновскому распределению затравочных объектов (если в данном масштабе объектами стали скопления узлов независимых реализаций), либо фрактальному распределению узлов отдельной реализации цепи. Это и есть то, что мы называем мезофракталом. Нетривиальность этого понятия в том, что речь идет не о том, что часть системы, находящаяся на малых расстояниях от начала координат, выглядит неоднородной, а удаленная от нее — однородной: в этом нет ничего особенного, такое бывает «сплошь и рядом». Речь идет об одной и той же системе, рассматриваемой, скажем, оптическим прибором с фиксированным разрешением. По мере увеличения изображения мы видим превращение нечетко локализованных объектов в структурные образования и начинаем различать составляющие их конститuenty, в обратном процессе мы увидим слияние их в скопления, превращающихся снова в точечные объекты. Таким образом, на оси масштабов мезофрактала мы имеем две зоны: фрактальную и однородную.

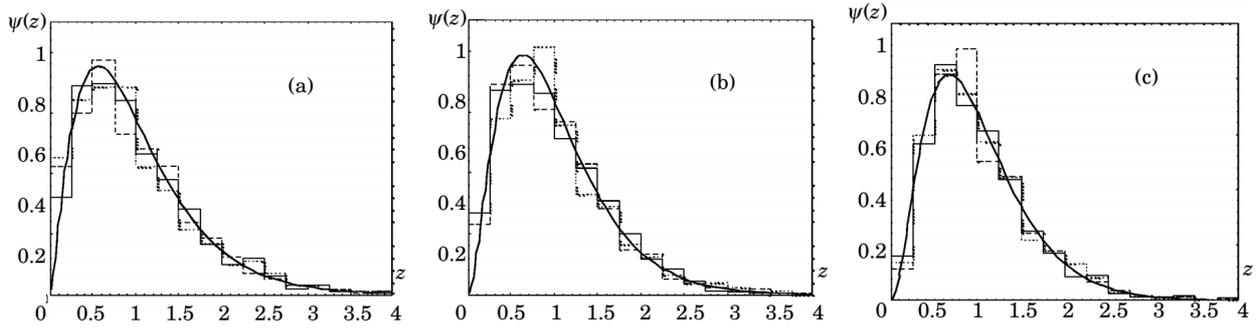


Рис. 1. Плотность распределения скейлинговой характеристики $Z = N(R)/\langle N(R) \rangle$ для кластеров: (a) $\alpha = 0,5$; (b) $\alpha = 1,0$; (c) $\alpha = 1,5$. Гистограммы — результаты моделирования 1000 реализаций с помощью метода Монте-Карло ($a = 10^{-3}$): для $R = 0,05$ — сплошная линия, для $R = 0,1$ — пунктир, $R = 0,2$ — точки. Гладкие сплошные кривые показывают гамма-распределение $\Psi_\alpha(z)$.

Не совсем тривиальна и идея использовать ансамбль независимых реализаций траекторий (Мандельброт использовал лишь одну реализацию). Имея дело с таким ансамблем и выбирая наугад какой-нибудь узел в качестве положения референтной галактики, мы тем самым выбираем и всю эту траекторию, и именно множество ее реализаций при фиксированном положении узла обеспечивает нужный закон спада корреляций, остальные траектории не зависят от его положения и участия в усреднении не принимают. Именно в этом причина разделения мезофрактала на две фазы — фрактальную и однородную.

В табл. 2 представлены результаты вычислений по этим формулам и по методу Монте-Карло. Оказалось, что для моментов $\langle Z^n \rangle$ выполняется следующее соотношение

$$\langle Z^n \rangle = (A(\alpha)n + B(\alpha))\langle Z^{n-1} \rangle.$$

Такое соотношение является характерным свойством гамма-распределения

$$\Psi_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \lambda^\lambda z^{\lambda-1} e^{-\lambda z}$$

с моментами

$$\langle Z^n \rangle = \left(\frac{n}{\lambda} + 1 - \frac{1}{\lambda} \right) \langle Z^{n-1} \rangle.$$

Параметр $\lambda(\alpha)$ выражается через квадрат относительных флуктуаций $\delta_{N(R)}^2 \equiv \sigma_N^2 / \langle N \rangle^2$ соотношением:

$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{\delta_{N(R)}^2}.$$

На рис. 1 показано, что гамма-аппроксимация $\Psi_\alpha(z)$ удовлетворительно согласуется с данными наблюдений [11], и, что очень важно, прямые расчеты методом Монте-Карло подтвердили предположение о слабой (почти, не проявляющейся) зависимости перенормированной множественности Z от радиуса сферы при двадцатикратном его изменении.

2.2. *Условная статистика КРГ.* Теперь возникает два вопроса:

1. Можно ли построить случайное точечное распределение, которое являлось бы фрактальным на малых масштабах и однородным на больших?
2. Можно ли построить такие распределения с фрактальной размерностью $2 < D < 3$, которые наблюдаются, например, в задачах турбулентности [32]?

Начнём с первого вопроса. П. Колман (P. Coleman) и Л. Пьетронеро (L. Pietronero) пишут, в приложении к моделированию Вселенной: «Выборка, которая является фрактальной на малых масштабах и однородной на больших строится следующим образом: в большом объёме случайным образом выбирается некоторое число точек (положений). Поскольку точки распределены

по закону Пуассона, то средние расстояния между ними $\lambda_0 \dots$. Каждая из этих точек является стартовой точкой для построения фрактала, который обладает масштабами длин вплоть до некоторого предельного значения $\lambda_0 \gg [10, \text{p. 334}]$.

Вообще говоря, этот большой объём должен быть бесконечным, иначе будут наблюдаться граничные эффекты. Однако, если объём бесконечен, то возможны только два случая: либо $c < 1$ и тогда $g'(r) \propto r^{-3-\alpha}$, либо $c = 1$ и тогда $g'(r) \propto r^{-3+\alpha}$, но

$$\int g'(r) dr = \infty.$$

Первый случай не является фракталом *на всех масштабах*, во втором случае мы не можем использовать стандартный корреляционный анализ из-за расходимости множителя

$$\rho = \frac{\rho_0}{1-c} \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 1.$$

Чтобы исследовать эту проблему подробнее, были выполнены численные расчёты для $g'(r)$ при значениях c , близких к 1 (см. [35]). В качестве ядра $p(r)$ были использованы сферически симметричные устойчивые распределения. Эти расчёты показывают (см. рис. 2–4), что существует некоторая конечная область, внутри которой функция $g'(r; c)$ численно совпадает с $g'(r; 1)$ при c , достаточно близком к 1. Таким образом, наблюдается весьма примечательный факт: чем больше среднее число шагов на траектории $(1-c)^{-1}$, тем больше область, где может приближенно применяться асимптотическая формула $g'(r, 1)$ для бесконечной траектории. Другими словами, если вероятность выживания c близка к 1, то играет роль *промежуточной асимптотики*, интервал применимости которой тем больше, чем ближе c к 1. Таким образом, конечная траектория может рассматриваться, как обладающая, в некоторой области, свойствами бесконечной, то есть возможно построить случайные точечные распределения с фрактальными свойствами на больших масштабах и с конечной средней плотностью частиц $\rho = \rho_0(1-c)^{-1}$.

На рис. 5(a)–5(c) приведены статистические реализации двумерной проекции пуассоновского (5(a)), фрактального (5(b)) и мезофрактального (5(c)) точечных распределений. На рис. 5(b) показан увеличенный в размерах кластер, выделенный кружком на рис. 5(c), изображающем мезофрактал.

Ответ на второй вопрос также положительный. Чтобы показать это, необходимо вернуться к рассмотрению ветвящихся каскадов. Выберем $k^{[2]}(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ в виде

$$k^{[2]}(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = c_2 k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})$$

и двухчастичная функция принимает вид

$$\theta_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \rho \left\{ g'(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2) + g'(\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1) + c_2 \int g'(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_1) g'(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_2) d\mathbf{r} \right\} = 2\rho g'(\mathbf{r}_{12}) + c_2 \rho g'^{[2]}(\mathbf{r}_{12}),$$

где использована симметрия функции $g'(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = g'(r_{12})$. При $c = 1$ и устойчивом распределении $p(r)$ с характеристической функцией e^{-k^α} , преобразование Фурье функции $g'(r)$ имеет вид

$$\tilde{g}'(\mathbf{k}) = \frac{e^{-k^\alpha}}{1 - e^{-k^\alpha}}.$$

Свёртка

$$g'^{(2)}(\mathbf{r}_{12}) = \int g'(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_1) g'(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}$$

выглядит как квадрат преобразования Фурье:

$$\tilde{g}'^{(2)}(\mathbf{k}) = \frac{e^{-2k^\alpha}}{(1 - e^{-k^\alpha})^2} \sim k^{-2\alpha} e^{-2k^\alpha}, \quad k \rightarrow 0.$$

Таким образом, для больших r мы получим

$$g'^{(2)}(\mathbf{r}) \sim \frac{2}{(2\pi)^2 r^2} \int_0^\infty \sin kr e^{-2k^\alpha} k^{1-2\alpha} dk = \frac{1}{2\pi^2} \Gamma(2(1-\alpha)) \sin(\alpha\pi) r^{2\alpha-3}, \quad r \rightarrow \infty.$$

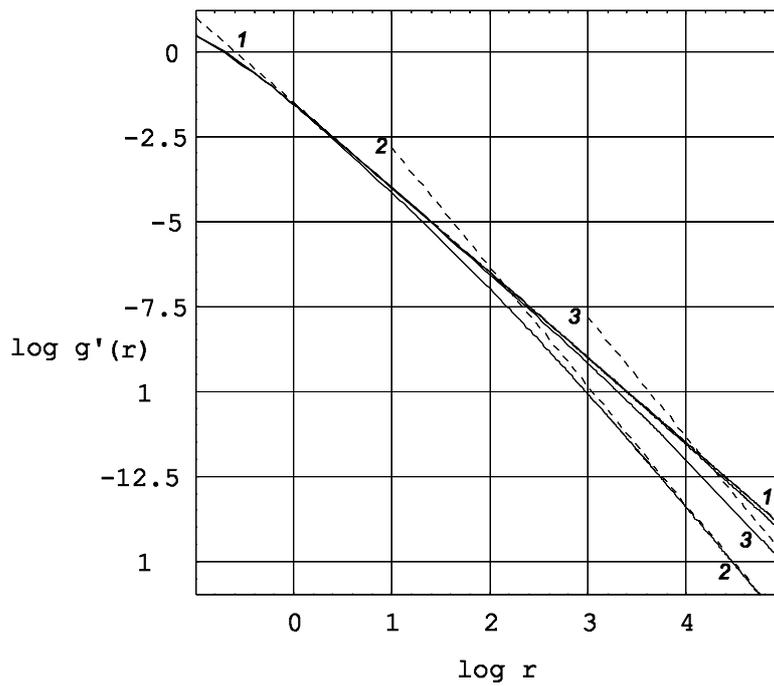


Рис. 2. Функция $g'_c(r)$ (сплошные кривые) и её основной асимптотический член (пунктир) для $\alpha = 0,5$ и следующих значений c : (1) $c = 1$; (2) $c = 0,9$; (3) $c = 0,99$. Эти графики можно интерпретировать как усредненные по ансамблю профили кластеров, образуемых каскадом с указанными параметрами α и c .

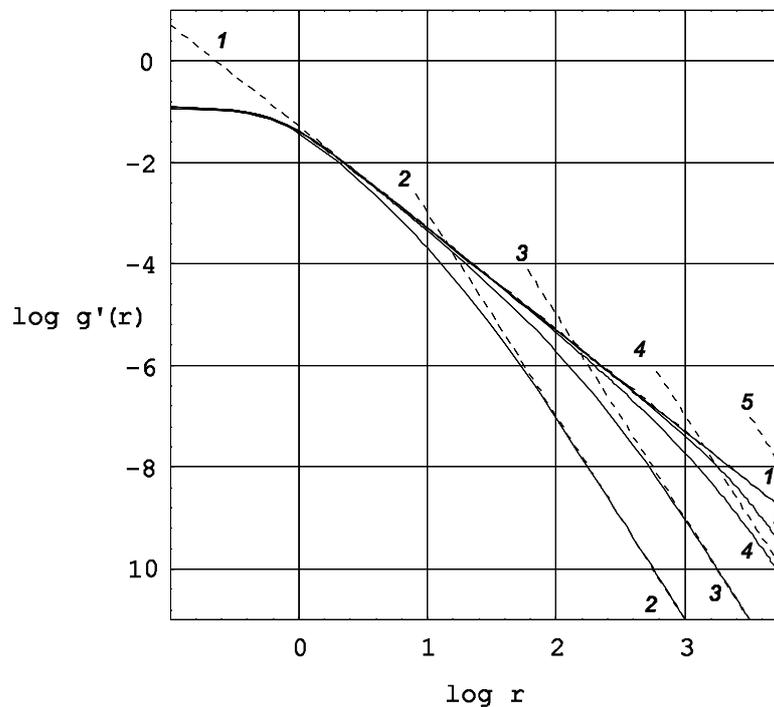


Рис. 3. То же, что на рис. 2, для $\alpha = 1$ и следующих значений c : (1) $c = 1$; (2) $c = 1 - 10^{-1}$; (3) $c = 1 - 10^{-2}$; (4) $c = 1 - 10^{-3}$; (5) $c = 1 - 10^{-4}$.

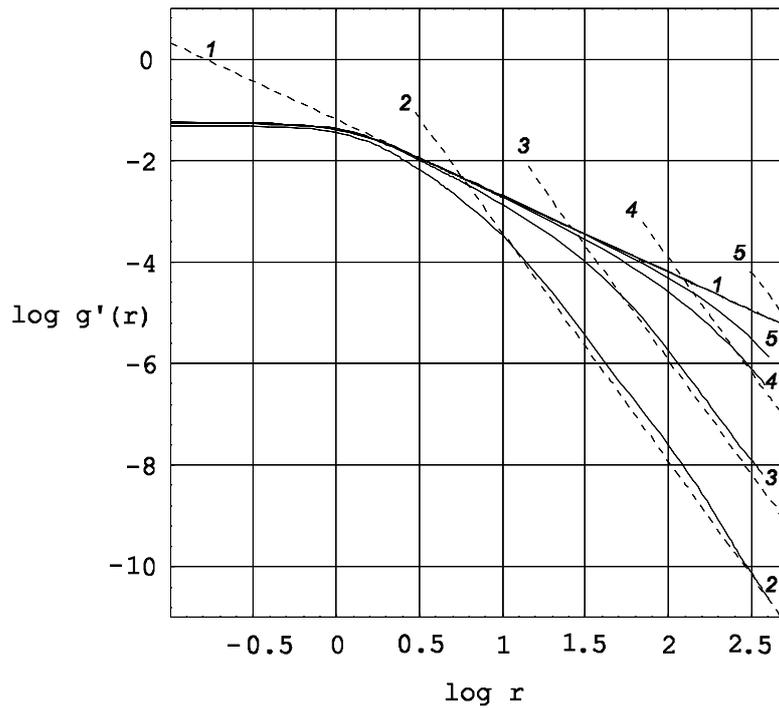
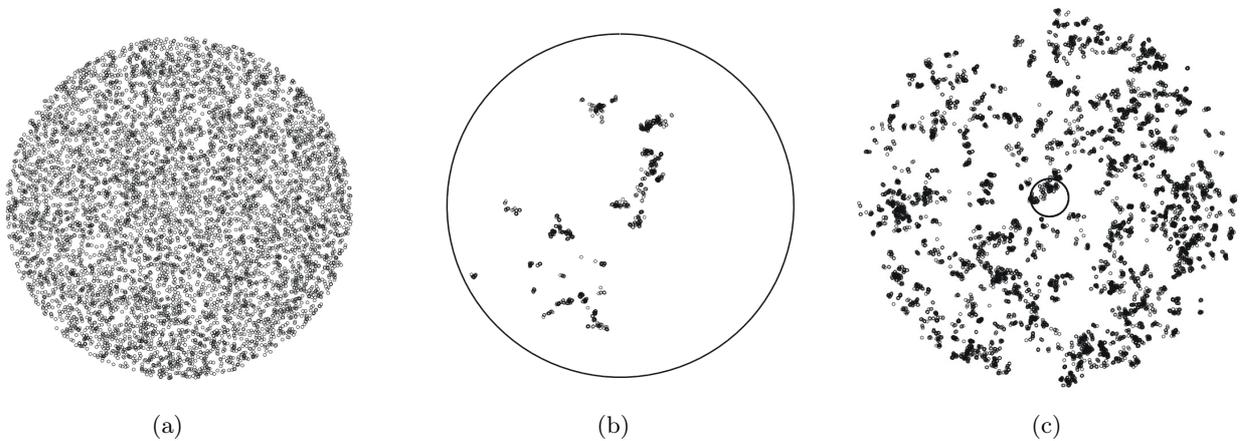
Рис. 4. То же, что на рис. 3, для $\alpha = 1,5$.

Рис. 5. (а) Двумерное однородное пуассоновское распределение. (б) Двумерное фрактальное распределение ($\alpha = 1$) один из членов кластерного ансамбля. (с) Двумерное мезофрактальное распределение ($\alpha = 1$), представляющее наложение независимых кластеров, равномерно распределенных на плоскости. Кружком выделена фрактальная часть, увеличенное изображение которой показано на рис. 5(б).

Здесь α , как и ранее, принадлежит интервалу $(0, 2)$, и в случае $\alpha \in (1, 3/2)$ мы получим фрактальную размерность $D = 2\alpha \in (2, 3)$.

Таким образом, для построения случайных точечных распределений с фрактальной размерностью $D > 2$ необходимо использовать ветвящийся процесс Леви с $\alpha = D/2$.

2.3. *Корреляции и спектр мощности.* Важной статистической характеристикой крупномасштабной структуры Вселенной является двухчастичная корреляционная функция [27], определяющая совместную вероятность

$$\delta P = \bar{n}^2 [1 + \xi(r)] \delta V_1 \delta V_2$$

найти по одной галактике в объемах δV_1 и δV_2 , находящихся на расстоянии $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$, и \bar{n}) друг от друга (\bar{n} — среднее число галактик в единице объема, т. е. концентрация).

Согласно предположению об однородности и изотропии распределения материи во Вселенной, средняя плотность галактик \bar{n} не должна зависеть от координат, а $\xi(r)$ зависит только от расстояния между выбранными точками. Вместо функции $\xi(r)$ часто используется её преобразование Фурье $P(k)$, называемое *спектром мощности*.

$$P(\mathbf{k}) = V^{-1} \int \xi(r) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x},$$

$$\xi(r) = (V/8\pi^3) \int P(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k}.$$

Существует несколько аппроксимаций спектра мощности. Простейшая из них — спектр Гаррисона—Зельдовича

$$P(\mathbf{k}) = Ak^n, \quad n \in (-3, 0), \quad k = |\mathbf{k}|,$$

полученный в рамках канонического инфляционного сценария [19, 20].

Как показано Пиблсом, HZ-спектр генерирует корреляционную функцию асимптотически степенного вида

$$\xi(r) \sim r^{-\alpha},$$

Хотя общепринятой оценкой индекса α считается 1,8, в аппроксимациях разных каталогов его значение варьируется от 1,15 до 2,99 (см. колонку D_2 табл. 1 обзора [15]).

Вариации индекса в разных обзорах могут быть вызваны несоответствием теоретической модели реальной Вселенной, неточной интерпретацией наблюдаемых событий, погрешностями математической обработки данных. Наиболее важные из допущений, используемых в ряде обработок алгоритмов, является пуассоновским типом пространственного распределения галактик. С математической точки зрения, распределение Пуассона предполагает независимость непересекающихся областей, но в случае единственной выборки, каковой является наблюдаемая Вселенная, мы не можем проверить независимость наблюдаемых областей и, строго говоря, не имеем оснований применять предельные теоремы теории вероятностей. Этим мотивируются дальнейшие исследования в этом направлении.

На рис. 7 изображен важнейший участок расстояний, вокруг которого велись оживленные споры на протяжении нескольких десятилетий, в которых в свое время принимал участие и Эйнштейн (см. [7, 9]). В настоящее время показанное поведение корреляционной функции интерпретируется как переход от фрактальной зоны масштабов к однородной. В [33] такие точечные распределения предложено называть мезофракталами. Следует подчеркнуть, что мезофрактал представляет собой однородную (в статистическом смысле) структуру, свойства которой не зависят от выбора начала системы координат (требуется только, чтобы оно совпадало с одной из галактик).

2.4. *Уравнение Орнштейна—Цернике.* Очевидно, простой спектр Гаррисона—Зельдовича более или менее согласуется с наблюдательными данными лишь в ограниченной области волновых чисел и по этой причине было предложено несколько модификаций. Одной из последних является аппроксимация Золотарева—Учайкина, предложенная в книге [37]. Она имеет вид

$$P(\mathbf{k}) = A \frac{e^{-(bk)^\alpha}}{1 - ce^{-(bk)^\alpha}}, \quad (2)$$

где постоянные $A, b > 0$, $0 < \alpha \leq 2$ и $0 < c < 1$ определяются по наблюдательным данным.

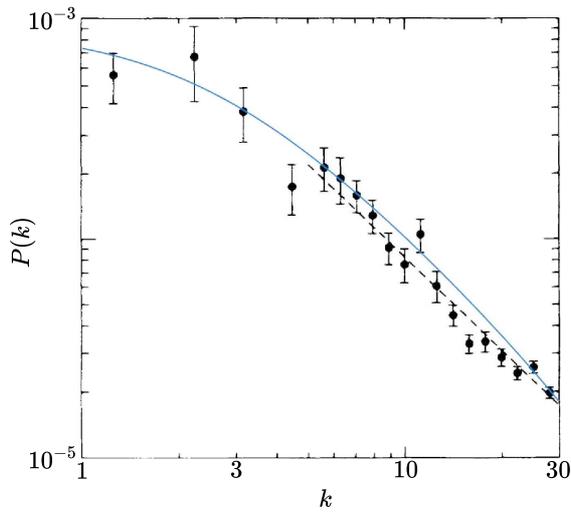


Рис. 6. Спектр мощности каталога Ликской обсерватории (штриховая линия — HZ-спектр с $n = -1,41$; см. [14]).

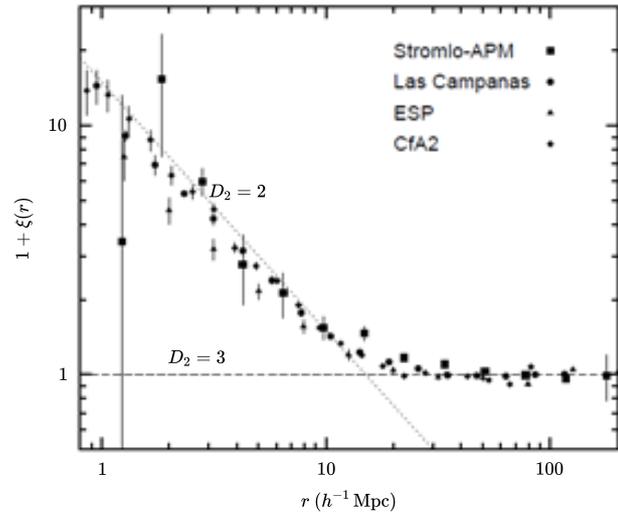


Рис. 7. Структурная функция по разным каталогам. Ясно видно разделение на две зоны: фрактальную (слева) и однородную (справа) (см. [15]).

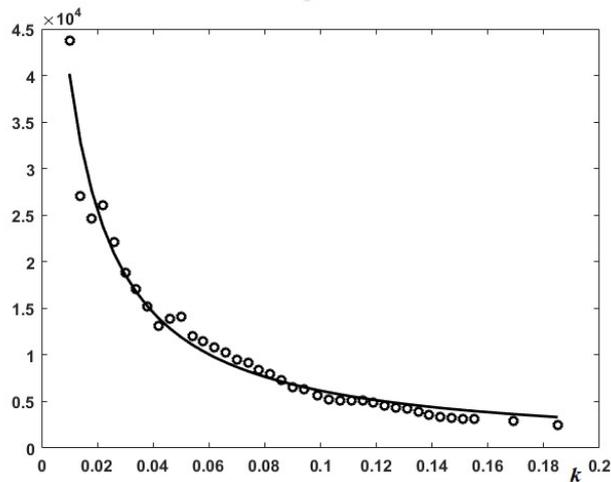


Рис. 8. Аппроксимация спектра мощности каталога 2dFGRS (см. [9]) (точки) формулой 2 (кривая 2 с параметрами $A = 17,1$, $b = 0,036$, $c = 0,9998$, $q = 0,99980$, $\alpha = 1,06$).

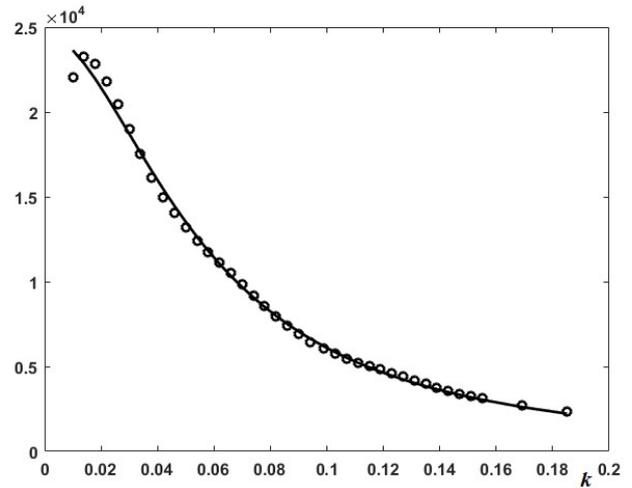


Рис. 9. Аппроксимация сглаженного спектра того же обзора, взятого из той же работы. Параметры кривой $A = 39,1$, $b = 1,94$, $c = 0,984$, $\alpha = 1,87$.

Чтобы понять происхождение этого анзаца, достаточно умножить обе части уравнения 2 на знаменатель в его правой части и выполнить обратное преобразование Фурье. В результате мы придем к выведенному в первой части обзора уравнению Орнштейна—Цернике для $\xi(r)$

$$\xi(r) = Ap(\mathbf{x}/b)/b^3 + (c/b^3) \int \xi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)p(\mathbf{x}'/b)d\mathbf{x}'$$

с ядром

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k^\alpha} d\mathbf{k},$$

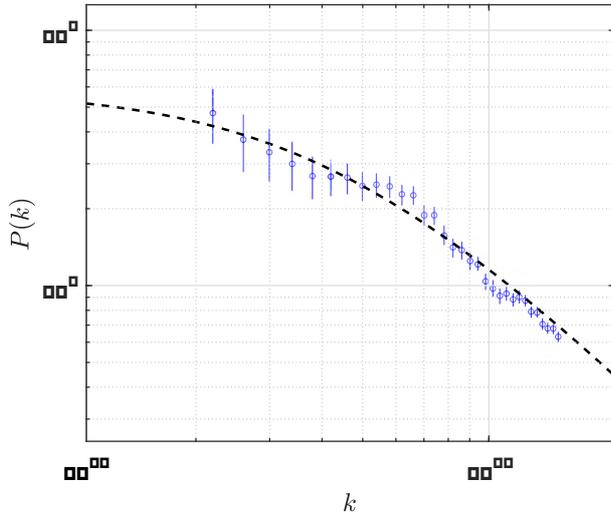


Рис. 10. Аппроксимация спектра мощности каталога 2dFGRS [28] формулой 2 с параметрами $A = 586$, $b = 1,23$, $c = 0,99$, $\alpha = 1,53$.

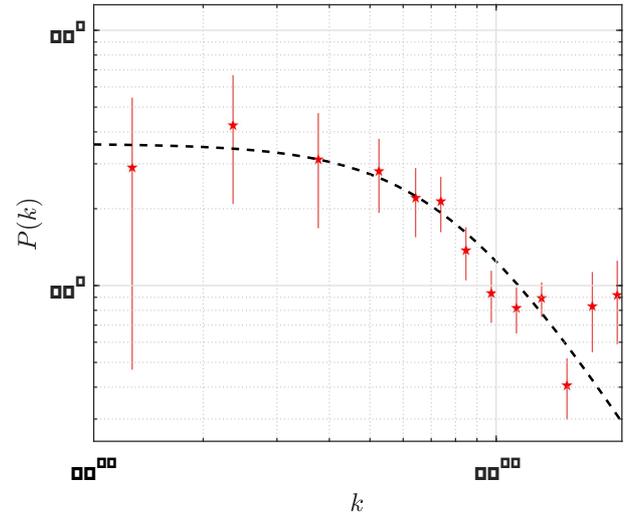


Рис. 11. Аппроксимация спектра мощности того же каталога, сглаженного методом сферических гармоник [29] (параметры $A = 35,9$, $b = 0,88$, $c = 0,999$, $\alpha = 2,58$).

являющимся плотностью трехмерного устойчивого изотропного распределения Леви—Фельдгейма. Уравнение это можно рассматривать как полуэмпирическую модификацию соответствующего уравнения (1) для гравитационной плазмы [5].

Четыре параметра, содержащиеся в новом анзаце, делают его не только гибким инструментом для более тонкой настройки модели, но и (своей связью с интегральным уравнением, легко интерпретируемым в терминах теории случайных блужданий) дают основу для статистического моделирования таких ансамблей. Полезно иметь в виду, что материальные параметры A и b относятся к масштабным характеристикам неоднородностей, тогда как безразмерные α и c определяют фрактальную размерность фрактальной зоны мезофрактала и (вкупе с b) размер этой зоны. Преимущество УЗ-аппроксимации перед ГЗ-аналогом демонстрирует рис. 6. Рисунки 8—11 дают убедительную картину высокой адаптивности УЗ-аппроксимации.

Численное исследование этой аппроксимации спектра мощности выполнено в нашей статье [36] на реальных спектрах мощности. Входящие в аппроксимацию постоянные определялись путем минимизации функционала

$$\Phi(c, q, \alpha) = A^2 \sum_i p_i^2 - 2A \sum_i P_i p_i + \sum_i P_i^2$$

по этим параметрам. Поскольку

$$\sum_i p_i^2 > 0,$$

графики $P(k)$ представляются частями U -параболы, значения параметров указаны в подрисовочных подписях.

3. Мультифракталы. Чтобы избежать смешения понятия мезофрактал с родственным ему по смыслу и звучанию термином мультифрактал, остановимся кратко на последнем.

3.1. Метод ячеек и статсумма. Рассмотрим множество изолированных точек, представляющих положения галактик в трехмерном евклидовом пространстве. Основное положение метода ячеек заключается в разбиении пространства на N ячеек одинаковых размеров $\epsilon \times \epsilon \times \epsilon$, покрывающих в совокупности заданную систему n точек (галактик). Ячейке с номером j приписывается вероятностная мера

$$\bar{p}_j(\epsilon) = n_j/n, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N,$$

где n_j — число галактик в этой ячейке,

$$\sum_{j=1}^N n_j = n.$$

Если бы речь шла о сосуде с идеальным газом, все ячейки были бы заполнены его молекулами почти (с точностью до пуассоновых флуктуаций) одинаково. Однако наблюдаемое распределение галактик имеет иной вид: часть из них группируется в скопления (кластеры) разных размеров, перемежаемые большими полостями (войдами) с пониженными концентрациями материи. В процессе измельчения сети ячеек (т. е. при $\epsilon \rightarrow 0$) все большая часть из них оказывается пустой. Обозначим число занятых ячеек при уровне измельчения ϵ через $M(\epsilon)$ и введем в рассмотрение фрактальный аналог статистической суммы

$$Z(q, \epsilon) = \sum_{j=1}^N [\bar{p}_j(\epsilon)]^q = \sum_{j=1}^M [\bar{p}_j(\epsilon)]^{q-1} \bar{p}_j(\epsilon).$$

Введем новую независимую переменную $\tau = \tau(q)$, определив ее через показатель масштабного множителя статсуммы в формуле

$$\Gamma_1(q, \tau, \epsilon) = \epsilon^{-\tau} Z(q, \epsilon) = \epsilon^{-\tau} \sum_{j=1}^M [\bar{p}_j(\epsilon)]^q. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что при измельчении ячеек

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_1(q, \tau, \epsilon) = \begin{cases} \infty, & \tau > \tau(q), \\ C, & \tau = \tau(q), \\ 0, & \tau < \tau(q), \end{cases} \quad (4)$$

где $C \neq 0$ — конечное число. Таким образом, операция (4) определяет новую функцию $\tau(q)$, для которой (точнее, для выражения Γ_1 , содержащего эту функцию) указанный предел конечен. Поскольку соответствующие значения

$$D_q = (q - 1)^{-1} \tau(q)$$

фактически обобщают понятие размерности, предложенного Хаусдорфом в 1919 г. для множеств, явно не являющихся однородными фракталами, эти величины называются *обобщенными размерностями*. В частности, значения D_1 и D_2 называются *информационной* и *корреляционной* размерностями.

3.2. Мультифрактальная мера. В методе ячеек только небольшая область r имеет значение при вычислении суммы разбиений (3) из-за дискретности выборки. Если r слишком мало, на ячейку приходится только точка; если r слишком велико, представляющие галактики точки распределены по ячейке почти равномерно, статистика плохая. Эти соображения привели к поиску других алгоритмов, одним из которых является корреляционный [18]. Для каждой галактики с индексом i подсчитывается число галактик $n_i(r)$, находящихся в сфере радиусом r вокруг этой галактики и определяется отношение

$$p_i(r) = \frac{n_i(r)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N 1_+(r_{ij} - r),$$

где N — полное число галактик в выборке, $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, а $1_+(x)$ — ступенчатая функция Хэвисайда. Совокупность чисел p_i показывает относительную заселенность ячеек: чем меньше ее размер, тем меньше её заселенность. Для самоподобных множеств зависимость p_i от размера ячейки r имеет степенной характер,

$$p_i(r) \approx r^{\alpha_i},$$

где α_i — показатели степени (разные, вообще говоря, для разных ячеек). Для однородного фрактала все они одинаковы и равны фрактальной размерности D (по этой причине он часто называется *монофракталом*). Статсумма монофрактала

$$Z(q, r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [p_i(r)]^{q-1}.$$

Если эти моменты зависят степенным образом от r , такую меру называют *мультифрактальной*, ее статсумма

$$Z(q, r) = r^{\tau(q)} Z_0(q),$$

а

$$\tau(q) = \frac{d \ln Z(q, r)}{d \ln r}.$$

В аналитическом отношении удобно показатели α_i в выражении $p_i(r) = r^{\alpha_i}$. Представляя эти значения плотно распределенными, Grassberger et al. 1988 ввели α -спектр $f(\alpha)$, определяемый соотношением

$$N(\alpha_i \in (\alpha, \alpha + d\alpha)) \sim N |\ln r|^{1/2} r^{\alpha - f(\alpha)} d\alpha.$$

3.3. Мультифрактальные спектры и обобщенные размерности. Статистические свойства широкого класса фрактальных точечных множеств с равным успехом могут быть описаны как с помощью спектральной функции $f(\alpha)$, так и с применением обобщенных размерностей D_q . В случае однородного фрактала спектр $f(\alpha)$ вырождается в изолированную точку $\alpha_0 = f(\alpha_0) = D_0$. Чтобы убедиться в этом, представим статсумму в виде интеграла

$$Z(q, r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [p_i(r)]^{q-1} = \frac{1}{N} \int r^{(q-1)\alpha} n(\alpha) d\alpha = \int |\ln r|^{1/2} r^{\alpha q - f(\alpha)} d\alpha.$$

Вычисление интеграла методом перевала дает

$$r^{\alpha(q)q - f(\alpha(q))} \left(\frac{\pi}{2f''[\alpha(q)]} \right)^{1/2},$$

где α и τ связаны условием перевала

$$\tau(q) = \alpha q - f''(\alpha), \quad \alpha(q) = d\tau/dq, \quad (5)$$

откуда

$$\alpha(q) = \frac{d\tau}{dq}.$$

Два последних уравнения связывают пары переменных (q, τ) и (α, f) преобразованием Лежандра, что обеспечивает эквивалентность представляемой ими информации о системе. Функция $f(\alpha)$ выпуклая и имеет единственный максимум в точке α_0 , представляющей наиболее часто встречаемое значение показателя автомодельности (скейлинга). Из уравнений (4) и (5) следует, что это случается при $q = 0$, где $f(\alpha_0) = -\tau(0) = D_0$. Предельные же значения показателя α определяются соотношениями

$$\alpha_{\min} = \lim_{q \rightarrow \infty} D_q, \quad \alpha_{\max} = \lim_{q \rightarrow -\infty} D_q.$$

Важная информация о степени неоднородности точечного распределения содержится во второй производной $f(\alpha)$

$$\frac{d^2 f}{d\alpha^2} = \left(\frac{d^2 \tau}{dq^2} \right)^{-1} = \frac{1}{\tau''}.$$

Кривизна графика $\tau(q)$ является мерой его отклонения от линейного закона, соответствующего однородному фракталу. Если $\tau''(q) = 0$, распределение точек является простым фракталом, а $|\tau''(q)|$ является мерой разнообразия структур, наблюдаемых в мультифрактальном множестве. Согласно [23] спектральная функция $f(\alpha)$ содержит исчерпывающую информацию о подробностях точечного распределения и может стать эффективным инструментом для статистического

анализа распределения галактик в пространстве. В цитируемой статье приведено несколько показательных примеров, демонстрирующих этот подход в действии.

При моделировании точечных распределений часто используют мультифракталы с дискретным спектром. Мультифрактал, спектр которого характеризуется одним значением, называют текститмофракталом. К их числу относятся модели фрактальной пыли и дробного пуассоновского процесса, рассмотренные в первой части обзора. Во второй части мы ввели мезофрактал — точечное распределение, состоящее из непрерывно перемешанных двух зон: фрактальной с показателем α , и однородной, которой естественно приписать показатель $\alpha = 3$. Таким образом, наш мезофрактал оказался частным случаем мультифрактала, спектр которого состоит из двух значений. Такие мультифракталы естественно назвать *бифракталами*. Математический анализ бифрактальной модели проведен в работах [6, 16] и др.

4. Заключение. В завершение обзора приведем несколько соображений по этой теме, высказанных в тематическом издании [24].

Существование фрактальной зоны в распределении галактик, по-видимому, не подвергается сомнению, хотя некоторые авторы предпочитают использовать такие термины, как «самоподобная зона» или «зона скейлинга», которые имеют то же значение, но звучат менее определенно. Другие авторы говорят, что у них есть доказательства того, что фрактальная модель не работает, но они умышленно ограничивают область применения «фрактальной модели» «чисто математическим» случаем бесконечных фракталов. Доказательства в пользу фракталов в основном следующие. С одной стороны, модели Мандельброта поразительно легко адаптируются не только к наблюдаемым корреляционным свойствам, но и к визуальным образам, доставляемым астрономическими средствами. С другой стороны, предположим, что геометрическая модель распределения не может быть фракталом. Может ли она соответствовать наблюдаемым степенным функциям корреляции и иметь правильный внешний вид, воспроизводимый с помощью лишь небольшого числа параметров? Вряд ли можно найти математическое доказательство утверждения того, что это невозможно, но неизвестны, однако, и его опровержения. По этой причине исследователю крупномасштабных структур полезно помнить о свойствах фракталов, стремиться узнать больше о поразительно богатом разнообразии паттернов, появляющихся в простых фрактальных построениях, и ближе познакомиться с основами фрактального анализа. Частые ссылки на фракталы могут создать впечатление, что фрактальная геометрия сводится к нескольким простым примерам автомодельности структур, но это далеко не так: негауссова статистика и нелокальные процессы, сейсродинамика и турбулентная диффузия, системы с памятью и термодинамика фуллеренов, кинетические процессы в живых тканях и космологии в пространствах дробных размерностей — вот далеко не полный перечень направлений, в которых мы можем встретить эффективные приложения фрактального, как и некоторых его модификаций типа мезофракталов, рассмотренных в настоящем обзоре.

И еще два замечания из статьи [26], авторы которой тяготеют к парадигме безграничного самоподобия фрактальной Вселенной, и даже допуская противное, признают актуальность нетрадиционных методов статистического анализа, которым посвящен настоящий обзор.

Нельзя пока исключить, что распределение видимой материи действительно становятся однородными начиная с какого-то крупного масштаба, который еще не наблюдается. Однако, даже если это окажется и так, лучший способ определить возможный кроссовер — использовать методы, которые мы описали, а не обычные. С теоретической точки зрения диапазон фрактальных флуктуаций, простирающийся не менее чем на три порядка, в любом случае следует рассматривать с помощью новых теоретических концепций. Затем следует изучить (возможный) переход к однородности как дополнительную проблему. На данный момент, однако, нет явных экспериментальных данных, однозначно указывающих на существование кроссовера, и в теоретическом плане допустимо пользоваться монофрактальной моделью, по крайней мере, для светящейся материи.

Второе замечание касается более фундаментальной проблемы — темной материи. Предыдущие рассуждения относятся к светящейся материи, и было бы очень хорошо, если бы новая картина

видимой Вселенной могла в какой-то степени прояснить значение темной материи в эволюции этой структуры. Пока ситуация остается неясной. Есть, впрочем, два возможных варианта.

- (i) Темная материя существенно связана со светящейся материей. Это не обязательно означает отсутствие расширения или большого взрыва. Это означает, однако, что эти явления должны описываться более сложными моделями, нежели FRW.
- (ii) Если же темная материя является однородной, а светящаяся материя — монофракталом, то в больших масштабах темная материя будет доминировать над гравитационным полем и метрика FRW снова становится оправданной.

Однако видимая материя остается самоподобной, и неаналитический, и ее анализ по-прежнему требует новых теоретических методов, излагаемых в настоящем обзоре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вейнберг С. Гравитация и космология. — М.: Мир, 1975.
2. Кольчужкин А. И., Учайкин В. В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. — М.: Атомиздат, 1978.
3. Учайкин В. В. Спонтанная кластеризация в марковских цепях I. Фрактальная пыль// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2023. — 220. — С. 125–144.
4. Учайкин В. В., Коробко Д. А., Гисмятов И. Ф. Модифицированный алгоритм Мандельброта стохастического моделирования распределения галактик фрактального типа// Изв. вузов. Физ. — 1997. — 8. — С. 7–13.
5. Altenberger A. R., Dahler J. S. On the galactic pair correlation function for a gravitational plasma// Astrophys. J. — 1994. — 421. — P. L9–L12.
6. Balian R., Schaeffer R. Scale-invariant matter distribution in the Universe// Astron. Astrophys. — 1989. — 226. — P. 373–414.
7. Baryshev Y. V., Labini F., Montuori M., Pietronero L. Facts and ideas in modern cosmology// Vistas Astron. — 1994. — 38. — P. 419–500.
8. Borgani S. Scaling in the Universe// Phys. Rep. — 1995. — 251. — P. 1–152.
9. Cole S., Percival W. J., et al. The 2dF Galaxy Redshift Survey: Power-spectrum analysis of the final dataset and cosmological implications// Month. Not. Roy. Astron. Soc. — 2005. — 362. — P. 505–534.
10. Coleman P. H., Pietronero L. Fractal structure of the Universe// Phys. Rep. — 1992. — 213. — P. 311–389.
11. Coles P., Moscardini L., Plionis M. et al. Topology in 2D. IV. CDM Models with Non-Gaussian Initial conditions// Month. Not. Roy. Astron. Soc. — 1993. — 260. — P. 572.
12. Davis M., Meiksin A., Strauss M. et al. On the universality of the two-point galaxy correlation function// Astron. J. — 1988. — 333. — P. L9–L12.
13. Einasto J., Klypin A. A., Saar E. Structure of superclusters and supercluster formation. V. Spatial correlation and voids// Month. Not. Roy. Astron. Soc. — 1986. — 219. — P. 457–478.
14. Fry J. N. Gravity, bias, and the Galaxy three-point correlation function// Phys. Rev. Lett. — 1994. — 73, № 2. — P. 215–219.
15. Jones B. J., Martinez V. J., Saar E., Trimble V. Scaling laws in the distribution of galaxies// Rev. Mod. Phys. — 2005. — 76. — P. 1211–1266.
16. Gaite J. Halos and voids in a multifractal model of cosmic structure// Astrophys. J. — 2007. — 658. — P. 11–24.
17. Geller M. The large-scale distribution of galaxies// in: Astronomy, Cosmology and Fundamental Physics (Caffo M., Fanti R., Giacomelli G., Renzini A., eds.). — Dordrecht: Springer, 1989. — P. 83–103.
18. Grassberger P., Procaccia I. Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal// Phys. Rev. A. — 1983. — 28, № 4. — P. 2591–2593.
19. Guth A. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems// Phys. Rev. D. — 1981. — 23. — P. 347–356.
20. Linde A. The inflationary Universe// Rep. Prog. Phys. — 1984. — 47. — P. 925–986.
21. Mandelbrot B. B. Fonctions aléatoires pluri-temporelles: approximation poissonienne du cas brownien et généralisations// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. — 1975. — 280. — P. 1075–1078.
22. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. — New York: W. H. Freeman, 1983.

23. *Martinez V. J., Jones B. J. T., Dominguez-Tenreiro R.* Clustering paradigms and multifractal measures// *Astrophys. J.* — 1990. — 357. — P. 50–61.
24. *Mezzetti M. et al.* Large Scale Structure and Motions in the Universe. — Dordrecht: Springer, 1989.
25. *Pietronero L.* The fractal structure of the universe: Correlations of galaxies and clusters and the average mass density// *Physica A.* — 1987. — 144, № 2-3. — P. 257–284.
26. *Pietronero L., Montuori M., Sylos Labini F.* On the fractal structure of the visible universe/ [arXiv: astro-ph/9611197](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9611197).
27. *Peebles P. J. E.* The Large-Scale Structure of the Universe. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1980.
28. *Percival W. J. et al.* The 2dF Galaxy Redshift Survey: the power spectrum and the matter content of the Universe// *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2001. — 327, № 4. — P. 1297–1306.
29. *Percival W. J. et al.* The 2dF Galaxy Redshift Survey: Spherical harmonics analysis of fluctuations in the final catalogue// *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2004. — 353, № 4. — P. 1201–1220.
30. *Ribeiro M. B., Miguelote A. Y.* Fractals and the distribution of galaxies// *Brazil. J. Phys.* — 1998. — 28, № 2. — P. 132–160.
31. *Saunders W. et al.* The density field of the local Universe// *Nature.* — 1991. — 349. — P. 32–38.
32. *Takayasu H.* Stable distribution and Lévy process in fractal turbulence// *Progr. Theor. Phys.* — 1984. — 72. — P. 471–478.
33. *Uchaikin V. V.* The mesofractal universe driven by Rayleigh–Lévy walk// *Gen. Relat. Grav.* — 2004. — 36, № 7. — P. 1689–1718.
34. *Uchaikin V., Gismjatov I., Gusarov G., Svetukhin V.* Paired Lévy–Mandelbrot trajectory as a homogeneous fractal// *Int. J. Bifurcation Chaos.* — 1998. — 8, № 5. — P. 977–984.
35. *Uchaikin V. V., Gusarov G. G.* Lévy flight applied to random media problems// *J. Math. Phys.* — 1997. — 38. — P. 2453–2464.
36. *Uchaikin V. V., Litvinov V. A., Kozhemyakina E. V., Kozhemyakin I. I.* A random walk model for spatial galaxy distribution// *Mathematics.* — 2021. — 9, № 1. — P. 1–17.
37. *Uchaikin V. V., Zolotarev V. M.* Chance and stability. Stable distributions and their applications. — Utrecht, The Netherlands: VSP, 1999.

Учайкин Владимир Васильевич
Ульяновский государственный университет
E-mail: vuchaikin@gmail.com