ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 3–20
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-3-20

УДК 514.763

АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ. III. ФОРМЫ КРИВИЗНЫ ПЯТИМЕРНЫХ ЖЕСТКИХ h-ПРОСТРАНСТВ В КОСОНОРМАЛЬНОМ РЕПЕРЕ

© 2022 г. **А. В. АМИНОВА, Д. Р. ХАКИМОВ**

Аннотация. Работа посвящена имеющей многочисленные геометрические и физические приложения проблеме исследования многомерных псевдоримановых многообразий, допускающих алгебры Ли инфинитезимальных проективных (в частности, аффинных) преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий. Настоящая статья является третьей частью работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *212*. — С. 10–29. Вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *213*. — С. 10–37. Продолжение будет опубликовано в следующих выпусках.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, пятимерное псевдориманово многообразие, h-пространство, система дифференциальных уравнений с частными производными, негомотетическое проективное движение, уравнение Киллинга, проективная алгебра Ли.

LIE ALGEBRAS OF PROJECTIVE MOTIONS OF FIVE-DIMENSIONAL PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES. III. CURVATURE FORMS OF FIVE-DIMENSIONAL RIGID h-SPACES IN A SKEW-NORMAL FRAME

© 2022 **A. V. AMINOVA, D. R. KHAKIMOV**

Abstract. This work is devoted to the problem of studying multidimensional pseudo-Riemannian manifolds that admit Lie algebras of infinitesimal projective (in particular, affine) transformations, wider than Lie algebras of infinitesimal homotheties. Such manifolds have numerous geometric and physical applications. This paper is the third part of the work. The first part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — *212*. — P. 10–29. The second part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — *213*. — P. 10–37. Continuation will be published in future issues.

Keywords and phrases: differential geometry, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h-space, system of partial differential equations, nonhomothetical projective motion, Killing equation, projective Lie algebra.

AMS Subject Classification: 53Z05

3. Формы кривизны пятимерных жестких h-пространств в косонормальном репере

Для получения максимальных аффинной и проективной групп (алгебр Ли) нужно найти общее решение уравнений Эйзенхарта в каждом из найденных h-пространств, что приводит к необходимости рассмотрения условий интегрируемости этих уравнений, включающих тензор кривизны R. В частности, нужно выделить пространства постоянной кривизны S^n, допускающие максимальную n^2+2n-мерную проективную группу, строение которой хорошо известно (см., например, [13, гл. 4]).

Цель этого раздела — определить все пятимерные жесткие h-пространства непостоянной кривизны, вычислив с помощью структурных уравнений Картана формы кривизны найденных пространств в адаптированном косонормальном репере и получив необходимые и достаточные условия постоянства кривизны.

3.1. Формы кривизны h-пространств типа $\{221\}$.

3.1.1. Исследуем h-пространства H_{221} типа $\{221\}$. Метрика g h-пространства H_{221} и соответствующая билинейная форма $a = h - 2\varphi g$ определяются каноническими формами (**??**), причем выполняются уравнения (**??**), в которых вместо λ_1, λ_2, λ_3 подставлены соответственно f_1, f_2, f_3:

$$Y_1\varphi = Y_3\varphi = 0, \tag{3.1}$$

$$df_1 = e_1(Y_2\varphi)\theta_1, \quad df_2 = e_2(Y_4\varphi)\theta_3, \quad df_3 = 2e_3(Y_5\varphi)\theta_5, \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \omega_{14} = \dfrac{Y_4\varphi}{f_2-f_1}\theta_1, \quad \omega_{15} = \dfrac{Y_5\varphi}{f_3-f_1}\theta_1, \quad \omega_{21} = (Y_2\varphi)\theta_2, \quad \omega_{23} = \dfrac{Y_2\varphi}{f_2-f_1}\theta_3, \\ \omega_{24} = \dfrac{Y_4\varphi}{(f_2-f_1)^2}\theta_1 + \dfrac{Y_4\varphi}{f_2-f_1}\theta_2 - \dfrac{Y_2\varphi}{(f_2-f_1)^2}\theta_3 + \dfrac{Y_2\varphi}{f_2-f_1}\theta_4, \\ \omega_{25} = \dfrac{Y_5\varphi}{(f_3-f_1)^2}\theta_1 + \dfrac{Y_5\varphi}{f_3-f_1}\theta_2 + \dfrac{Y_2\varphi}{f_3-f_1}\theta_5, \\ \omega_{35} = \dfrac{Y_5\varphi}{f_3-f_2}\theta_3, \quad \omega_{43} = (Y_4\varphi)\theta_4, \\ \omega_{45} = \dfrac{Y_5\varphi}{(f_3-f_2)^2}\theta_3 + \dfrac{Y_5\varphi}{f_3-f_2}\theta_4 + \dfrac{Y_4\varphi}{f_3-f_2}\theta_5, \end{cases} \tag{3.3}$$

где

$$\varphi = f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3 \tag{3.4}$$

— определяющая функция проективного движения типа $\{221\}$, $\omega_{ij} = \gamma_{jik}\theta^k$ есть 1-форма связности в косонормальном репере (Y_h),

$$f_1 = \varepsilon_1 x^2 + (1-\varepsilon_1)\kappa_1, \quad f_2 = \varepsilon_2 x^4 + (1-\varepsilon_2)\kappa_2, \quad f_3 = \mu(x^5),$$

ε_1 и ε_2 принимают значения 0 и 1, κ_1, κ_2 — постоянные, $e_1, e_2, e_3 = \pm 1$.

Используя первое структурное уравнение Картана

$$d\theta_i = -\sum_{j=1}^{5} e_j \omega_{ij} \wedge \theta_{\tilde{j}} \tag{3.5}$$

(см. [13, с. 102]) и формулы (3.3), найдем

$$\begin{aligned}
d\theta_1 &= -e_1(Y_2\varphi)\theta_1\wedge\theta_2 - \frac{e_2(Y_4\varphi)}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_3 - \frac{e_3(Y_5\varphi)}{f_3-f_1}\theta_1\wedge\theta_5,\\
d\theta_2 &= -\frac{e_2(Y_4\varphi)}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_3 - \frac{e_3(Y_5\varphi)}{(f_3-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_5 - \frac{e_2(Y_4\varphi)}{f_2-f_1}\theta_2\wedge\theta_3 - \frac{e_3(Y_5\varphi)}{f_3-f_1}\theta_2\wedge\theta_5,\\
d\theta_3 &= -\frac{e_1(Y_2\varphi)}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_3 - e_2(Y_4\varphi)\theta_3\wedge\theta_4 - \frac{e_3(Y_5\varphi)}{f_3-f_2}\theta_3\wedge\theta_5,\\
d\theta_4 &= \frac{e_1(Y_2\varphi)}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_3 - \frac{e_1(Y_2\varphi)}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_4 - \frac{e_3(Y_5\varphi)}{(f_3-f_2)^2}\theta_3\wedge\theta_5 - \frac{e_3(Y_5\varphi)}{f_3-f_2}\theta_4\wedge\theta_5,\\
d\theta_5 &= -\frac{e_1(Y_2\varphi)}{f_3-f_1}\theta_1\wedge\theta_5 - \frac{e_2(Y_4\varphi)}{f_3-f_2}\theta_3\wedge\theta_5.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Введем обозначения

$$A_1 \equiv Y_2\varphi, \quad A_2 \equiv Y_4\varphi, \quad A_3 \equiv Y_5\varphi,$$
$$C_1 \equiv e_1 Y_2(Y_2\varphi), \quad C_2 \equiv e_2 Y_4(Y_4\varphi), \quad C_3 \equiv e_3 Y_5(Y_5\varphi).$$

Дифференцируя внешним образом равенство

$$df_1 = e_1(Y_2\varphi)\theta_1 \equiv e_1 A_1\theta_1$$

(см. (3.2)) и сравнивая результат с

$$dA_1 = \theta^l Y_l Y_2\varphi = \theta^l [Y_l, Y_2] + \theta^l Y_2 Y_l\varphi,$$

с учетом (3.1) и (**??**)получим

$$dA_1 = C_1\theta_1 - e_1 A_1^2\theta_2 - A_1\left(e_2\frac{A_2}{f_2-f_1}\theta_3 + e_3\frac{A_3}{f_3-f_1}\theta_5\right).$$

Так же вычисляются dA_2 и dA_3.

Дифференцируя уравнения (3.3) и используя (3.6), найдем

$$d\omega_{12} = -C_1\theta_1\wedge\theta_2 + \frac{e_2A_1A_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_3 + \frac{e_3A_1A_3}{(f_3-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_5, \quad d\omega_{13} = 0,$$

$$\begin{aligned}
d\omega_{14} = &-\frac{e_1A_1A_2}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_2 - \frac{C_2}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_3 + \frac{e_2A_2^2}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_4 -\\
&-\left(\frac{e_3A_2A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)} - \frac{e_3A_2A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_2)}\right)\theta_1\wedge\theta_5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_{15} = &-\frac{e_1A_1A_3}{f_3-f_1}\theta_1\wedge\theta_2 - \left(\frac{e_2A_2A_3}{(f_3-f_1)(f_2-f_1)} - \frac{e_2A_2A_3}{(f_3-f_1)(f_2-f_3)}\right)\theta_1\wedge\theta_3 -\\
&-\left(\frac{C_3}{f_3-f_1} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_{23} = &\frac{C_1}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_3 - \frac{e_1A_1^2}{f_2-f_1}\theta_2\wedge\theta_3 - \frac{e_2A_1A_2}{f_2-f_1}\theta_3\wedge\theta_4 +\\
&+\left(\frac{e_3A_1A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)} - \frac{e_3A_1A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_2)}\right)\theta_3\wedge\theta_5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_{24} = &\frac{e_1A_1A_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_2 - \left(\frac{C_1}{(f_2-f_1)^2} + \frac{C_2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_3 + \left(\frac{C_1}{f_2-f_1} + \frac{e_2A_2^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_4 +\\
&+\left(\frac{e_3A_2A_3}{(f_2-f_1)^2(f_3-f_2)} - \frac{e_3A_2A_3}{(f_2-f_1)^2(f_3-f_1)} - \frac{e_3A_2A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5 -
\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{C_2}{f_2-f_1}-\frac{e_1A_1^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_2\wedge\theta_3+\left(\frac{e_2A_2^2}{f_2-f_1}-\frac{e_1A_1^2}{f_2-f_1}\right)\theta_2\wedge\theta_4+$$
$$+\left(\frac{e_3A_2A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_2)}-\frac{e_3A_2A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)}\right)\theta_2\wedge\theta_5-\frac{e_2A_1A_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_3\wedge\theta_4-$$
$$-\left(\frac{e_3A_1A_3}{(f_2-f_1)^2(f_3-f_1)}-\frac{e_3A_1A_3}{(f_2-f_1)^2(f_3-f_2)}+\frac{e_3A_1A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_2)^2}\right)\theta_3\wedge\theta_5+$$
$$\left(\frac{e_3A_1A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)}-\frac{e_3A_1A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_2)}\right)\theta_4\wedge\theta_5,$$

$$d\omega_{25}=\frac{e_1A_1A_3}{(f_3-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_2+\left(\frac{e_2A_2A_3}{(f_3-f_1)^2(f_2-f_3)}-\frac{e_2A_2A_3}{(f_3-f_1)^2(f_2-f_1)}\right)\theta_1\wedge\theta_3+$$
$$+\left(\frac{e_2A_2A_3}{(f_2-f_1)^2(f_3-f_1)}\right)\theta_1\wedge\theta_3-\left(\frac{C_3}{(f_3-f_1)^2}-\frac{2e_3A_3(A_3)}{(f_3-f_1)^3}-\frac{C_1}{f_3-f_1}\right)\theta_1\wedge\theta_5+$$
$$+\left(\frac{e_2A_3(A_2)}{(f_3-f_1)(f_2-f_3)}-\frac{e_2A_3(A_2)}{(f_3-f_1)(f_2-f_1)}\right)\theta_2\wedge\theta_3-$$
$$-\left(\frac{C_3}{f_3-f_1}+\frac{e_1A_1^2}{f_3-f_1}-\frac{e_3A_3(A_3)}{(f_3-f_1)^2}\right)\theta_2\wedge\theta_5-$$
$$-\left(\frac{e_2A_1(A_2)}{(f_3-f_1)(f_2-f_1)}+\frac{e_2A_1(A_2)}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)}\right)\theta_3\wedge\theta_5,$$

$$d\omega_{34}=-\frac{e_1A_1A_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_3-C_2\theta_3\wedge\theta_4+\frac{e_3A_2A_3}{(f_3-f_2)^2}\theta_3\wedge\theta_5,$$

$$d\omega_{35}=-\left(\frac{e_1A_1A_3}{(f_3-f_2)(f_2-f_1)}+\frac{e_1A_1A_3}{(f_3-f_2)(f_1-f_3)}\right)\theta_1\wedge\theta_3-$$
$$-\frac{e_2A_2A_3}{f_3-f_2}\theta_3\wedge\theta_4-\left(\frac{C_3}{f_3-f_2}-\frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^2}\right)\theta_3\wedge\theta_5,$$

$$d\omega_{45}=-\left(\frac{e_1A_3(A_1)}{(f_3-f_2)^2(f_2-f_1)}-\frac{e_1A_1A_3}{(f_3-f_2)(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_3-$$
$$-\left(\frac{e_1A_1A_3}{(f_3-f_2)^2(f_1-f_3)}\right)\theta_1\wedge\theta_3-\left(\frac{e_1A_1A_3}{(f_3-f_2)(f_2-f_1)}+\frac{e_1A_1A_3}{(f_3-f_2)(f_1-f_3)}\right)\theta_1\wedge\theta_4-$$
$$-\left(\frac{e_1A_1A_2}{(f_3-f_2)(f_1-f_2)}+\frac{e_1A_1A_2}{(f_3-f_2)(f_3-f_1)}\right)\theta_1\wedge\theta_5+\frac{e_2A_2A_3}{(f_3-f_2)^2}\theta_3\wedge\theta_4+$$
$$+\left(\frac{C_2}{f_3-f_2}-\frac{C_3}{(f_3-f_2)^2}+\frac{2e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^3}\right)\theta_3\wedge\theta_5-$$
$$-\left(\frac{C_3}{f_3-f_2}-\frac{e_3A_3(A_3)}{(f_3-f_2)^2}+\frac{e_2A_2^2}{f_3-f_2}\right)\theta_4\wedge\theta_5.$$

3.1.2. Пользуясь полученными соотношениями и вторым структурным уравнением Картана

$$\Omega_{ij}=d\omega_{ij}+\sum_{l=1}^{5}e_l\omega_{il}\wedge\omega_{\tilde{l}j}\tag{3.7}$$

(см. [13, с. 102]), вычислим 2-форму кривизны Ω_{ij} h-пространства типа $\{221\}$:

$$\Omega_{12}=-\left(C_1+\frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_2,\quad \Omega_{13}=-\frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)}\theta_1\wedge\theta_3,$$
$$\Omega_{14}=-\left(\frac{C_2}{f_2-f_1}+\frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_3-\frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)}\theta_1\wedge\theta_4,$$

$$\Omega_{15} = -\left(\frac{C_3}{f_3-f_1} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5,$$
$$\Omega_{23} = \left(\frac{C_1}{f_2-f_1} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)}\right)\theta_1\wedge\theta_3 - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^(f_3-f_2)}\theta_2\wedge\theta_3,$$

$$\Omega_{24} = -\left(\frac{C_1}{(f_2-f_1)^2} + \frac{C_2}{(f_2-f_1)^2} + \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_3+$$
$$+\left(\frac{C_1}{f_2-f_1} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)}\right)\theta_1\wedge\theta_4 - \left(\frac{C_2}{f_2-f_1} + \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)^2}\right)\theta_2\wedge\theta_3-$$
$$-\frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)}\theta_2\wedge\theta_4, \quad (3.8)$$

$$\Omega_{25} = -\left(\frac{C_3}{(f_3-f_1)^2} - \frac{2e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^3} - \frac{C_1}{f_3-f_1}\right)\theta_1\wedge\theta_5 - \left(\frac{C_3}{f_3-f_1} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2}\right)\theta_2\wedge\theta_5,$$
$$\Omega_{34} = -\left(C_2 + \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^2}\right)\theta_3\wedge\theta_4, \quad \Omega_{35} = -\left(\frac{C_3}{f_3-f_2} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^2}\right)\theta_3\wedge\theta_5,$$
$$\Omega_{45} = -\frac{C_3}{(f_3-f_2)^2}\theta_3\wedge\theta_5 + \left(\frac{C_2}{f_3-f_2} + \frac{2e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^3}\right)\theta_3\wedge\theta_5 - \left(\frac{C_3}{f_3-f_2} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^2}\right)\theta_4\wedge\theta_5.$$

3.1.3. Запишем 2-форму кривизны в виде
$$\Omega_{ij} \equiv \sum_{(kl)} K_{ijkl}\theta_k\wedge\theta_l, \quad k,l = 1,\dots,5,\ k<l, \quad (3.9)$$
и положим $K_{ijij} \equiv \rho_{ij}$; тогда предыдущая формула примет вид
$$\Omega_{ij} = \rho_{ij}\theta_i\wedge\theta_j + \sum_{(kl)\neq(ij)} K_{ijkl}\theta_k\wedge\theta_l, \quad i,j,k,l = 1,\dots,5,\ i<j,\ k<l, \quad (3.10)$$
где в силу (3.8)
$$\rho_{12} = -C_1 - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2}, \quad \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = -\frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)},$$
$$\rho_{34} = -C_2 - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^2}, \quad \rho_{15} = \rho_{25} = -\frac{C_3}{f_3-f_1} + \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2},$$
$$\rho_{35} = \rho_{45} = -\frac{C_3}{f_3-f_2} + \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^2},$$
а из коэффициентов K_{ijkl} при $(kl)\neq(ij)$ отличны от нуля только следующие:
$$K_{1413} = -\frac{C_2}{f_2-f_1} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)^2}, \quad K_{2313} = \frac{C_1}{f_2-f_1} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)},$$
$$K_{2413} = -\frac{C_1+C_2}{(f_2-f_1)^2} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)^2}, \quad K_{2414} = K_{2313}, \quad K_{2423} = K_{1413},$$
$$K_{2515} = -\frac{C_3}{(f_3-f_1)^2} + \frac{2e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^3} + \frac{C_1}{f_3-f_1}, \quad K_{4535} = -\frac{C_3}{(f_3-f_2)^2} + \frac{2e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^3} + \frac{C_2}{f_3-f_2}.$$

Теорема 3.1. *Для того, чтобы h-пространство H_{221} типа $\{221\}$ было пространством постоянной кривизны K, $\Omega_{ij} = K\theta_i\wedge\theta_j$, необходимо и достаточно выполнение условий*
$$K_{1413} = K_{2313} = K_{2515} = 0,$$
что равносильно
$$C_1 = \frac{e_3(f_2-f_1)A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)}, \quad C_2 = -\frac{e_3(f_2-f_1)A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)^2}, \quad C_3 = \frac{e_3(2f_3-f_1-f_2)A_3^2}{(f_1-f_3)(f_2-f_3)}; \quad (3.11)$$

при этом $K_{ijkl} = 0$ *для всех* $(kl) \neq (ij)$,

$$\Omega_{ij} = \rho\theta_i \wedge \theta_j, \quad \rho_{ij} = -\frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)} \equiv \rho = K; \tag{3.12}$$

здесь $i, j, k, l = 1, \ldots, 5,\ i < j,\ k < l$.

Доказательство. Необходимость условий $K_{1413} = K_{2313} = K_{2515} = 0$ следует из соотношения $\Omega_{ij} = K\theta_i \wedge \theta_j$, определяющего пространство постоянной кривизны K. Если выполняется (3.11), то $\rho_{ij} = \rho_{kl}$ для всех $i, j, k, l = 1, \ldots, 5,\ i < j,\ k < l$. Введя обозначение $\rho_{ij} \equiv \rho$, найдем

$$\Omega_{ij} = \rho\theta_i \wedge \theta_j,$$

где по теореме Шура $\rho = \mathrm{const} \equiv K$ (см. [119]). □

3.2. Формы кривизны h-пространств типа $\{32\}$.

3.2.1. В данном разделе исследуются h-пространства типа $\{32\}$. Метрика g h-пространства H_{32} и соответствующая билинейная форма $a = h - 2\varphi g$ определяются каноническими формами (**??**), при этом выполняются уравнения (**??**), где λ_1, λ_2 заменены на f_1, f_2:

$$Y_1\varphi = Y_2\varphi = Y_4\varphi = 0, \tag{3.13}$$

$$df_1 = \frac{2}{3}e_1(Y_3\varphi)\theta_1, \quad df_2 = e_2(Y_5\varphi)\theta_4, \tag{3.14}$$

$$\begin{cases} \omega_{12} = \dfrac{1}{3}(Y_3\varphi)\theta_1, \quad \omega_{13} = -(Y_3\varphi)\theta_2, \quad \omega_{15} = \dfrac{Y_5\varphi}{f_2 - f_1}\theta_1, \\ \omega_{25} = \dfrac{Y_5\varphi}{(f_2 - f_1)^2}\theta_1 + \dfrac{Y_5\varphi}{f_2 - f_1}\theta_2, \quad \omega_{32} = (Y_3\varphi)\theta_3, \quad \omega_{34} = \dfrac{Y_3\varphi}{f_2 - f_1}\theta_4, \\ \omega_{35} = \dfrac{Y_5\varphi}{(f_2 - f_1)^3}\theta_1 + \dfrac{Y_5\varphi}{(f_2 - f_1)^2}\theta_2 + \dfrac{Y_5\varphi}{f_2 - f_1}\theta_3 - \dfrac{Y_3\varphi}{(f_2 - f_1)^2}\theta_4 + \dfrac{Y_3\varphi}{f_2 - f_1}\theta_5, \\ \omega_{45} = -(Y_5\varphi)\theta_5; \end{cases} \tag{3.15}$$

здесь

$$\varphi = \frac{3}{2}f_1 + f_2 \tag{3.16}$$

— определяющая функция проективного движения типа $\{32\}$, ω_{ij} — 1-форма связности в косонормальном репере (Y_h),

$$f_1 = \varepsilon_1 x^3 + (1 - \varepsilon_1)\kappa_1, \quad f_2 = \varepsilon_2 x^5 + (1 - \varepsilon_2)\kappa_2,$$

ε_1 и ε_2 принимают значения 0 или 1, κ_1, κ_2 — постоянные, $e_1, e_2 = \pm 1$.

3.2.2. Используя формулы (3.15), из первого структурного уравнения Картана (3.5) найдем

$$\begin{cases} d\theta_1 = -\dfrac{4e_1(Y_3\varphi)}{3}\theta_1 \wedge \theta_2 - \dfrac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2 - f_1}\theta_1 \wedge \theta_4, \\ d\theta_2 = -\dfrac{2e_1(Y_3\varphi)}{3}\theta_1 \wedge \theta_3 - \dfrac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2 - f_1)^2}\theta_1 \wedge \theta_4 - \dfrac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2 - f_1}\theta_2 \wedge \theta_4, \\ d\theta_3 = -\dfrac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2 - f_1)^3}\theta_1 \wedge \theta_4 - \dfrac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2 - f_1)^2}\theta_2 \wedge \theta_4 - \dfrac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2 - f_1}\theta_3 \wedge \theta_4, \\ d\theta_4 = -\dfrac{e_1(Y_3\varphi)}{f_2 - f_1}\theta_1 \wedge \theta_4 - e_2(Y_5\varphi)\theta_4 \wedge \theta_5, \\ d\theta_5 = \dfrac{e_1(Y_3\varphi)}{(f_2 - f_1)^2}\theta_1 \wedge \theta_4 - \dfrac{e_1(Y_3\varphi)}{f_2 - f_1}\theta_1 \wedge \theta_5. \end{cases} \tag{3.17}$$

Введем обозначения

$$B_1 \equiv Y_3\varphi, \quad B_2 \equiv Y_5\varphi, \quad S_1 \equiv e_1Y_3(Y_3\varphi), \quad S_2 \equiv e_2Y_5(Y_5\varphi).$$

Дифференцируя первое из равенств (3.14):

$$df_1 = \frac{2}{3}e_1(Y_3\varphi)\theta_1 \equiv \frac{2}{3}e_1B_1\theta_1$$

и принимая во внимание, что

$$dB_1 = \theta^l Y_l Y_3\varphi = \theta^l[Y_l, Y_3] + \theta^l Y_3 Y_l\varphi,$$

с учетом (3.13) и (**??**) получим

$$dB_1 = S_1\theta_1 - \frac{4e_1B_1^2}{3}\theta_2 - \frac{e_2B_1B_2}{f_2-f_1}\theta_4. \tag{3.18}$$

Так же найдем

$$dB_2 = S_2\theta_4 - e_2B_2^2\theta_5 - \frac{e_1B_1B_2}{f_1-f_2}\theta_1. \tag{3.19}$$

Дифференцируя (3.15) и пользуясь (3.17), (3.18) и (3.19), получим формулы

$$d\omega_{12} = 0, \quad d\omega_{13} = -S_1\theta_1\wedge\theta_2 + \frac{2e_1B_1^2}{3}\theta_1\wedge\theta_3 + \frac{e_2B_1B_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_4,$$

$$d\omega_{14} = 0, \quad d\omega_{15} = -\frac{4e_1B_1B_2}{3(f_2-f_1)}\theta_1\wedge\theta_2 - \frac{S_2}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_4 + \frac{e_2B_2^2}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_5,$$

$$d\omega_{23} = -S_1\theta_1\wedge\theta_3 + \frac{e_2B_1B_2}{(f_2-f_1)^3}\theta_1\wedge\theta_4 + \frac{4e_1B_1^2}{3}\theta_2\wedge\theta_3 + \frac{e_2B_1B_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_2\wedge\theta_4, \quad d\omega_{24} = 0,$$

$$\begin{aligned} d\omega_{25} = \frac{e_1B_1B_2}{3(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_2 - \frac{2e_1B_1B_2}{3(f_2-f_1)}\theta_1\wedge\theta_3 - \frac{S_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_4 + \\ + \frac{e_2B_2^2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_5 - \frac{S_2}{f_2-f_1}\theta_2\wedge\theta_4 + \frac{e_2B_2^2}{f_2-f_1}\theta_2\wedge\theta_5, \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$d\omega_{34} = \left(\frac{S_1}{f_2-f_1} + \frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_4 - \frac{4e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)}\theta_2\wedge\theta_4 - \frac{e_2B_1B_2}{f_2-f_1}\theta_4\wedge\theta_5,$$

$$\begin{aligned} d\omega_{35} = \frac{e_1B_1B_2}{(f_2-f_1)^3}\theta_1\wedge\theta_2 + \frac{e_1B_1B_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_3 - \left(\frac{S_2}{(f_2-f_1)^3} + \frac{S_1}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_4 + \\ + \frac{2e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^3}\theta_1\wedge\theta_4 + \left(\frac{S_1}{f_2-f_1} + \frac{e_2B_2^2}{(f_2-f_1)^3} - \frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5 - \\ - \left(\frac{S_2}{(f_2-f_1)^2} - \frac{4e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^2}\right)\theta_2\wedge\theta_4 + \left(\frac{e_2B_2^2}{(f_2-f_1)^2} - \frac{4e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)}\right)\theta_2\wedge\theta_5 - \\ - \frac{S_2}{f_2-f_1}\theta_3\wedge\theta_4 + \frac{e_2B_2^2}{f_2-f_1}\theta_3\wedge\theta_5 - \frac{e_2B_1B_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_4\wedge\theta_5, \end{aligned}$$

$$d\omega_{45} = -\frac{e_1B_1B_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_4 - S_2\theta_4\wedge\theta_5.$$

Применив второе структурное уравнение Картана (3.7) и формулы (3.15), (3.20), вычислим компоненты 2-формы кривизны Ω_{ij} h-пространства H_{32} типа $\{32\}$:

$$\Omega_{12} = \frac{e_1B_1^2}{3}\theta_1\wedge\theta_2, \quad \Omega_{13} = -S_1\theta_1\wedge\theta_2 + \frac{e_1B_1^2}{3}\theta_1\wedge\theta_3, \quad \Omega_{14} = 0,$$

$$\Omega_{15} = -\frac{S_2}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_4, \quad \Omega_{23} = -S_1\theta_1\wedge\theta_3 + \frac{e_1B_1^2}{3}\theta_2\wedge\theta_3, \quad \Omega_{24} = -\frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)}\theta_1\wedge\theta_4,$$

$$\Omega_{25} = -\left(\frac{S_2}{(f_2-f_1)^2} - \frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_4 - \frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)}\theta_1\wedge\theta_5 - \frac{S_2}{f_2-f_1}\theta_2\wedge\theta_4,$$

$$\Omega_{34} = \left(\frac{S_1}{f_2-f_1} + \frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_4 - \frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)}\theta_2\wedge\theta_4, \tag{3.21}$$

$$\Omega_{35}=-\left(\frac{S_2}{(f_2-f_1)^3}+\frac{S_1}{(f_2-f_1)^2}-\frac{2e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^3}\right)\theta_1\wedge\theta_4+ \\ +\left(\frac{S_1}{f_2-f_1}-\frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5-\left(\frac{S_2}{(f_2-f_1)^2}-\frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^2}\right)\theta_2\wedge\theta_4- \\ -\frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)}\theta_2\wedge\theta_5-\frac{S_2}{f_2-f_1}\theta_3\wedge\theta_4,$$

$$\Omega_{45}=-S_2\theta_4\wedge\theta_5.$$

3.2.3. Представим 2-форму кривизны в виде (3.9), где $K_{ijij}\equiv\rho_{ij}$ и, благодаря (3.21),

$$\rho_{12}=\rho_{13}=\rho_{23}=\frac{e_1B_1^2}{3},\quad \rho_{45}=-S_2,\quad \rho_{14}=\rho_{15}=\rho_{24}=\rho_{25}=\rho_{34}=\rho_{35}=0,$$

а ненулевые коэффициенты K_{ijkl} при $(kl)\neq(ij)$ определяются равенствами

$$K_{1312}=K_{2313}=-S_1,\quad K_{1514}=K_{2524}=K_{3534}=-\frac{S_2}{(f_2-f_1)},$$

$$K_{2414}=K_{2515}=K_{3424}=K_{3525}=-\frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)},$$

$$K_{2514}=K_{3524}=-\frac{S_2}{(f_2-f_1)^2}+\frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^2},\quad K_{3414}=\frac{S_1}{f_2-f_1}+\frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^2},$$

$$K_{3514}=-\frac{S_2}{(f_2-f_1)^3}-\frac{S_1}{(f_2-f_1)^2}+\frac{2e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^3},\quad K_{3515}=\frac{S_1}{f_2-f_1}-\frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^2}.$$

Теорема 3.2. *H-пространство H_{32} типа $\{32\}$ является пространством постоянной кривизны K, т.е. $\Omega_{ij}=K\theta_i\wedge\theta_j$, тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$K_{1514}=K_{2414}=0,$$

равносильные равенствам

$$B_1=S_2=0; \tag{3.22}$$

при этом $K_{ijkl}=0$ для всех $(kl)\neq(ij)$, т.е. $\Omega_{ij}=0$, и любое h-пространство H_{32} типа $\{32\}$ постоянной кривизны является плоским.

Доказательство. Из формулы $\Omega_{ij}=K\theta_i\wedge\theta_j$, определяющей пространство постоянной кривизны K, следует, в частности, что $K_{1514}=K_{2414}=0$, т.е. (3.22).

Наоборот, если выполняется (3.22), то $\rho_{ij}=\rho_{kl}=0$, для всех $i,j,k,l=1,\dots,5$, $i<j$, $k<l$; при этом $S_1\equiv e_1Y_3(B_1)=0$ и, следовательно, $\Omega_{ij}=0$ для всех $i,j=1,\dots,5$, поэтому $K=0$ и пространство H_{32} является плоским. □

3.3. Формы кривизны h-пространств типа $\{41\}$.

3.3.1. Рассмотрим h-пространства типа $\{41\}$. Канонические формы a_{ij} и g_{ij} задаются формулами (**??**), причем выполняются уравнения (**??**), где $\lambda_1=f_1$, $\lambda_2=f_2$:

$$Y_1\varphi=Y_2\varphi=Y_3\varphi=0, \tag{3.23}$$

$$df_1=\frac{1}{2}(Y_4\varphi)\theta_1,\quad df_2=2(Y_5\varphi)\theta_5, \tag{3.24}$$

$$\begin{cases}\omega_{13}=\dfrac{1}{2}(Y_4\varphi)\theta_1, \quad \omega_{14}=-(Y_4\varphi)\theta_2, \quad \omega_{15}=\dfrac{Y_5\varphi}{f_2-f_1}\theta_1,\\ \omega_{24}=-(Y_4\varphi)\theta_3, \quad \omega_{25}=\dfrac{Y_5\varphi}{(f_2-f_1)^2}\theta_1+\dfrac{Y_5\varphi}{f_2-f_1}\theta_2,\\ \omega_{34}=-(Y_4\varphi)\theta_4, \quad \omega_{35}=\dfrac{Y_5\varphi}{(f_2-f_1)^3}\theta_1+\dfrac{Y_5\varphi}{(f_2-f_1)^2}\theta_2+\dfrac{Y_5\varphi}{f_2-f_1}\theta_3,\\ \omega_{45}=\dfrac{Y_5\varphi}{(f_2-f_1)^4}\theta_1+\dfrac{Y_5\varphi}{(f_2-f_1)^3}\theta_2+\dfrac{Y_5\varphi}{(f_2-f_1)^2}\theta_3+\dfrac{Y_5\varphi}{f_2-f_1}\theta_4+\dfrac{Y_4\varphi}{f_2-f_1}\theta_5;\end{cases} \tag{3.25}$$

здесь

$$\varphi=2f_1+\frac{1}{2}f_2 \tag{3.26}$$

— определяющая функция проективного движения типа $\{41\}$, ω_{ij} есть 1-форма связности в кососнормальном репере (Y_h),

$$f_1=\varepsilon x^4+(1-\varepsilon)\kappa, \quad f_2=f_2(x^5),$$

ε принимает значения 0 или 1, κ — постоянная, $e_1, e_2=\pm 1$. Используя первое структурное уравнение Картана (3.5) и формулы (3.25), найдем

$$\begin{aligned} d\theta_1&=-\frac{3e_1(Y_4\varphi)}{2}\theta_1\wedge\theta_2-\frac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_5,\\ d\theta_2&=-e_1(Y_4\varphi)\theta_1\wedge\theta_3-\frac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_5-\frac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2-f_1}\theta_2\wedge\theta_5,\\ d\theta_3&=-\frac{e_1(Y_4\varphi)}{2}\theta_1\wedge\theta_4-\frac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2-f_1)^3}\theta_1\wedge\theta_5-\frac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2-f_1)^2}\theta_2\wedge\theta_5-\frac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2-f_1}\theta_3\wedge\theta_5,\\ d\theta_4&=-\frac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2-f_1)^4}\theta_1\wedge\theta_5-\frac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2-f_1)^3}\theta_2\wedge\theta_5-\frac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2-f_1)^2}\theta_3\wedge\theta_5-\frac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2-f_1}\theta_4\wedge\theta_5,\\ d\theta_5&=-\frac{e_1(Y_4\varphi)}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_5. \end{aligned}$$

Положим

$$E_1\equiv Y_4\varphi, \quad E_2\equiv Y_5\varphi, \quad J_1\equiv e_1Y_4(Y_4\varphi), \quad J_2\equiv e_2Y_5(Y_5\varphi) \tag{3.27}$$

и продифференцируем ω_{ij} (см. (3.25)):

$$d\omega_{12}=0, \quad d\omega_{13}=0, \quad d\omega_{14}=-J_1\theta_1\wedge\theta_2+E_1^2\theta_1\wedge\theta_3+\frac{e_2E_1E_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_5,$$

$$d\omega_{15}=-\frac{3e_1E_1E_2}{2(f_2-f_1)}\theta_1\wedge\theta_2-\left(\frac{J_2}{f_2-f_1}-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5, \quad d\omega_{23}=0,$$

$$d\omega_{24}=-J_1\theta_1\wedge\theta_3+\frac{e_1E_1^2}{2}\theta_1\wedge\theta_4+\frac{e_2E_1E_2}{(f_2-f_1)^3}\theta_1\wedge\theta_5+\frac{3e_1E_1^2}{2}\theta_2\wedge\theta_3+\frac{e_2E_1E_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_2\wedge\theta_5,$$

$$d\omega_{25}=-\frac{e_1E_1E_2}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_3-\left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^2}-\frac{2e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_1\wedge\theta_5-\left(\frac{J_2}{f_2-f_1}-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_2\wedge\theta_5,$$

$$d\omega_{34}=-J_1\theta_1\wedge\theta_4+\frac{e_2E_1E_2}{(f_2-f_1)^4}\theta_1\wedge\theta_5+\frac{3e_1E_1^2}{2}\theta_2\wedge\theta_4+\frac{e_2E_1E_2}{(f_2-f_1)^3}\theta_2\wedge\theta_5+\frac{e_2E_1E_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_3\wedge\theta_5,$$

$$\begin{aligned} d\omega_{35}=\frac{e_1E_1E_2}{2(f_2-f_1)^3}\theta_1\wedge\theta_2+\frac{e_1E_1E_2}{2(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_3-\frac{e_1E_1E_2}{2(f_2-f_1)}\theta_1\wedge\theta_4-\\ -\left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^3}-\frac{3e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}\right)\theta_1\wedge\theta_5-\left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^2}-\frac{2e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_2\wedge\theta_5-\\ -\left(\frac{J_2}{f_2-f_1}-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_3\wedge\theta_5, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d\omega_{45} = \frac{e_1E_2E_1}{(f_2-f_1)^4}\theta_1\wedge\theta_2 + \frac{e_1E_2E_1}{(f_2-f_1)^3}\theta_1\wedge\theta_3 + \frac{e_1E_2E_1}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_4 +& \\
+\left(\frac{J_1}{(f_2-f_1)} - \frac{J_2}{(f_2-f_1)^4} + \frac{4e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^5} - \frac{e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5 -& \\
-\left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^3} + \frac{3e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)} - \frac{3e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}\right)\theta_2\wedge\theta_5 -& \\
-\left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^2} - \frac{2e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_3\wedge\theta_5 - \left(\frac{J_2}{f_2-f_1} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_4\wedge\theta_5.&
\end{aligned}
$$

3.3.2. Вычислив дифференциал равенства

$$df_1 = e_1(Y_4\varphi)\theta_1 \equiv e_1E_1\theta_1$$

(см. (3.24)) и сравнив полученное с

$$dE_1 = \theta^l Y_l Y_4\varphi = \theta^l[Y_l, Y_4] + \theta^l Y_4 Y_l\varphi,$$

с учетом (3.23) и (**??**) имеем

$$dE_1 = J_1\theta_1 - \frac{3}{2}e_1E_1^2\theta_2 - \frac{e_2E_1E_2}{f_2-f_1}\theta_5.$$

Так же получается dE_2.

Применив второе структурное уравнение Картана (3.7), найдем 2-форму кривизны Ω_{ij} h-пространства типа $\{41\}$:

$$
\begin{aligned}
\Omega_{12} = -\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_2, \quad \Omega_{13} = \left(\frac{e_1E_1^2}{2} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_1\wedge\theta_2 - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_3,\\
\Omega_{14} = -\left(J_1 + \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}\right)\theta_1\wedge\theta_2 + \left(\frac{e_1E_1^2}{2} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_1\wedge\theta_3 - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_4,\\
\Omega_{15} = -\left(\frac{J_2}{f_2-f_1} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5, \quad \Omega_{23} = \left(\frac{e_1E_1^2}{2} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_1\wedge\theta_3 - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\theta_2\wedge\theta_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{24} = -\left(J_1 + \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}\right)\theta_1\wedge\theta_3 + \left(\frac{e_1E_1^2}{2} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_1\wedge\theta_4 +& \\
+\left(\frac{e_1E_1^2}{2} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_2\wedge\theta_3 - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\theta_2\wedge\theta_4,& \quad (3.28)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{25} = -\left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^2} - \frac{2e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_1\wedge\theta_5 - \left(\frac{J_2}{f_2-f_1} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_2\wedge\theta_5,\\
\Omega_{34} = -\left(J_1 + \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}\right)\theta_1\wedge\theta_4 + \left(\frac{e_1E_1^2}{2} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_2\wedge\theta_4 - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\theta_3\wedge\theta_4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{35} = -\left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^3} + \frac{e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)} - \frac{3e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}\right)\theta_1\wedge\theta_5 -& \\
-\left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^2} - \frac{2e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_2\wedge\theta_5 - \left(\frac{J_2}{f_2-f_1} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_3\wedge\theta_5,&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{45} = \left(\frac{J_1}{(f_2-f_1)} - \frac{J_2}{(f_2-f_1)^4} + \frac{4e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^5} - \frac{e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5 -& \\
-\left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^3} + \frac{e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)} - \frac{3e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}\right)\theta_2\wedge\theta_5 -&
\end{aligned}
$$

$$-\left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^2}-\frac{2e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_3\wedge\theta_5-\left(\frac{J_2}{f_2-f_1}-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_4\wedge\theta_5.$$

Теорема 3.3. *Для того чтобы h-пространство H_{41} типа $\{41\}$ было пространством постоянной кривизны K, т.е. $\Omega_{ij}=K\theta_i\wedge\theta_j$, необходимо и достаточно выполнение условия $K_{1312}=0$, что равносильно выполнению равенства*

$$D\equiv\frac{e_1E_1^2}{2}-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}=0; \tag{3.29}$$

при этом $K_{ijkl}=0$, $\rho_{ij}=0$ для всех (ij) и $(kl)\neq(ij)$, т.е. $\Omega_{ij}=0$, и любое h-пространства H_{41} типа $\{41\}$ постоянной кривизны является плоским.

Доказательство. Запишем 2-форму кривизны в виде (3.9), где $\rho_{ij}\equiv K_{ijij}$ и, в силу (3.28),

$$\begin{aligned}\rho_{12}&=-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}=\rho_{13}=\rho_{14}=\rho_{23}=\rho_{24}=\rho_{34},\\ \rho_{15}&=-\frac{J_2}{f_2-f_1}+\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}=\rho_{25}=\rho_{35}=\rho_{45},\end{aligned} \tag{3.30}$$

а ненулевые K_{ijkl} при $(kl)\neq(ij)$ имеют вид

$$\begin{gathered}K_{1312}=\frac{e_1E_1^2}{2}-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3},\quad K_{1412}=-J_1-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4},\\ K_{1413}=K_{1312}=K_{2313},\quad K_{2413}=K_{1412},\quad K_{2414}=K_{1312}=K_{2423},\\ K_{2515}=-\frac{J_2}{(f_2-f_1)^2}+\frac{2e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3},\quad K_{3414}=K_{1412},\\ K_{3515}=-\frac{J_2}{(f_2-f_1)^3}-\frac{e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)}+\frac{3e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4},\\ K_{3525}=K_{2515},\quad K_{4525}=K_{3515},\quad K_{4535}=K_{2515},\\ K_{4515}=\frac{J_1}{f_2-f_1}-\frac{J_2}{(f_2-f_1)^4}-\frac{e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)^2}+\frac{4e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^5}.\end{gathered} \tag{3.31}$$

Полагая $K_{ijkl}=0$ при $(k,l)\neq(i,j)$, $i,j,k,l=1,\dots,5$, получим пять условий:

$$\frac{e_1E_1^2}{2}-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\equiv D=0, \tag{3.32}$$

$$-J_1-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}=0, \tag{3.33}$$

$$-\frac{J_2}{(f_2-f_1)^2}+\frac{2e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}=0, \tag{3.34}$$

$$-\frac{J_2}{(f_2-f_1)^3}-\frac{e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)}+\frac{3e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}=0, \tag{3.35}$$

$$\frac{J_1}{f_2-f_1}-\frac{J_2}{(f_2-f_1)^4}-\frac{e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)^2}+\frac{4e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^5}=0. \tag{3.36}$$

С учетом формул (3.26), (3.27) и (**??**) уравнение (3.32) принимает вид

$$\frac{4e_1\varepsilon^2}{(f_2-f_1)E^2}-\frac{e_2}{2(f_2-f_1)^7}\left(\frac{df_2}{dx^5}\right)^2=0; \tag{3.37}$$

дифференцируя его по x^3, найдем $\varepsilon=0$, после этого из (3.37) получим $f_2=\mathrm{const}$, откуда следует

$$E_1=E_2=0,\quad J_1\equiv e_1Y_4(E_1)=0,\quad J_2\equiv e_2Y_5(E_2)=0.$$

При этом условия (3.32)–(3.36) выполняются тождественно; кроме того, $\rho_{ij} \equiv 0$ для всех $i, j = 1, \dots, 5$, и, следовательно, $\Omega_{ij} = 0$ для всех $i, j = 1, \dots, 5$, поэтому $K = 0$, и пространство H_{41} является плоским. □

3.4. Формы кривизны h-пространств типа $\{5\}$.

3.4.1. В данном разделе исследуются пятимерные псевдоримановы h-пространства H_5 типа $\{5\}$. Метрика g пространства H_5 и соответствующая билинейная форма $a = h - 2\varphi g$ задаются каноническими формами (**??**) в подходящем косонормальном репере, причем справедливы уравнения (**??**), в которых произведена замена λ на f:

$$Y_1\varphi = Y_2\varphi = Y_3\varphi = Y_4\varphi = 0, \tag{3.38}$$

$$df = \frac{2}{5}e(Y_5\varphi)\ \theta_1, \tag{3.39}$$

$$\begin{cases} \omega_{23} = \dfrac{1}{5}(Y_5\varphi)\ \theta_1, \quad \omega_{14} = \dfrac{3}{5}(Y_5\varphi)\theta_1, \quad \omega_{51} = (Y_5\varphi)\ \theta_2, \\ \omega_{52} = (Y_5\varphi)\theta_3, \quad \omega_{53} = (Y_5\varphi)\ \theta_4, \quad \omega_{54} = (Y_5\varphi)\ \theta_5; \end{cases} \tag{3.40}$$

остальные компоненты связности ω_{ij} равны нулю. Здесь

$$\varphi = \frac{5}{2}f \tag{3.41}$$

— определяющая функция проективного движения типа $\{5\}$; $f = \varepsilon x^5 + (1-\varepsilon)\alpha$; α — постоянная; $e = \pm 1$.

Используя первое структурное уравнение Картана (3.5) и формулы (3.40), найдем

$$\begin{gathered} d\theta_1 = -\frac{8}{5}e(Y_5\varphi)\ \theta_1 \wedge \theta_2, \quad d\theta_2 = -\frac{6}{5}e(Y_5\varphi)\ \theta_1 \wedge \theta_3, \\ d\theta_3 = -\frac{4}{5}e(Y_5\varphi)\ \theta_1 \wedge \theta_4, \quad d\theta_4 = -\frac{2}{5}e(Y_5\varphi)\theta_1 \wedge \theta_5, \quad d\theta_5 = 0. \end{gathered} \tag{3.42}$$

Введем обозначения

$$\Re \equiv Y_5\varphi, \quad \aleph \equiv eY_5(Y_5\varphi).$$

Учитывая, что квадрат внешнего дифференциала равен нулю, продифференцируем равенство (3.39):

$$df = \frac{2}{5}e(Y_5\varphi)\theta_1 \equiv \frac{2}{5}e\Re\ \theta_1$$

и результат сравним с

$$d\Re = \theta^l Y_l Y_5 \varphi = \theta^l [Y_l, Y_5]\varphi + \theta^l Y_5 Y_l \varphi,$$

где (см. [13, с. 101])

$$[Y_l, Y_5] \equiv \nabla_{Y_l} Y_5 - \nabla_{Y_5} Y_l = \sum_{l=1}^{n} e_k(\gamma_{kl5} - \gamma_{k5l})Y_{\tilde{k}};$$

в нашем случае (см. (**??**))

$$[Y_1, Y_5] = -\frac{2}{5}(Y_5\varphi)Y_2, \quad [Y_2, Y_5] = -\frac{4}{5}(Y_5\varphi)Y_3, \quad [Y_3, Y_5] = -\frac{6}{5}(Y_5\varphi)Y_4, \quad [Y_4, Y_5] = -\frac{8}{5}(Y_5\varphi)Y_5;$$

остальные скобки Ли равны нулю. В итоге с учетом (3.38) получим

$$d\Re = C\ \theta_1 - \frac{8}{5}eA^2\ \theta_2.$$

3.4.2. Дифференцируя равенства (3.40) и пользуясь (3.42), найдем

$$\begin{gathered} d\omega_{14}=0, \quad d\omega_{23}=0, \quad d\omega_{51}=\aleph\theta_1\wedge\theta_2-\frac{6}{5}e\Re^2\theta_1\wedge\theta_3, \\ d\omega_{52}=\aleph\theta_1\wedge\theta_3-\frac{4}{5}e\Re^2\theta_1\wedge\theta_4-\frac{8}{5}e\Re^2\theta_2\wedge\theta_3, \\ d\omega_{53}=\aleph\theta_1\wedge\theta_4-\frac{2}{5}e\Re^2\theta_1\wedge\theta_5-\frac{8}{5}e\Re^2\theta_2\wedge\theta_4, \\ d\omega_{54}=\aleph\theta_1\wedge\theta_5-\frac{8}{5}e\Re^2\theta_2\wedge\theta_5. \end{gathered} \tag{3.43}$$

Используя (3.40), (3.43) и второе структурное уравнение Картана (3.7), вычислим коэффициенты 2-формы кривизны Ω_{ij} h-пространства типа $\{5\}$:

$$\begin{gathered} \Omega_{12}=\Omega_{13}=\Omega_{23}=0, \quad \Omega_{14}=\frac{3}{5}e\Re^2\theta_1\wedge\theta_2, \quad \Omega_{24}=\frac{3}{5}e\Re^2\theta_1\wedge\theta_3, \\ \Omega_{34}=\frac{3}{5}e\Re^2\theta_1\wedge\theta_4, \quad \Omega_{51}=\aleph\ \theta_1\wedge\theta_2-\frac{3}{5}e\Re^2\ \theta_1\wedge\theta_3, \\ \Omega_{52}=\aleph\theta_1\wedge\theta_3-\frac{3}{5}e\Re^2\theta_1\wedge\theta_4-\frac{3}{5}e\Re^2\theta_2\wedge\theta_3, \\ \Omega_{53}=\aleph\theta_1\wedge\theta_4-\frac{3}{5}e\Re^2\theta_1\wedge\theta_5-\frac{3}{5}e\Re^2\theta_2\wedge\theta_4, \\ \Omega_{54}=\aleph\theta_1\wedge\theta_5-\frac{3}{5}e\Re^2\theta_2\wedge\theta_5. \end{gathered} \tag{3.44}$$

3.4.3. Запишем 2-форму кривизны в виде (3.10):

$$\Omega_{ij}=\rho_{ij}\theta_i\wedge\theta_j+\sum_{(kl)\neq(ij)}K_{ijkl}\theta_k\wedge\theta_l, \quad i,j,k,l=1,\dots,, \quad i<j,\ k<l,$$

где, в силу (3.44), $\rho_{ij}=0$ для всех i, j, а из коэффициентов K_{ijkl} при $(kl)\neq(ij)$ не равны нулю только следующие:

$$\begin{gathered} K_{1412}=\frac{3}{5}e\Re^2=K_{2413}=K_{3414}=K_{1513}=K_{2514}=K_{2523}=K_{3515}=K_{3524}=K_{4525}, \\ K_{1512}=-\aleph=K_{2513}=K_{3514}=K_{4515}. \end{gathered}$$

Теорема 3.4. *Для того чтобы h-пространство H_5 типа $\{5\}$ было пространством постоянной кривизны K, т.е. $\Omega_{ij}=K\theta_i\wedge\theta_j$, необходимо и достаточно выполнение условия $K_{1412}=0$, что равносильно*

$$\Re=0; \tag{3.45}$$

при этом $\Omega_{ij}\equiv 0$, т.е. любое h-пространство H_5 типа $\{5\}$ постоянной кривизны является плоским $(K=0)$.

Доказательство. Необходимость условия $K_{1412}=0$ следует из формулы $\Omega_{ij}=K\theta_i\wedge\theta_j$, определяющей пространство постоянной кривизны K.

Если выполняется условие (3.45), то $Y_5\varphi=0$, поэтому $\aleph=0$ и $K_{ijkl}=0$ для всех $(kl)\neq(ij)$, $i,j,k,l=1,\dots,5$; $i<j$, $k<l$, при этом кривизна $\Omega_{ij}\equiv 0$, и H_5 является пространством постоянной нулевой кривизны, т.е. плоским пространством. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аминова А. В.* Группы проективных преобразований некоторых полей тяготения// Гравит. теория относит. — 1970. — № 7. — С. 127–131.
2. *Аминова А. В.* О полях тяготения, допускающих группы проективных движений// Докл. АН СССР. — 1971. — *197*, № 4. — С. 807–809.
3. *Аминова А. В.* Проективные группы в полях тяготения. I// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 3—13.

4. *Аминова А. В.* Проективные группы в полях тяготения. II// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 14–20.
5. *Аминова А. В.* О бесконечно малых преобразованиях, сохраняющих траектории пробных тел/ Препринт ИТФ АН УССР 71-85Р. — Киев, 1971.
6. *Аминова А. В.* Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств// Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — *6*. — С. 295–316.
7. *Аминова А. В.* Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности// Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — *6*. — С. 317–346.
8. *Аминова А. В.* Проективные группы в пространствах-временах, допускающих два постоянных векторных поля// Гравит. теория относит. — 1976. — № 10. — С. 9–22.
9. *Аминова А. В.* Об интегрировании ковариантного дифференциального уравнения первого порядка и геодезическом отображении римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности// Изв. вузов. Мат. — 1988. — № 1. — С. 3–13.
10. *Аминова А. В.* Группы преобразований римановых многообразий// Итоги науки техн. Сер. Пробл. геом. ВИНИТИ. — 1990. — *22*. — С. 97–165.
11. *Аминова А. В.* Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 2 (290). — С. 107–164.
12. *Аминова А. В.* Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий// Усп. мат. наук. — 1995. — *50*, № 1. — С. 69–142.
13. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
14. *Аминова А. В.* Проективные симметрии и законы сохранения в K-пространствах, определяемых полями тяготения// Изв. вузов. Физика. — 2008. — *51*, № 4. — С. 30–37.
15. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Проективно-геометрическая теория систем дифференциальных уравнений второго порядка: теоремы выпрямления и симметрии// Мат. сб. — 2010. — *201*, № 5. — С. 3–13.
16. *Аминова А. В.* Проективные симметрии гравитационных полей. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018.
17. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка// Мат. сб. — 2006. — *197*, № 7. — С. 3–28.
18. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Пространства с проективной связностью Картана и групповой анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2009. — *123*. — С. 58–80.
19. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств специального вида// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 5. — С. 97–102.
20. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. I. H-пространства типа $\{32\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2018. — № 4. — С. 21–31.
21. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. II. H-пространства типа $\{41\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 45–55.
22. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. III. H-пространства типа $\{5\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 56—66.
23. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* H-пространства (H_{41}, g) типа $\{41\}$: проективно-групповые свойства// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 4. — С. 4–12.
24. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{221\}$// Изв. вузов. Мат. — 2019. — № 10. — С. 87–93.
25. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Проективно-групповые свойства h-пространств H_5 типа $\{5\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2020. — № 1. — С. 4–11.
26. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О свойствах проективных алгебр Ли жестких h-пространств H_{32} типа $\{32\}$// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2020. — *162*, № 2. — С. 111–119.
27. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Алгебры Ли проективных движений пятимерных h-пространств H_{221} типа $\{221\}$// Изв. вузов. Мат. — 2021. — № 12. — С. 9–22.
28. *Буданов К. М., Султанов А. Я.* Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 12. — С. 3—13.

29. *Гладуш В. Д.* Пятимерная общая теория относительности и теория Калуцы—-Клейна// Теор. мат. физ. — 2003. — *136*, № 3. — С. 480—495.
30. *Голиков В. И.* О геодезическом отображении полей тяготения общего вида// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1963. — № 12. — С. 97–129.
31. *Егоров И. П.* Движения в пространствах аффинной связности. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965.
32. *Жукова Л. И.* Римановы пространства с проективной группой// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124.* — С. 13—18.
33. *Жукова Л. И.* Проективные преобразования в римановых пространствах (изотропный случай)// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124.* — С. 19–25.
34. *Жукова Л. И.* О группах проективных преобразований некоторых римановых пространств// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124.* — С. 26–30.
35. *Жукова Л. И.* Римановы пространства, допускающие проективные преобразования// Изв. вузов. Мат. — 1973. — № 6. — С. 37–41.
36. *Киселев А. С.* Космологическая проблема в пятимерном пространстве-времени// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2010. — № 1. — С. 64–67.
37. *Киселев А. С., Кречет В. Г.* Космологическая проблема в пятимерном пространстве Римана—Вейля с идеальной жидкостью// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2011. — *3*, № 1. — С. 37–41.
38. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1-2. — М.: Наука, 1981.
39. *Кречет В. Г., Левкоева М. В., Садовников Д. В.* Геометрическая теория электромагнитного поля в пятимерном аффинно-метрическом пространстве// Вестн. РУДН. Сер. Физ. — 2001. — *1*, № 9. — С. 33—37.
40. *Кручкович Г. И.* Уравнения полуприводимости и геодезическое соответствие пространств Лоренца// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1963. — № 24. — С. 74–87.
41. *Кручкович Г. И.* О пространствах $V(K)$ и их геодезических отображениях// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1967. — № 33. — С. 3—18.
42. *Петров А. З.* О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики// Уч. зап. Казан. ун-та. — 1949. — *109*, № 3. — С. 7–36.
43. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. — Факториал, 1998.
44. *Рчеулишвили Г. Л.* Сферически-симметричный линейный элемент и векторы Киллинга в пятимерном пространстве// Теор. мат. физ. — 1995. — *102*, № 3. — С. 345—351.
45. *Рчеулишвили Г. Л.* Обобщенные векторы Киллинга в пятимерном лоренцевом пространстве// Теор. мат. физ. — 1997. — *112*, № 2. — С. 249—253.
46. *Синюков Н. С.* О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства// Докл. АН СССР. — 1954. — *98*, № 1. — С. 21—23.
47. *Синюков Н. С.* Нормальные геодезические отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 4. — С. 266—267.
48. *Синюков Н. С.* Эквидистантные римановы пространства// Научн. ежегод. Одесса. — 1957. — С. 133—135.
49. *Синюков Н. С.* Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1961. — *137*, № 6. — С. 1312–1314.
50. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*, № 4. — С. 781–782.
51. *Синюков Н. С.* К теории геодезического отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1966. — *169*, № 4. — С. 770—772.
52. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
53. *Солодовников А. С.* Проективные преобразования римановых пространств// Усп. мат. наук. — 1956. — *11.* — С. 45–116.
54. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1956. — *108*, № 2. — С. 201–203.
55. *Солодовников А. С.* Геодезические классы пространств $V(K)$// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 1. — С. 33–36.
56. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1961. — № 2. — С. 43–102.

57. *Трунев А. П.* Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы—Клейна// Науч. ж. Кубан. гос. агр. ун-та. — 2011. — *71*, № 7. — С. 1–26.
58. *Шарафутдинов В. А.* Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию. — Новосибирск:: ИПЦ НГУ, 2018.
59. *Широков П. А.* Тензорное исчисление. — Казань: Изд-во КГУ, 1961.
60. *Широков П. А.* Избранные труды по геометрии. — Казань: Изд-во КГУ, 1966.
61. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. — М.: ИЛ, 1947.
62. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.
63. *Abe O.* Gravitational-wave propagation in the five-dimensional Kaluza–Klein space-time// Nuovo Cim. B. — 1994. — *109*, № 6. — P. 659—673.
64. *Aminova A. V.* On geodesic mappings of Riemannian spaces// Tensor. — 1987. — *46*. — P. 179–186.
65. *Aminova A. V.* Group-invariant methods in the theory of projective mappings of space-time manifolds// Tensor, N.S. — 1993. — *54*. — P. 91–100.
66. *Aminova A. V.* Groups of transformations of pseudo-Riemannian manifolds in theoretical and mathematical physics// в кн.: In Memoriam N. I. Lobatschevskii. Vol. 3, part 2. — Изд-во Казан. ун-та: Казань, 1995. — С. 79–103.
67. *Aminova A. V.* Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds// J. Math. Sci. — 2003. — *113*, № 3. — P. 367–470.
68. *Aminova A. V., Aminov N. A.-M.* Geometric theory of differential systems: Linearization criterion for systems of second-order ordinary differential equations with a 4-dimensional solvable symmetry group of the Lie–Petrov type VI.1// J. Math. Sci. — 2009. — *158*, № 2. — P. 163–183.
69. *Anchordoqui L. A., Birman G. S.* Metric tensors for homogeneous, isotropic, five-dimensional pseudo-Riemannian models// Rev. Colomb. Mat. — 1998. — *32*. — P. 73–79.
70. *Becerril R., Matos T.* Bonnor solution in five-dimensional gravity// Phys. Rev. D. — 1990. — *41*, № 6. — P. 1895–1896.
71. *Beltrami E.* Teoria fondamentale degli spazii di curvature costante// Ann. Mat. — 1868. — № 2. — P. 232–255.
72. *Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G.* Mixed metric perturbation in Kaluza–Klein cosmologies// Astron. Nachr. — 1990. — *311*, № 3. — P. 151–154.
73. *Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G.* Mixed metric perturbations in Kaluza–Klein cosmologies// Nuovo Cim. B. — 1991. — *106*, № 2. — P. 107–122.
74. *Bokhari A. H., Qadir A.* Symmetries of static, spherically symmetric space-times// J. Math. Phys. — 1987. — *28*. — P. 1019–1022.
75. *Calvaruso G., Marinosci R. A.* Homogeneous geodesics in five-dimensional generalized symmetric spaces// Balkan J. Geom. Appl. — 2003. — *8*, № 1. — P. 1–19.
76. *Coley A. A., Tupper B. O. J.* Special conformal Killing vector space-times and symmetry inheritance// J. Math. Phys. — 1989. — *30*. — P. 2616–2625.
77. *Dacko P.* Five dimensional almost para-cosymplectic manifolds with contact Ricci potential/ `arXiv: 1308.6429 [math.DG]`.
78. *Dini U.* Sopra una problema che si presenta nella teoria generale delle rapprezentazioni geografiche di una superficie su di un'altra// Ann. Mat. — 1869. — *3*, № 7. — P. 269–293.
79. *Dumitrescu T. T., Festuccia G., Seiberg N.* Exploring curved superspace/ `arXiv: 1205.1115v2 [hep.th]`.
80. *Fialowski A., Penkava M.* The moduli space of complex five-dimensional Lie algebras// J. Algebra. — 2016. — *458*. — P. 422—444.
81. *Fubini G.* Sui gruppi trasformazioni geodetiche// Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. — 1903. — *53*, № 2. — P. 261–313.
82. *Fukui T.* The motion of a test particle in the Kaluza–Klein-type of gravitational theory with variable mass// Astrophys. Space Sci. — 1988. — *141*, № 2. — P. 407–413.
83. *Fulton T., Rohrlich F., Witten L.* Conformal invariance in physics// Rev. Mod. Phys. — 1962. — *34*, № 3. — P. 442–557.
84. *Gall L., Mohaupt T.* J. High Energy Phys. — 2018. — *2018*. — 53.
85. *Geroch R.* Limits of space-times// Commun. Math. Phys. — 1969. — *13*. — P. 180–193.
86. *Gezer A.* On infinitesimal conformal transformations of the tangent bundles with the synectic lift of a Riemannian metric// Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). — 2009. — *119*, № 3. — P. 345—350.

87. *Gross D. J., Perry M. J.* Magnetic monopoles in Kaluza–Klein theories// Nucl. Phys. — 1983. — *B226.* — P. 29–48.
88. *Guendelman E. I.* Kaluza–Klein–Casimir cosmology with decoupled heavy modes// Phys. Lett. B. — 1988. — *201*, № 1. — P. 39–41.
89. *Hall G. S., Rebouas M. J., Santos J., Teixeixa A. F. F.* On the algebraic structure of second order symmetric tensors in 5-dimensionai space-times// Gen. Rel. Gravit. — 1996. — *8*, № 9. — P. 1107–1113.
90. *Hicks J. W.* Algebraic properties of Killing vectors for Lorentz metrics in four dimensions// All Graduate Plan B and other Reports. — 2011. — *102.* — P. 1–90.
91. *Ho Choon-Lin, Ng Kin-Wang* Wilson line breaking and vacuum stability in Kaluza–Klein cosmology// Phys. Rev. D. — 1991. — *43*, № 10. — P. 3107–3111.
92. *Jadczyk A.* START in a five–dimensional conformal domain/ `arXiv:1111.5540v2 [math-ph]`.
93. *Kiselev A. S., Krechet V. G.* Static distributions of matter in the five-dimensional Riemann—Weyl space// Russ. Phys. J. — 2012. — *55*, № 4. — P. 417—425.
94. *Knebelman M. S.* Homothetic mappings of Riemann spaces// Proc. Am. Math. Soc. — 1958. — *9*, № 6. — P. 927–928.
95. *Kokarev S. S.* Phantom scalar fields in five–dimensional Kaluza–Klein theory// Russ. Phys. J. — 1996. — *39*, № 2. — P. 146–152.
96. *Kollár J.* Einstein metrics on five-dimensional Seifert bundles// J. Geom. Anal. — 2005. — *15*, № 3. — P. 445–476.
97. *Königs M. G.* Sur les géodésiques a intégrales quadratiques// in: *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces. Vol. IV. — Chelsea Publ., 1972. — P. 368—404.
98. *Kovacs D.* The geodesic equation in five-dimensional relativity theory of Kaluza–Klein// Gen. Rel. Gravit. — 1984. — *16*, № 7. — P. 645–655.
99. *Kowalski O.* Classification of generalized symmetric Riemannian spaces of dimension $n \leqslant 5$// Rozpravy CSAV, Rada MPV. — 1975. — № 85. — P. 1–61.
100. *Kramer D. Stephani H., MacCallum M., Herlt E.* Exact Solutions of Einstein's Field Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
101. *Ladke L. S., Jaiswal V. K., Hiwarkar R. A.* Five-dimensional exact solutions of Bianchi type-I space-time in $f(R,T)$ theory of gravity// Int. J. Innov. Res. Sci. Eng. Techn. — 2014. — *3*, № 8. — P. 15332–15342.
102. *Levi-Civita T.* Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche// Ann. Mat. — 1896. — *24*, № 2. — P. 255–300.
103. *Macedo P. G.* New proposal for a five-dimensional unified theory of classical fields of Kaluza–Klein type/ `arXiv:gr-qc/0101121`.
104. *Magazev A. A.* Casimir functions for five-dimensional Lie groups with a non–semi-Hausdorff space of orbits// Russ. Phys. J. — 2003. — *46*, № 9. — P. 912—920.
105. *Mankoc-Borstnik N., Pavsi M.* A systematic examination of five-dimensional Kaluza–Klein theory with sources consisting of point particles or strings// Nuovo Cim. — 1988. — *99A*, № 4. — P. 489–507.
106. *Marinosci R. A.* Classification of five-dimensional generalized pointwise symmetric Riemannian spaces// Geom. Dedic. — 1995. — *57.* — P. 11–53.
107. *Mikesh J.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky University, 2019.
108. *Mikesh J., Stepanova E.* A five-dimensional Riemannian manifold with an irreducible $SO(3)$-structure as a model of abstract statistical manifold// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2014. — *45.* — P. 111—128.
109. *Mohanty G., Mahanta K. L., Bishi B. K.* Five dimensional cosmological models in Lyra geometry with time dependent displacement field// Astrophys. Space Sci. — 2007. — *310.* — P. 273—276.
110. *Paiva F. M., Rebouca M. J., Teixeira A. F. F.* Limits of space–times in five dimensions and their relation to the Segre types// J. Math. Phys. — 1997. — *38.* — P. 4228–4236.
111. *Pan Yiwen* Rigid supersymmetry on five-dimensional Riemannian manifolds and contact geometry/ `arXiv:1308.1567v4 [hep.th]`.
112. *Pini A., Rodriguez-Gomez D., Schmudea J.* Rigid supersymmetry from conformal supergravity in five dimensions/ `arXiv:1504.04340v3 [het-th]`.
113. *Rcheulishvili G.* Spherically symmetric line element and Killing vectors in five-dimensional space. — Miramare-Trieste: Preprint ICTP, IC/92/108, 1992.
114. *Rcheulishvili G. L.* The curvature and the algebra of Killing vectors in five-dimensional space// J. Math. Phys. — 1992. — *33.* — P. 1103–1108.

115. *Rcheulishvili G. L.* Conformal Killing vectors in five-dimensional space/ arXiv: gr-qc/9312004v1.
116. *Rebouças M. J., Santos J., Teixeira A. F. F.* Classification of energy momentum tensors in $n > 5$ dimensional space-times: A review// Brazil. J. Phys. — 2004. — *34*, № 2A. — P. 535–543.
117. *Rodroguez-Vallarte M. C., Salgado G.* Five-dimensional indecomposable contact Lie algebras as double extensions// J. Geom. Phys. — 2016. — *100*. — P. 20—32.
118. *Santos J., Rebouças M. J., Teixeira A. F. F.* Classification of second order symmetric tensors in five-dimensional Kaluza—Klein-type theories// J. Math. Phys. — 1995. — *36*. — P. 3074–3084.
119. *Schur F.* Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen// Math. Ann. — 1886. — *27*. — P. 537–567.
120. *Starks S. A., Kosheleva O., Kreinovich V.* Kaluza–Klein 5D ideas made fully geometric/ arXiv: 0506218v1 [physics.class-ph].
121. *Varaksin O. L., Klishevich V. V.* Integration of Dirac equation in Riemannian spaces with five-dimensional group of motions// Russ. Phys. J. — 1997. — *40*, № 8. — P. 727—731.
122. *Wesson P. S.* A physical interpretation of Kaluza–Klein cosmology// Astrophys. J. — 1992. — *394*, № 1. — P. 19—24.
123. *Wesson P. S.* The properties of matter in Kaluza–Klein cosmology// Mod. Phys. Lett. A. — 1992. — *7*, № 11. — P. 921–926.
124. *Witten E.* Search for a realistic Kaluza–Klein theory// Nucl. Phys. B. — 1981. — *186*. — P. 412–428.
125. *Yano K.* On harmonic and Killing vectors// Ann. Math. — 1952. — *55*. — P. 38—45.
126. *Zeghib A.* On discrete projective transformation groups of Riemannian manifolds// Adv. Math. — 2016. — *297*. — P. 26—53.

Аминова Ася Васильевна
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Хакимов Джамолиддин Рахмонович
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru