ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 30–36
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-30-36

УДК 519.716

ОБ ОДНОМ МНОЖЕСТВЕ E-ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ МУЛЬТИФУНКЦИЙ РАНГА 2

© 2022 г. **А. С. ЗИНЧЕНКО, Б. П. ИЛЬИН, В. И. ПАНТЕЛЕЕВ, Л. В. РЯБЕЦ**

Аннотация. В работе рассматриваются классы множества мультифункций ранга 2, замкнутые относительно суперпозиции по объединению и оператора разветвления по предикату равенства. Показано, что множество мультифункций, которые ни на одном наборе значений переменных не принимают значение 0, содержит 76 замкнутых классов.

Ключевые слова: замыкание, предикат равенства, мультифункция, замкнутое множество, суперпозиция, предполное множество.

ON A SET OF E-CLOSED CLASSES OF MULTIFUNCTIONS ON A TWO-ELEMENT SET

© 2022 **A. S. ZINCHENKO, B. P. ILYIN, V. I. PANTELEEV, L. V. RIABETS**

Abstract. In this paper, we consider closed classes of multifunctions defined on a two-element set and their closure operator based on the composition operator by union and the equality predicate branching operator. We show that the set of multifunctions that does not take the value of zero at any set of variables contains 76 E-closed classes.

Keywords and phrases: closure, equality predicate, multifunction, closed set, composition, precomplete set.

AMS Subject Classification: 03B50, 08A99

1. Введение. В работе рассматривается множество M_2 мультифункций ранга 2, замкнутое относительно суперпозиции по объединению и оператора замыкания с разветвлением по предикату равенства (E-оператора). E-оператор относится к категории «сильных» операторов замыкания и позволяет, действуя вместе с суперпозицией, получать конечные или счетные классификации. Исследование действия E-оператора на множестве булевых функций, частичных булевых функций и на множестве функций многозначной логики можно посмотреть в [1–3].

В [5] для множества мультифункций ранга 2 описаны множества K_1–K_{11} и показано, что они являются E-предполными в M_2 и других E-предполных множеств нет. Там же рассмотрена структура множества K_9 и показано, что оно содержит 21 E-замкнутый класс. В [4] показано, что K_5 (множество частичных булевых функций) содержит 100 E-замкнутых классов, а в [6] найдена структура K_6 — множества гиперфункций ранга 2, — содержащего 78 E-замкнутых классов. Классификация мультифункций ранга 2 относительно принадлежности E-предполным множествам проведена в [7].

В настоящей работе показано, что множество мультифункций, которые ни на одном наборе значений переменных не принимают значение 0 (множество K_7), состоит из 76 E-замкнутых классов.

2. Основные понятия. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Множество M_2 всех мультифункций ранга 2 и определяется следующим образом:

$$M_{2,n} = \bigl\{ f \mid f\colon E_2^n \to 2^{E_2} \bigr\}, \quad M_2 = \bigcup_n M_{2,n}.$$

В дальнейшем изложении не будем различать множество из одного элемента и элемент этого множества. Для множества E_2 будем использовать обозначение «$-$» (прочерк), а для пустого множества — «$*$».

Множество M_2 содержит множество гиперфункций (H_2), множество частичных булевых функций (O_2^*) и множество функций алгебры логики (O_2).

$$H_{2,n} = \bigl\{ f \mid f\colon E_2^n \to 2^{E_2} \setminus \{\varnothing\} \bigr\}, \quad H_2 = \bigcup_n H_{2,n},$$

$$O_{2,n}^* = \bigl\{ f \mid f\colon E_2^n \to E_2 \cup \{\varnothing\} \bigr\}, \quad O_2^* = \bigcup_n O_{2,n}^*,$$

$$O_{2,n} = \bigl\{ f \mid f\colon E_2^n \to E_2 \bigr\}, \qquad O_2 = \bigcup_n O_{2,n}.$$

Все двоичные наборы из множества E_2^n будем считать упорядоченными в соответствии с натуральным порядком, $\tilde{0}$ — набор, состоящий из одних 0, а $\tilde{1}$ — набор, состоящий из одних 1. Мультифункцию f, зависящую от n переменных, будем записывать в виде вектора $(\tau_{\tilde{0}}, \dots, \tau_{\tilde{1}})$ длины 2^n, где каждый элемент $\tau_{\tilde{\sigma}}$ есть $f(\tilde{\sigma})$, $\tilde{\sigma} \in E_2^n$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$, $f_1(x_1, \dots, x_m)$, …, $f_n(x_1, \dots, x_m)$ — мультифункции. Суперпозиция

$$f\bigl(f_1(x_1, \dots, x_m),\ \dots,\ f_n(x_1, \dots, x_m)\bigr)$$

задает мультифункцию $g(x_1, \dots, x_m)$ следующим образом: если $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E_2^m$, то по определению

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Определенный таким образом оператор будем называть суперпозицией по объединению (S_U-суперпозицией). Он позволяет находить значение мультифункции на наборах, составленных из элементов множества 2^{E_2}, рассматривая элемент набора как функцию-константу.

Будем говорить, что мультифункция $g(x_1, \dots, x_n)$ получается из мультифункций $f_1(x_1, \dots, x_n)$, $f_2(x_1, \dots, x_n)$ с помощью оператора разветвления по предикату равенства, если для некоторых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ выполняется соотношение:

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n), & \text{если } x_i = x_j, \\ f_2(x_1, \dots, x_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В дальнейшем в работе будем использовать предложенную в [5] терминологию ES_U-замыкания множества мультифункций. Для краткости и в соответствии с [1] будем вместо термина «ES_U-замыкание» использовать термин «E-замыкание».

3. E-замкнутые классы множества K_7. В [5] показано, что M_2 содержит 11 предполных E-замкнутых множеств. Рассмотрим одно из таких предполных множеств мультифункций

$$K_7 = \bigl\{ f \mid f(\tilde{\alpha}) \in \{*, 1, -\},\ \tilde{\alpha} \in E_2^n \bigr\}.$$

Рассмотрим следующие подмножества множества K_7, где $\tilde{\alpha} \in E_2^n$:

$$D_1 = \{ f \mid f(\tilde{1}) \in \{1, -\} \};$$

$$D_2 = \{ f \mid f(\tilde{1}) \in \{*, -\} \};$$

$$D_3 = \{ f \mid (f(\tilde{0}), f(\tilde{1})) \in \{(*, *), (*, 1), (*, -), (1, *), (-, *)\} \};$$

$$D_4 = \{ f \mid f(\tilde{0}) \in \{-\} \};$$

$$D_5 = \{ f \mid (f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})) \in \{(*, *), (*, -), (-, *), (-, -)\} \};$$

$$D_6 = \{f \mid (f(\tilde{0}), f(\tilde{1})) \in \{(-,1),(*,*),(1,*),(-,*)\}\};$$
$$D_7 = \{f \mid f(\tilde{1}) \in \{-\}\};$$
$$D_8 = \{f \mid f(\tilde{0}) \in \{*\}\};$$
$$D_9 = \{f \mid (f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})) \in \{(*,*),(1,*),(*,1),(-,*),(*,-)\}\};$$
$$D_{10} = \{f \mid (f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})) \in \{(*,*),(1,*),(*,1),(1,1)\}\};$$
$$D_{11} = \{f \mid (f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})) \in \{(1,1),(1,-),(-,1),(-,-)\}\};$$
$$D_{12} = \{f \mid (f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})) \in \{(1,-),(-,1),(-,-)\}\};$$
$$D_{13} = \{f \mid (f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})) \in \{(*,*),(-,-)\}\}.$$

Утверждение 1. *Множества $D_1 - D_{13}$ являются E-замкнутыми классами.*

Доказательство. Свойство E-замкнутости для множеств D_1, D_2, D_3, D_4, D_6, D_7 и D_8 очевидно. В [4] показано, что множество D_{10} является E-замкнутым классом. В [6] показана E-замкнутость классов D_{11} и D_{12}.

Покажем справедливость утверждения для множества D_5. Пусть мультифункции

$$f, f_1, \ldots, f_m \in D_5$$

и мультифункция

$$g(x_1,\ldots,x_n) = f\big(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ \ldots,\ f_m(x_1,\ldots,x_n)\big)$$

не принадлежит множеству D_5. Тогда найдется такой набор $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, что

$$\big(g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\ g(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_n)\big) \in \big\{(1,-),(-,1),(*,1),(1,*),(1,1)\big\}.$$

Рассмотрим случай, когда $(g(\tilde{\alpha}), g(\overline{\tilde{\alpha}})) = (1,*)$. Если $g(\tilde{\alpha}) = 1$, то для всех i выполняется $f_i(\tilde{\alpha}) \neq *$. В таком случае все $f_i(\tilde{\alpha}) = -$, и мультифункция f на всех прочерках дает 1. Следовательно, среди всех значений функции f обязательно найдется одна 1, тогда $f \notin D_5$. Получили противоречие. Аналогичным образом можно получить противоречия для других вариантов значений функции g. Следовательно, $g(x_1,\ldots,x_n) \in D_5$.

Пусть $g(x_1,\ldots,x_n)$ получена из мультифункций $f_1(x_1,\ldots,x_n)$ и $f_2(x_1,\ldots,x_n)$ с помощью оператора разветвления по предикату равенства и $f_1, f_2 \in D_5$.

Рассмотрим значения $g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $g(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_n)$ и компоненты наборов с номерами i и j:

(i) если $\alpha_i = \alpha_j$, то $\overline{\alpha}_i = \overline{\alpha}_j$. Тогда $g(\tilde{\alpha}) = f_1(\tilde{\alpha})$ и $g(\overline{\tilde{\alpha}}) = f_1(\overline{\tilde{\alpha}})$;

(ii) если $\alpha_i \neq \alpha_j$, то $\overline{\alpha}_i \neq \overline{\alpha}_j$. Тогда $g(\tilde{\alpha}) = f_2(\tilde{\alpha})$ и $g(\overline{\tilde{\alpha}}) = f_2(\overline{\tilde{\alpha}})$.

Таким образом, значения мультифункции $g(\tilde{x})$ на противоположных наборах совпадают с соответствующими значениями мультифункции $f_1(\tilde{x})$ или $f_2(\tilde{x})$, следовательно, $g(\tilde{x}) \in D_5$. Таким образом, множество D_5 является E-замкнутым классом мультифункций. Аналогичным образом можно показать E-замкнутость множеств D_9 и D_{13}. □

Аналогично предложению 1 из [6] несложно показать, что любой E-замкнутый класс мультифункций может быть представлен множеством мультифункций, зависящих не более чем от двух аргументов. Таким образом, задача описания всех E-замкнутых классов сводится к построению всех замкнутых множеств двухместных мультифункций.

При получении мультифункции $f(x_1,\ldots,x_n)$ через мультифункции $f_1,\ldots f_k$, зависящих не более чем от n переменных, с помощью операторов суперпозиции и разветвления по предикату равенства может потребоваться использовать промежуточные функции, зависящие более чем от n переменных.

Пример. Пусть $f_1 = (*1-1)$, $f_2 = (*-11)$. Построим все возможные варианты суперпозиций мультифункций f_1, f_2 при условии, что не будем использовать мультифункции от трех и более аргументов:

$$(**11),\quad (*111),\quad (*1*1),\quad (**-1),\quad (***1),\quad (*-*1).$$

При использовании E-оператора с двухместными мультифункциями мы не получим мультифункцию $f_3 = (* - -1)$. Но при использовании трехместной мультифункции g можно получить f_3 :

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2), & \text{если } x_1 = x_3; \\ f_2(x_1, x_2), & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$f_3(x_1, x_2) = g(x_1, x_2, f_1(x_1, x_2)).$$

В связи с рассмотренным выше примером, для работы с функциями, зависящими не более чем от двух переменных, нужно уточнить определения используемых операторов.

Пусть мультифункции f, g_1, g_2, h_1 и h_2 зависят только от двух переменных. Будем говорить, что мультифункция f получается из функций g_1, g_2, h_1, h_2 с помощью операции обобщенного разветвления по предикату равенства (Ex-оператор), если для всех двоичных наборов (α_1, α_2) выполняются следующие условия (в порядке приоритета):

(i) если $h_1(\alpha_1, \alpha_2)$ или $h_2(\alpha_1, \alpha_2) = *$, то

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = *;$$

(ii) если $h_1(\alpha_1, \alpha_2), h_2(\alpha_1, \alpha_2) \in E_2$, то

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} g_1(\alpha_1, \alpha_2), & \text{при } h_1(\alpha_1, \alpha_2) = h_2(\alpha_1, \alpha_2), \\ g_2(\alpha_1, \alpha_2), & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

(iii) если $h_1(\alpha_1, \alpha_2) = -$ или $h_2(\alpha_1, \alpha_2) = -$, то

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = g_1(\alpha_1, \alpha_2) \cup g_2(\alpha_1, \alpha_2).$$

Для краткости будем использовать обозначение

$$f(x_1, x_2) = Ex(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2), h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)).$$

Также ограничим действие суперпозиции. Далее будем рассматривать суперпозиции только следующего вида:

$$g_1(h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)).$$

В операторах в качестве функций h_1 и h_2 допускается использование селекторных функций.

Использование операторов обобщенного разветвления по предикату равенства и ограниченной суперпозиции позволило организовать компьютерные вычисления, в результате которых было получено 76 различных множеств, являющихся подмножествами K_7.

Для доказательства того, что эти классы попарно различны, классу Q сопоставим вектор $v_Q = (\gamma_Q^1, \ldots, \gamma_Q^{13})$ принадлежности множествам $D_1 - D_{13}$, где $\gamma_Q^i = 1$, если класс принадлежит множеству D_i и $\gamma_Q^i = 0$ в противном случае. Очевидно, что из функций некоторого класса K, у которого в позиции l вектор v_K содержит 1, нельзя E-замыканием получить класс K', для которого вектор $v_{K'}$ в этой же позиции содержит 0.

В таблице 1 представлен список E-замкнутых классов, полученных в результате компьютерных вычислений. Столбец I содержит номер класса, столбец II — его обозначение, столбец III — порождающее множество этого класса, столбец IV — вектор принадлежности класса множествам D_1–D_{13}.

Обозначения классов вида A, B соответствуют E классам частичных булевых функций из [4], вида U, V — классам гиперфункций ранга 2 из [6]. Классы Q_i представляют уникальные классы множества K_7.

В столбце IV представлены 76 различных векторов; таким образом, все 76 указанных классов различны. Значит, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Число E-замкнутых классов мультифункций, являющихся подмножествами K_7, не менее* 76.

Вложимость рассматриваемых классов представлена на диаграмме (см. рис. 1).

Таблица 1

I	II	III	IV
1	B_{18}	$(* * * *)$	0110110111001
2	C_1	(1111)	1100000001100
3	U_{16}	$(- - - -)$	1001101000111
4	Q_1	$(* - - *)$	0110110100001
5	Q_2	$(- * * -)$	1001101000001
6	Q_3	$(- * * *)$	0111110010000
7	A_{30}	$(* 1 * *)$	0110010111000
8	Q_4	$(* - * *)$	0110110110000
9	A^*_{28}	$(* * * 1)$	1110000111000
10	V^*_{25}	$(- - 1 1)$	1101010000110
11	Q_5	$(* * * -)$	1010101110000
12	V^*_{24}	$(- - 1 -)$	1001001000110
13	A_{25}	$(* 1 1 *)$	0110010101000
14	Q_6	$(- - - *)$	0111110000000
15	A^*_{27}	$(* 1 1 1)$	1110000101000
16	V^*_{23}	$(- 1 1 1)$	1101010000100
17	Q_7	$(- - * -)$	1001101000000
18	V^*_{22}	$(- 1 1 -)$	1001001000100
19	Q_8	$(* - - -)$	1010101100000
20	D_{13}	$(* * * *), (- * * -)$	0000100000001
21	Q_9	$(* - * *), (* - - *)$	0110110100000
22	Q_{10}	$(- 1 * *)$	0111010010000
23	Q_{11}	$(* - * 1)$	1110000110000
24	Q_{12}	$(* 1 * -)$	1010001110000
25	Q_{13}	$(* 1 * *), (* - * *)$	0110010110000
26	A_{21}	$(1 * * *)$	0110010011000
27	V^*_{20}	$(1 - 1 -)$	1000001000110
28	Q_{14}	$(* * * *), (- * * *)$	0110110010000
29	A^*_{29}	$(* * * *), (* * * 1)$	0110000111000
30	Q_{15}	$(* * * *), (* * * -)$	0010100110000
31	V^*_{19}	$(- - 1 1), (- - 1 -)$	1001000000110
32	A_{14}	$(1 1 1 *)$	0110010001000
33	A_{16}	$(1 * * 1)$	1100000001000
34	V^*_{16}	$(1 - 1 1)$	1100000000100
35	V^*_{17}	$(1 1 1 -)$	1000001000100
36	Q_{16}	$(* * * *), (- - - *)$	0110110000000
37	A_{26}	$(* * * *), (* 1 1 1)$	0110000101000
38	Q_{17}	$(* * * *), (* - - -)$	0010100100000
39	Q_{18}	$(- * * *), (- * * -)$	0001100000000
40	V^*_{15}	$(- 1 1 1), (- 1 1 -)$	1001000000100
41	Q_{19}	$(* * * -), (- * * -)$	1000101000000
42	Q_{20}	$(- 1 1 *)$	0111010000000
43	Q_{21}	$(* - 1 *)$	0110010100000
44	Q_{22}	$(- * * 1)$	1101010000000
45	Q_{23}	$(* - 1 1)$	1110000100000
46	Q_{24}	$(- 1 * -)$	1001001000000
47	Q_{25}	$(* 1 1 -)$	1010001100000
48	A_{22}	$(* * * 1), (1 * * *)$	0110000011000
49	Q_{26}	$(* * * -), (- * * *)$	0010100010000
50	D_{12}	$(1 - 1 -), (- - 1 1)$	1000000000110
51	Q_{27}	$(* * * *), (* - * 1)$	0110000110000
52	Q_{28}	$(* * * 1), (* * * -)$	1010000110000
53	A_{15}	$(* 1 1 1), (1 * * *)$	0110000001000
54	Q_{29}	$(* - - -), (- * * *)$	0010100000000
55	Q_{30}	$(1 - * *)$	0110010010000
56	Q_{31}	$(* * * *), (* 1 * -)$	0010000110000
57	D_{10}	$(* * * *), (1 * * 1)$	0100000001000
58	D_5	$(* * * *), (- - * -)$	0000100000000
59	D_{11}	$(1111), (1 1 1 -)$	1000000000100
60	Q_{32}	$(* * * *), (* - 1 1)$	0110000100000
61	Q_{33}	$(- * * *), (- * * 1)$	0101010000000
62	Q_{34}	$(* * * 1), (* 1 1 -)$	1010000100000
63	Q_{35}	$(- * * 1), (- * * -)$	1001000000000
64	Q_{36}	$(* - * 1), (1 * * *)$	0110000010000
65	D_9	$(* * * -), (1 * * *)$	0010000010000
66	Q_{37}	$(1 - 1 *)$	0110010000000
67	Q_{38}	$(1 - * 1)$	1100000000000
68	D_7	$(1 * * -)$	1000001000000
69	D_8	$(* * * *), (* 1 1 -)$	0010000100000
70	D_4	$(- * * *), (- 1 * -)$	0001000000000
71	D_6	$(* * * *), (- * * 1)$	0100010000000
72	Q_{39}	$(* - 1 1), (1 * * *)$	0110000000000
73	D_3	$(* 1 1 -), (1 * * *)$	0010000000000
74	D_2	$(* * * *), (1 - * 1)$	0100000000000
75	D_1	$(* * * 1), (1 * * -)$	1000000000000
76	K_7	$(* * * *), (1 * * -)$	0000000000000

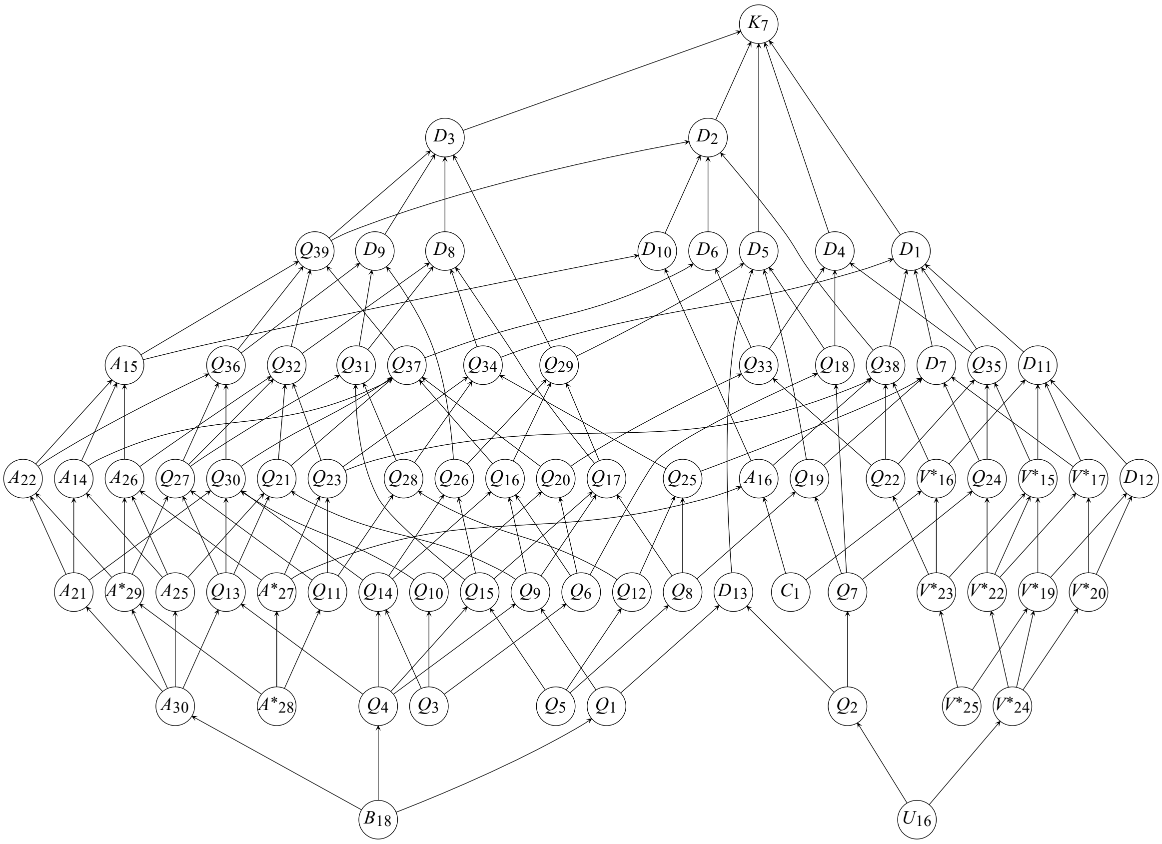

Рис. 1

Теорема 2. *Для любого множества Q множество мультифункций, полученное из элементов Q с помощью операторов обобщенного разветвления по предикату равенства и ограниченной суперпозиции, является подмножеством E-замыкания Q.*

Доказательство. Покажем, что каждую мультифункцию, полученную с помощью операторов обобщенного разветвления по предикату равенства и ограниченной суперпозиции, можно представить формулой с использованием операторов E-замыкания — суперпозиции и оператора с разветвлением по предикату равенства.

Пусть

$$f(x,y,z,t)=\begin{cases} g_1(x,y), & \text{если } z=t,\\ g_2(x,y), & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Определим мультифункцию $U(x,y)$ следующим образом:

$$U(x,y)=f\big(x,y,h_1(x,y),h_2(x,y)\big)$$

и вычислим ее возможные значения для различных значений гиперфункций h_1 и h_2 на некотором наборе (α_1,α_2). Пусть $h_1(\alpha_1,\alpha_2)=\tau_1$ и $h_2(\alpha_1,\alpha_2)=\tau_2$. Рассмотрим все варианты значений τ_1 и τ_2.

(i) Пусть $\tau_1\in E_2$ и $\tau_2\in E_2$; тогда

$$U(\alpha_1,\alpha_2)=f(\alpha_1,\alpha_2,\tau_1,\tau_2)=\begin{cases} g_1(\alpha_1,\alpha_2), & \text{если } \tau_1=\tau_2,\\ g_2(\alpha_1,\alpha_2), & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

(ii) Пусть $\tau_1=-$ и $\tau_2\in E_2$. Подставим значения

$$U(\alpha_1,\alpha_2)=f(\alpha_1,\alpha_2,-,\tau_2)=f(\alpha_1,\alpha_2,0,\tau_2)\cup f(\alpha_1,\alpha_2,1,\tau_2)=g_1(\alpha_1,\alpha_2)\cup g_2(\alpha_1,\alpha_2).$$

Аналогичным образом рассматривается случай $\tau_1 \in E_2$ и $\tau_2 = -$.

(iii) Пусть $\tau_1 = -$ и $\tau_2 = -$; тогда

$$U(\alpha_1, \alpha_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, -, -) = \\ = f(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0) \cup f(\alpha_1, \alpha_2, 0, 1) \cup f(\alpha_1, \alpha_2, 1, 0) \cup f(\alpha_1, \alpha_2, 1, 1) = g_1(\alpha_1, \alpha_2) \cup g_2(\alpha_1, \alpha_2).$$

(iv) Пусть $\tau_1 = *$ и $\tau_2 \in E_2$ или $\tau_2 = -$. Подставим значения

$$U(\alpha_1, \alpha_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, *, \tau_2) = *.$$

Аналогичным образом рассматриваются другие случаи со значением $*$.

Таким образом, значения гиперфункции U на рассматриваемом наборе совпадают со значениями оператора обобщенного разветвления по предикату равенства, построенному для функций g_1, g_2, h_1 и h_2. □

Теорема 3. *Количество E-замкнутых классов множества K_7 равно* 76.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что число E-замкнутых классов мультифункций не превосходит 76. Теорема 1 дает обратную оценку. □

Полученное в [5] E-предполное множество K_8 — мультифункции, не принимающие ни на одном наборе значение 1, — является двойственным к рассматриваемому K_7, соответственно, оно также содержит 76 E-замкнутых классов.

Таким образом, из одиннадцати E-предполных множеств K_1–K_{11} в множестве мультифункций ранга два известна структура пяти: K_5–K_9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченков С. С.* Операторы замыкания с разветвлением по предикату// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. мех. — 2003. — *6.* — С. 37–39.
2. *Марченков С. С.* Оператор E-замыкания на множестве частичных функций многозначной логики// Мат. вопр. киберн. — 2013. — *19.* — С. 227–238.
3. *Марченков С. С.* Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций// Дискр. мат. — 2008. — *20*, № 3. — С. 80–88.
4. *Матвеев С. А.* Построение всех E-замкнутых классов частичных булевых функций// Мат. вопр. киберн. — 2013. — *18.* — С. 239–244.
5. *Panteleev V. I., Riabets L. V.* The completeness criterion for closure operator with the equality predicate branching on the set of multioperations on two-element set// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2019. — *29.* — С. 68–85.
6. *Panteleev V. I., Riabets L. V.* E-Closed sets of hyperfunctions on two-element set// Ж. Сиб. фед. ун-та. Сер. Мат. физ. — 2020. — *13*, № 2. — С. 231–241.
7. *Panteleev V. I., Riabets L. V.* Classification of multioperations of rank 2 by E-precomplete sets// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2020. — *34.* — С. 93–108.

Зинченко Анна Сергеевна
Иркутский государственный университет
E-mail: azinchenko@gmail.com

Ильин Борис Петрович
Иркутский государственный университет
E-mail: ilin_bp@math.isu.ru

Пантелеев Владимир Иннокентьевич
Иркутский государственный университет
E-mail: vl.panteleyev@gmail.com

Рябец Леонид Владимирович
Иркутский государственный университет
E-mail: l.riabets@gmail.com