ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 53–59
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-53-59

УДК 519.1

КОМБИНАТОРНЫЕ СВОЙСТВА ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ПИРАМИДЫ ПАСКАЛЯ И ПОСТРОЕНИЕ НАВИГАЦИОННЫХ МАРШРУТОВ

© 2022 г. **О. В. КУЗЬМИН, Б. А. СТАРКОВ**

Аннотация. В статье описываются методы математического аппарата иерархических структур. Приводится определение обобщенной пирамиды Паскаля и рассматриваются суммы элементов ее плоских сечений. Указываются рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют эти суммы, а также перечислительные интерпретации изучаемых комбинаторных объектов. Описываются комбинаторные пути на целочисленных решетках и применение рекуррентных соотношений для оценки числа отклонений траектории движения беспилотного летательного аппарата от заданного вектора движения.

***Ключевые слова*:** комбинаторный анализ, треугольник Паскаля, обобщенная пирамида Паскаля, рекуррентное свойство, целочисленная решетка, траектория движения.

COMBINATORIAL PROPERTIES OF FLAT SECTIONS OF THE GENERALIZED PASCAL'S PYRAMID AND CONSTRUCTION OF NAVIGATION ROUTES

© 2022 **O. V. KUZMIN, B. A. STARKOV**

Abstract. The article describes the methods of the mathematical apparatus of hierarchical structures. The definition of the generalized Pascal pyramid is given and the sums of the elements of its flat sections are considered. Recurrence relations that these sums satisfy, as well as enumerative interpretations of the combinatorial objects under study are shown. Combinatorial paths on integer lattices and the use of recurrence relations to estimate the number of deviations of the trajectory of an unmanned aerial vehicle from a given motion vector are described.

***Keywords and phrases*:** combinatorial analysis, Pascal's triangle, generalized Pascal's pyramid, recurrent property, integer lattice, trajectory.

***AMS Subject Classification*:** 06A06, 03G10

1. Введение. Комбинаторное моделирование — это процесс, который позволяет нам определить подходящую математическую модель для переформулирования проблемы. Эти комбинаторные модели обеспечат с помощью комбинаторной теории операции, необходимые для решения исходной проблемы (см. [1]).

Можно выделить два основных круга проблем в области комбинаторного моделирования: разработка методов, предназначенных в первую очередь для создания новых и анализа известных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Иркутской области (проект № 20-41-385001).

комбинаторных объектов [9], и приложения комбинаторных чисел в задачах теории вероятностей и математической статистики.

Так, например, в [2] рассматривается метод моделирования комбинаторных последовательностей с использованием особых последовательностей таблиц, состоящих из целых положительных чисел. Эти последовательности называются T-моделями и строятся рекурсивно с помощью специальных отображений. Для T-моделей вводятся q-аналоги, позволяющие моделировать отвечающие им q-аналоги комбинаторных последовательностей. Также определяются частично упорядоченные множества и соответствующие им T-диаграммы. С помощью этих частично упорядоченных множеств и T-диаграмм рассматриваются многочисленные дополнительные свойства моделируемых комбинаторных последовательностей.

В монографии [7] излагаются классические и модифицированные модели исследования дискретных последовательностей на основе аппарата сингулярного разложения. Строятся и исследуются дискретные модели идентификации структурных свойств процессов. Разрабатываются схемы реализации алгоритмических моделей исследования дискретных последовательностей в вычислительной среде на базе сингулярного разложения.

Теория вероятностей и математическая статистика служат наиболее естественными областями приложения комбинаторики. Достаточно перспективным представляется применение комбинаторных методов при построении дискретных моделей случайных величин и случайных процессов (см., например, [3, 5, 8]).

Разработка новых и модификация известных методов математического аппарата, предназначенного для исследования иерархических структур типа обобщенной пирамиды Паскаля, рассматриваемых как частный случай частично упорядоченных множеств, позволяет создавать новые способы и инструменты анализа и построения комбинаторных моделей дискретных объектов и/или их систем. При этом разработанные методы анализа иерархических структур на основе обобщения элементов плоского сечения пирамиды Паскаля по модулю простого числа и рекуррентных правил [11, 15–17] позволяют находить новые комбинаторные свойства известных дискретных объектов, таких как графы и пути на целочисленных решетках, служащих математическими моделями навигационных маршрутов. Полученные комбинаторные свойства возможно использовать при решении ряда задач:

1. Распознавания и представления информации.
2. Интеллектуального машинного зрения.
3. Дихотомической классификационной модели — бинарного дерева принятия решений для оптимизации автономного поиска и навигации кибернетических систем.
4. Поиск оптимальных взвешенных траекторий на решетках с запрещенными позициями и неполной информацией.
5. Построение взвешенных деревьев принятия решений.

Деревья решений являются одним из наиболее эффективных инструментов интеллектуального анализа данных и предсказательной аналитики, которые позволяют решать задачи классификации и регрессии.

Основополагающие идеи, послужившие толчком к появлению и развитию деревьев решений, были заложены в 1950-х годах в области исследований моделирования человеческого поведения с помощью компьютерных систем. Среди них следует выделить работы К. Ховеленда [13] и Е. Ханта и др. [14].

Дальнейшее развитие деревьев решений как самообучающихся моделей для анализа данных связано с именами Джона Р. Куинлена [18, 19], который разработал алгоритм ID3 и его усовершенствованные модификации C4.5 и C5.0, а также Лео Бреймана и др. [12], который предложил алгоритм CART и метод случайного леса.

Как показано в [6], посредством задания весов, множества запрещенных вершин (запрещенных позиций) и последующего стягивания ребер, иерархическая треугольная структура, называемая обобщенным треугольником Паскаля [5], может быть преобразована в соответствующее дерево решений.

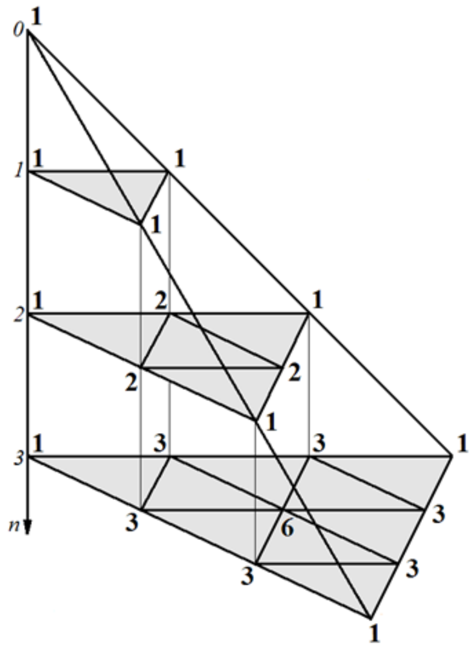

Рис. 1. Горизонтальные сечения пирамиды Паскаля ($\operatorname{tg}\phi = \operatorname{tg}\psi = 0$).

Как показывает практика, исследование и программная реализация алгоритмов поиска пути в графе представляют актуальность и научно-практический интерес. как теоретическое, так и важное практическое значение имеет разработка алгоритмов поиска оптимальной траектории перемещения груза в пространстве с препятствиями с учетом угловой ориентации [4, 10].

2. Плоские сечения обобщенной пирамиды Паскаля. Обобщенной пирамидой Паскаля (ОПП) называется [5] трехгранный пирамидальный массив, элементы которого для целых неотрицательных n, k, l удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$V(n,k,l) = \alpha_{n,k-1,l}V(n-1,k-1,l) + \beta_{n,k,l-1}V(n-1,k,l-1) + \gamma_{n,k,l}V(n-l,k,l) \qquad (1)$$

с граничными условиями $V(0,0,0) = V_0$; $V(n,k,l) = 0$, если $\min(n,k,l,n-k-l) < 0$.

Совместим вершину ОПП с началом прямоугольной декартовой системы координат в пространстве, а его элементы — с точками решетки первого октанта, имеющими неотрицательные координаты [16]. При этом числа n расположим по оси абсцисс, k — по оси ординат, l — по оси аппликат. Тем самым устанавливается соответствие между точками решетки и элементами ОПП, которая будет ограничена плоскостями $k = 0$, $l = 0$ и $n - k - l = 0$. Рассмотрим произвольное плоское сечение ОПП, представляющее собой некоторый треугольник. Обозначим углы, образованные этим сечением с осями ординат и аппликат, через ϕ и ψ соответственно. Тогда уравнение сечения будет иметь вид:

$$n + \operatorname{tg}\phi k + \operatorname{tg}\psi l = c, \qquad (2)$$

где c здесь и далее обозначает некоторую постоянную.

Общий вид семейств сечений ОПП в зависимости от значений углов ϕ и ψ можно продемонстрировать на частном случае — обычной пирамиды Паскаля (см. рис. 1—3).

Разумеется, без геометрического представления результатов, изучаемые объекты, которые возникали в разное время и из разных по своей природе задач, создавали впечатление разрозненности. Геометрический метод представления комбинаторных объектов в качестве элементов обобщенных пирамид Паскаля позволяет единым образом выявлять новые свойства и интерпретации этих объектов. Так, например, рассмотрение элементов, расположенных на плоских сечениях обычной и обобщенной пирамид Паскаля, позволяет получать новые рекуррентные соотношения и производящие функции для ряда хорошо известных комбинаторных чисел и их некоторых

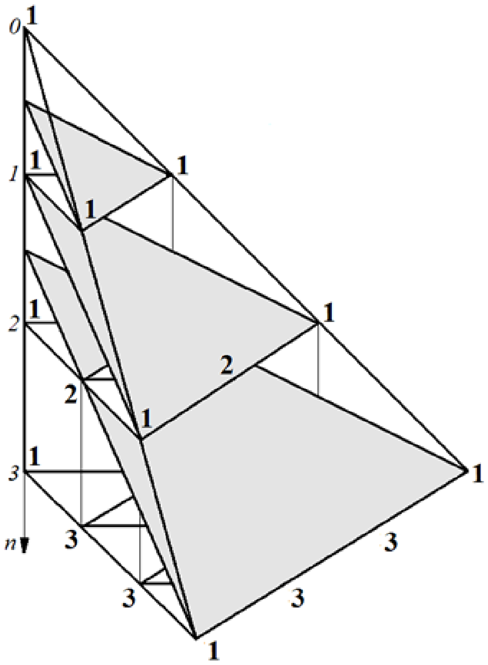

Рис. 2. Нисходящие сечения пирамиды Паскаля ($\operatorname{tg}\phi = \operatorname{tg}\psi = -1/2$).

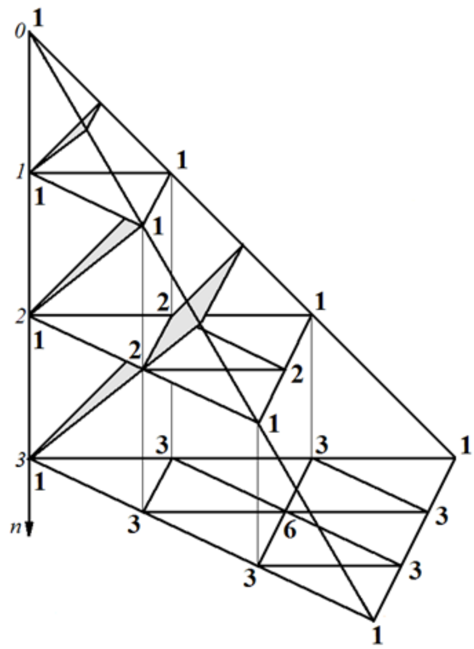

Рис. 3. Восходящие сечения пирамиды Паскаля ($\operatorname{tg}\phi = \operatorname{tg}\psi = 1$).

обобщений. Изучение сечений и частей обобщенной пирамиды Паскаля позволяет устанавливать новые соотношения между известными объектами, переносить свойства одних объектов на другие, а также получать новые объекты, ранее не изученные.

3. Свойства и перечислительные интерпретации. Пронумеруем все параллельные между собой сечения ОПП, заданные уравнением (2), начиная от вершины пирамиды, и рассмотрим последовательность $\{S_N \operatorname{tg}\phi\}$, $\operatorname{tg}\psi$, $N \in \mathbb{N}_0$ сумм всех элементов таких сечений.

Пусть X обозначает сумму элементов $x(x_1, x_2, x_3)$. Рассмотрим оператор $\odot w_{w_1,w_2,w_3}(X)$, который каждому слагаемому $x(x_1, x_2, x_3)$ суммы X ставит в соответствие слагаемое $w_{x_1+w_1,x_2+w_2,x_3+w_3} x(x_1, x_2, x_3)$ суммы $\odot w_{w_1,w_2,w_3}(X)$.

Рассмотрим последовательность сумм:

$$\left\{ S_N \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \right) \right\}, \quad p_1, p_2 \in \mathbb{Z}, \quad q_1, q_2 \in \mathbb{N}, \quad \frac{p_i}{q_i} > -1, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Для частично упорядоченного множества $\{a, b, c\}$ символом $\operatorname{mid}(a, b, c)$ будем обозначать его «средний» элемент, которому предшествует минимальный и за которым следует максимальный элементы этого множества.

Обозначим

$$\begin{aligned} S_N &= S_N \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \right), \\ M_n &= \min \left(q, \frac{q}{q_1}(p_1 + q_1), \frac{q}{q_2}(p_2 + q_2) \right), \\ M_x &= \max \left(q, \frac{q}{q_1}(p_1 + q_1), \frac{q}{q_2}(p_2 + q_2) \right), \\ M_d &= \operatorname{mid} \left(q, \frac{q}{q_1}(p_1 + q_1), \frac{q}{q_2}(p_2 + q_2) \right). \end{aligned} \tag{4}$$

Для последовательности сумм (3) справедливо следующее рекуррентное соотношение [16]:

$$S_N = \odot\alpha_{1,0,0}S_{N-(q/q_1)(p_1+q_1)} + \odot\beta_{1,0,0}S_{N-(q/q_2)(p_2+q_2)} + \odot\gamma_{1,0,0}S_{N-q} \tag{5}$$

с начальными условиями $S_0 = V_0$, $S_1 = S_2 = \ldots = S_{M_n-1} = 0$; S_I, $I = M_n, \ldots, M_d - 1$ задаются соотношениями

$$S_I = \begin{cases} \odot\alpha_{1,0,0}S_{I-(q/q_1)(p_1+q_1)}, & M_n = (q/q_1)(p_1+q_1), \\ \odot\beta_{1,0,0}S_{I-(q/q_2)(p_2+q_2)}, & M_n = (q/q_2)(p_2+q_2), \\ \odot\gamma_{1,0,0}S_{I-q}, & M_n = q; \end{cases} \tag{6}$$

а S_J, $J = M_d, \ldots, M_x - 1$ задаются соотношениями

$$S_I = \begin{cases} \odot\alpha_{1,0,0}S_{J-(q/q_1)(p_1+q_1)} + \odot\beta_{1,0,0}S_{J-(q/q_2)(p_2+q_2)}, & M_x = q, \\ \odot\alpha_{1,0,0}S_{J-(q/q_1)(p_1+q_1)} + \odot\gamma_{1,0,0}S_{J-q}, & M_x = (q/q_2)(p_2+q_2), \\ \odot\beta_{1,0,0}S_{I-(q/q_2)(p_2+q_2)} + \odot\gamma_{1,0,0}S_{J-q}, & M_x = (q/q_1)(p_1+q_1). \end{cases} \tag{7}$$

Указанные рекуррентные соотношения позволяют привести следующую биологическую интерпретацию сечения ООП, обобщающую приведенную в [1].

Дискретное множество переменного состава, элементы которого способны рождаться, умирать и переходить из одной качественной категории в другую, называем популяцией. Не уменьшая общности рассмотрения, считаем, что первоначально популяция однородна — состоит из одинаковых элементов, обладающих двумя доминирующими свойствами: A и B. Развитие популяции рассматриваем дискретно по итогам его последовательных этапов, номера которых $N \geqslant 1$, и по двойным номерам элементов (r, m) — степеням обладания элементом свойствами A и B соответственно $(r, m \geqslant 0, r + m \leqslant N)$. Пусть элементы $(r + 1, m)$-го вида порождаются по прошествии $(q/q_1)(p_1 + q_1)$ этапов развития популяции, элементы $(r, m + 1)$-го вида порождаются по прошествии $(q/q_2)(p_2 + q_2)$ этапов развития популяции, а элементы (r, m)-го вида порождаются по прошествии q этапов развития популяции, то есть ориентируемся на эволюцию без отступлений. Тогда числа $V(N/q - (p_2/q_2)m - (p_1/q_1)r, r, m)$ и операторы $\odot\alpha_{1,0,0}$, $\odot\beta 1, 0, 0$ и $\odot\gamma 1, 0, 0$ в соотношениях (5) (6) (7) могут быть интерпретированы следующим образом.

$V(N/q - (p_2/q_2)m - (p_1/q_1)r, r, m)$ есть объем (количество) элементов (r, m)-го вида в итоге N-го этапа; $\odot\alpha_{1,0,0}$ есть оператор, производящий коэффициенты, представляющие собой доли от объема $V(N/q - (p_2/q_2)m - (p_1/q_1)r, r, m)$, в котором элементы (r, m)-го вида породили элементы $(r + 1, m)$-го вида по прошествии $(q/q_1)(p_1 + q_1)$ этапов развития популяции; $\odot\beta_{1,0,0}$ есть оператор, производящий коэффициенты, представляющие собой доли от объема $V(N/q-(p_2/q_2)m-(p_1/q_1)r, r, m)$, в котором элементы (r, m)-го вида породили элементы $(r, m+1)$-го вида по прошествии $(q/q_2)(p_2+q_2)$ этапов развития популяции; $\odot\gamma_{1,0,0}$ есть оператор, производящий коэффициенты, представляющие собой доли от объема, в котором сохранились элементы (r, m)-го вида по прошествии q этапов развития популяции.

4. Пути на целочисленной решетке. Рассмотрим комбинаторные конфигурации, связанные с перечислением путей на решетках [20]. Решетка является частично упорядоченным множеством [15], в котором каждое двухэлементное подмножество имеет точные как верхнюю, так и нижнюю грани. Также решетки можно рассматривать как некоторые комбинаторные конфигурации, то есть конечное множество точек, прямых, плоскостей, связанных между собой. Пути на решетках (см. рис. 4), начинающиеся обычно в начале координат, являются последовательностями точек целочисленной решетки плоскости с некоторыми ограничениями на приращение координат при переходе от одной точки к следующей. Другими словами, рассматривается последовательность шагов, состовляющих данный путь, причем под шагом понимается упорядоченная пара чисел, показывающая взаимное расположение соседних точек пути. В данной статье будет показана возможность применения комбинаторных свойств сечений ОПП для определения количества путей, разветвляющихся на q-ом этапе движения киберфизической системы.

Рассмотрим конкретный тип путей на решетках.

Пусть $v_0, \ldots, v_n$ — такая последовательность точек из Z^2, что:

(i) $v_0 = (0, j_0)$;

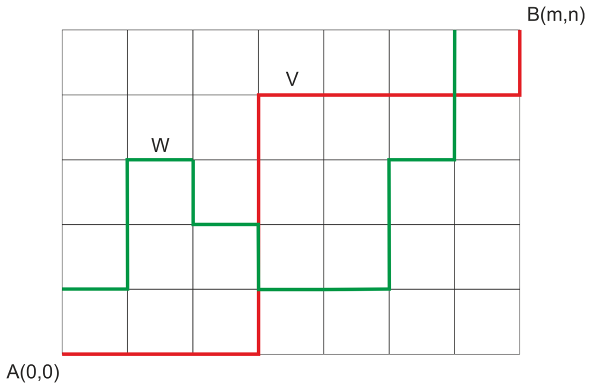

Рис. 4. Комбинаторные пути на целочисленной решетке.

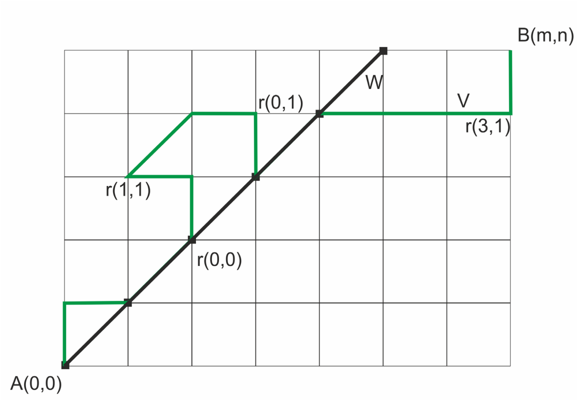

Рис. 5. Отклонение траектории V от целевого вектора W.

(ii) $v_{(k+1)} - v_k = (1,0)$ или $(0,-1)$, $0 < k < l$;

(iii) $\mathrm{alt}(v_k) < 0$, $0 < k < l$, где $\mathrm{alt}(v_k)$ — высота точки v_k.

Тогда $v_0, \ldots, v_n$ называется путем без уровней с началом v_0 и концом v_n и обозначается $v = \langle v_0, \ldots, v_n \rangle (j_0)$. Пусть $M_{(i,j)}$ — множество всех путей v, y, которых $\mathrm{alt}(v_0) = i$, $\mathrm{alt}(v_n) = j$ и $i < \mathrm{alt}(p) < j$ для $p < v$. Множество $M_{(k,0)}$ будем называть множеством путей Мак-Магона.

5. Отклонения в траектории движения. Рассмотрим область действия некоторой киберфизической системы, например, беспилотного летательного аппарата (БПЛА). Разделим область поиска на квадратные секторы (на рис. 5 секторы представляют собой упорядоченный вектор последовательных точек решетки) и зададим целевой вектор маршрута дрона (на рис. 5 целевой вектор обозначен путем W). Во время выполнения поставленной задачи дрон может отклоняться от целевого вектора маршрута [17]. При рассмотрении двумерного случая отклонение траектории движения от целевого вектора рассматривается как по вертикали (свойство A), так и по горизонтали (свойство B).

По аналогии с биологической интерпретацией ООП возможно составить перечислительную интерпретацию диагональных сечений для подсчета числа отклонений (r, m)-го вида на q-м этапе работы БПЛА (прямая задача), так и на основе имеющейся информации об отклонениях траектории движения на всех q этапах работы БПЛА вычислить коэффициенты α, β, γ в соотношении (1) (обратная задача). Решение прямой задачи позволит находить число отклонений определенного типа (r, m) на нужном этапе работы. В задачах геолокационного поиска максимум отклонения от направляющего вектора движения может служить целевой функцией, что дает возможность использовать комбинаторные объекты ООП в качестве метрики оценки эффективности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айгнер М.* Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982.
2. *Бондаренко Л. Н.* Моделирование комбинаторных последовательностей// Образовательные ресурсы и технологии. — 2019. — *2*, № 27. — С. 64–73.
3. *Докин В. Н., Жуков В. Д., Колокольникова Н. А., Кузьмин О. В., Платонов М. Л.* Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1990.
4. *Корытов М. С.* Декомпозиция обобщенных координат при решении задач оптимизации траектории перемещения груза// Вестн. МАДИ. — 2010. — *3*, № 22. — С. 32–35.
5. *Кузьмин О. В.* Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука, 2000.
6. *Кузьмин О. В., Аталян А. В.* Деревья принятия решений в задачах диагностики и прогнозирования// в кн.: Прикладные задачи дискретного анализа. — Изд-во ИГУ, 2019. — С. 64–79.
7. *Кузьмин О. В., Кедрин В. С.* Сингулярное разложение в моделях дискретных последовательностей. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014.

8. *Платонов М. Л.* Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. — М.: Наука, 1979.
9. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. — М.: Мир, 1980.
10. *Щербаков В. С., Корытов М. С.* Алгоритм поиска оптимальной траектории перемещения груза в пространстве с препятствиями с учетом угловой ориентации на основе генетического подхода// Вестн. Иркут. гос. техн. ун-та. — 2011. — *2*, № 49. — С. 14–20.
11. *Balagura A. A., Kuzmin O. V.* Generalised Pascal pyramids and their reciprocals// Discr. Math. Appl. — 2007. — *17*, № 6. — P. 619–628.
12. *Breiman L., Friedman J., Olshen R., Stone C.* Classification and Regression Trees. — Wadsworth, Belmont, CA, 1984.
13. *Hovland C. I.* Computer simulation of thinking// Am. Psychologist. — 1960. — *15*, № 11. — P. 687–693.
14. *Hunt E. B., Marin J., Stone P. J.* Experiments in Induction. — New York: Academic Press, 1966.
15. *Kuzmin O. V., Balagura A. A., Kuzmina V. V., Khudonogov I. A.* Partially ordered sets and combinatory objects of the pyramidal structure// Adv. Appl. Discr. Math. — 2019. — *20*, № 2. — P. 229–236.
16. *Kuzmin O. V., Seregina M. V.* Plane sections of the generalised Pascal pyramid and their interpretations// Discr. Math. Appl. — 2010. — *20*, № 4. — P. 377–389.
17. *Kuzmin O. V., Starkov B. A.* Application of hierarchical structures based on binary matrices with the generalized arithmetic of Pascal's triangle in route building problems// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847*. — 012030.
18. *Quinlan J. R.* Induction of decision trees// Machine Learning. — 1986. — *1*, № 1. — P. 81–106.
19. *Quinlan J. R.* Programs for Machine Learning. — Waltham: Morgan Kaufmann, 1993.
20. *Stanley R.* Enumerated Combinatorics. Vol. 1. — Cambridge Univ. Press, 1997.

Кузьмин Олег Викторович
Иркутский государственный университет
E-mail: `quzminov@mail.ru`

Старков Борис Алексеевич
Иркутский государственный университет
E-mail: `stsibrus@gmail.com`