ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 69–75
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-69-75

УДК 519.142.1

ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БИНАРНЫХ МАТРИЦ, СОСТАВЛЕННЫХ ПРИ ПОМОЩИ ОБОБЩЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПАСКАЛЯ, И ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2022 г. **Б. А. СТАРКОВ**

Аннотация. В статье описывается метод составления бинарных матриц на основе обобщения треугольника Паскаля. Описывается способ параметризации данных бинарных матриц путем выбора определенных образующих и описываются свойства и особенности данного построения. Приводится известный метод построения бинарной матрицы путем редуцирования треугольника Паскаля по простому или составному модулю и осуществляется его сравнение с методом, предложенным в данной статье. Рассматриваются фрактальные свойства указанных бинарных матриц, приводятся возможные применения фрактальных свойств.

***Ключевые слова*:** комбинаторный анализ, треугольник Паскаля, обобщенная пирамида Паскаля, рекуррентное свойство, фрактал, фрактальная размерность.

FRACTAL PROPERTIES OF BINARY MATRICES CONSTRUCTED USING THE GENERALIZED PASCAL'S TRIANGLE AND APPLICATIONS

© 2022 **B. A. STARKOV**

Abstract. In this paper, we describe a method for composing binary matrices based on the generalization of Pascal's triangle. The method of parameterization of these binary matrices by choosing certain generatrices is discussed and the properties of this construction are examined. We also present a well-known method for constructing a binary matrix by reducing the Pascal triangle by a simple or composite modulus and compare it with the method proposed in this paper. The fractal properties of these binary matrices are considered, and possible applications of fractal properties are presented.

***Keywords and phrases*:** combinatorial analysis, Pascal's triangle, generalized Pascal's pyramid, recurrent property, fractal, fractal dimension.

***AMS Subject Classification*:** 05E99, 15B34

1. Введение. Развитие комбинаторной математики вызвало большой интерес к изучению арифметических и геометрических свойств так называемых «арифметических треугольников» [4, 8, 13, 14]. Классическим примером таких треугольников является треугольник Паскаля. Проводятся исследования как самого треугольника Паскаля, так и его плоских и пространственных аналогов и обобщений [12, 13].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Иркутской области (проект № 20-41-385001).

В статье представлены бинарные матрицы, являющиеся классом комбинаторных конфигураций на основе треугольника Паскаля и которые могут рассматриваться как частично упорядоченные множества, даны их перечисленные интерпретации, которые используются для оценки процессов со свойством самоподобия. Комбинаторные конфигурации, моделирующие сложные системы, подсистемы которых подобны общему дизайну системы, содержат фрактальные структуры, свойства которых помогают описывать и идентифицировать различные характеристики природных процессов, в частности, длину береговой линии.

В данной работе указывается связь между треугольником Паскаля и специальным классом фрактальных структур на основе бинарных матриц, при помощи которой становится возможным уникально идентифицировать пополняющиеся множества элементов произвольной природы и учитывать характеристики таких множеств.

Математическая наука эффективно решает множество технических задач и естественно-научных проблем, среди которых экологические вопросы имеют особое значение. Построение эффективной экологической безопасности невозможно без инструментов оценки степени ущерба от стихийных бедствий. Разработаны математические модели для учета распространения пожаров на основе механики многофазных сред [5] и расчета контуров лесных пожаров [2]. Метод построения бинарных матриц на основе треугольника Паскаля и расчета коэффициента, описывающего фрактальные структуры таких матриц, позволяет находить новые свойства лесных пожаров, процессы которых содержат свойство самоподобия.

2. Построение $(0,1)$-матрицы при помощи арифметики треугольника Паскаля. Матрицы, состоящие полностью из элементов 0 и 1 [10, 17], называются бинарными, или $(0,1)$-матрицами, и представляют собой важный класс матриц, которые успешно используются в различных разделах математики. Таким образом, бинарные матрицы определяют и/или представляют бинарные отношения. Граф — хорошо известный дискретный объект — может быть представлен как двоичная матрица, например, как матрица смежности или матрица инцидентности.

В этой статье описываются метод построения двоичных матриц путем задания определенных последовательностей элементов (образующих) и арифметики треугольника Паскаля, а также некоторые их свойств.

Рассмотрим способ построения бинарной матрицы [14] типа треугольника Паскаля. Эта матрица формируется при помощи горизонтальных и вертикальных образующих (первые строка и столбец), состоящих из двоичных символов 0, 1, а также рекуррентного правила расчета элементов бинарной матрицы.

Представим треугольник Паскаля в виде прямоугольной таблицы:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & . \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & . \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & . \\
1 & 5 & 15 & 35 & 70 & . \\
. & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Используя известное правило треугольника Паскаля (элементы, не лежащие на образующей, равны сумме элементов слева и сверху), построим бинарную матрицу, которую будем называть треугольником типа Паскаля [14] с образующими [1 1 0 1 1], [1 1 0 1 0]

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

Представим элементы образующей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в виде конечной последовательности букв, составляющие слово $W = x_1 x_2 \ldots x_n$. В комбинаторике слов [6] на множестве слов над данным алфавитом определена ассоциативная операция конкатенации (приписывания) слов, которую мы будем называть умножением слов. Понятие степени слова вводится по отношению к этой операции естественным образом. Слово, не являющееся степенью никакого другого слова, называется примитивным. Если $W = Z^n$, где Z — примитивно и $n > 1$, то Z называется корнем W.

Шаблоном образующей будем называть последовательность элементов корня слова W, составленного из элементов данной образующей. Так, для образующей [1 1 0 1 1 0] ее шаблоном будет являться последовательность [1 1 0]. Для образующей [1 1 0 1 0 0] не найдется такого примитивного слова Z, при котором для $n > 1$, $W = Z^n$; в этом случае образующая [1 1 0 1 0 0] будет одновременно являться собственным шаблоном.

Отметим, что шаблон в образующей может повториться частично при его последнем вхождении, например в образующей [1 1 0 1 1 0 1] шаблон [1 1 0] входит дважды полностью и один раз в виде его начала. Как следствие, можно при необходимости формировать образующие четной или нечетной длины.

Очевидно, что для построения бинарной матрицы с арифметикой треугольника Паскаля достаточно задать две последовательности символов, формирующих первую строку и первый столбец. При расширении такой прямоугольной таблицы становится очевидным рекуррентное свойство данной матрицы: каждый новый элемент зависит только от двух элементов, уже вычисленных ранее. Перечислим способы построения матрицы с арифметикой треугольника Паскаля, основанных на выборе образующих:

1. Горизонтальная образующая длины n с данным шаблоном длины $k < n$ и диагонально симметричная ей вертикальная образующая формируют квадратную бинарную матрицу размерности $n \times n$.
2. Горизонтальная образующая длины n с данным шаблоном длины $k = n$ и диагонально симметричная ей вертикальная образующая формируют квадратную бинарную матрицу размерности $n \times n$.
3. Горизонтальная образующая длины n и вертикальная образующая длины m с данными шаблонами длины $k < n$, $l < m$ соответственно формируют бинарную матрицу размерности $m \times n$.
4. Горизонтальная образующая размера n с шаблоном длины $k = n$, вертикальная образующая размера m с шаблоном длины $l = m$ формируют бинарную матрицу размерности $m \times n$.

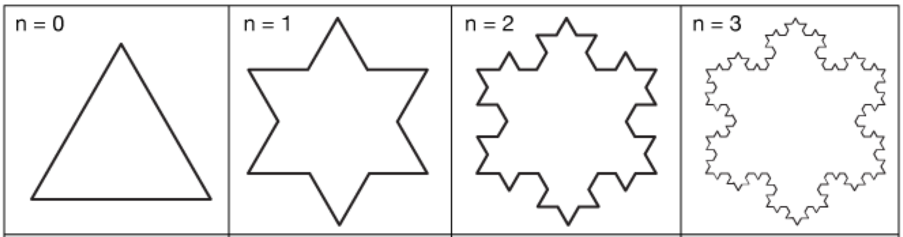
При расширении такой прямоугольной таблицы становится очевидным рекуррентное свойство данной матрицы: каждый новый элемент зависит только от двух элементов, уже вычисленных ранее. Понятно, что вычисление сколько-нибудь большой таблицы по заданной образующей займет некоторое количество времени. Гораздо удобнее составить компьютерную программу, принимающую определенные входные данные и выводящую готовую таблицу.

3. Фрактальные структуры. Многие важные процессы и объекты природы не могут быть описаны классической геометрией. Эти объекты или процессы либо нерегулярны, либо крайне фрагментированы. Никакая поверхность в Евклиде не представляет адекватно границы облаков или грубых турбулентных следов. В 1975 году Бенуа Б. Мандельброт представил семейство форм под названием фракталы [15] или фрактальные множества, которые используются для описания этих сложных структур природы.

Согласно Мандельброту [15] фрактал — это форма, состоящая из частей, в чем-то похожих на целое. Рассмотрим геометрический объект, который будет фракталом (рис. 1).

Первоначально понятие фрактала в физике возникло в связи с проблемой определения длины береговой линии [16]. Было обнаружено, что с уменьшением масштаба длина аппроксимирующей кривой имеет тенденцию неограниченно увеличиваться. Однако значение $a = N(\delta) \cdot \delta^d$, где $d = \mathrm{const} > 1$, остается неизменным. Константа d представляет собой фрактальную размерность береговой линии и может использоваться для однозначного описания береговых линий. Оказалось, что для побережья Англии постоянная $d = 1{,}24$. Таким образом, величина постоянной d характеризует степень изрезанности береговой линии.

В 1984 году Стивен Вольфрам связал в своей работе треугольник Паскаля, редуцированный по модулю 2 (рис. 2), с работой клеточных автоматов [18]. Эти системы были исследованы как простые математические модели природных процессов (таких как рост снежинок), которые демонстрируют явление «самоорганизации».



Number of sides (N)	3	12	48	192
Side length (S)	1	1/3	1/9	1/27
Perimeter length (P)	3	4	5.33	9.11

Рис. 1. Формирование снежинки Коха.

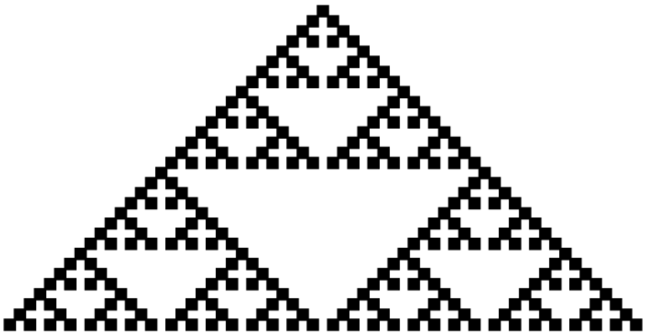


Рис. 2. Треугольник Паскаля, редуцированный по модулю 2.

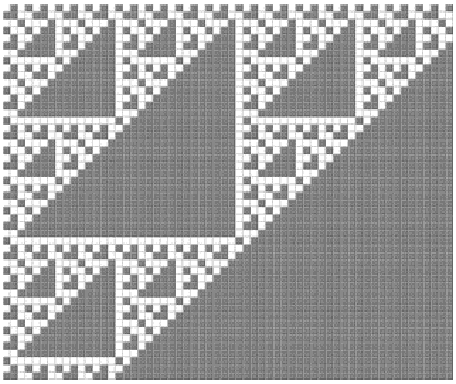


Рис. 3. Фрактальная структура с шаблоном [1 0].

В 1990 г. Б. А. Бондаренко опубликовал монографию [1], в которой рассматривал рекуррентные последовательности вида

$$T_{n,k} = \sum_{i=0}^{l} a_i T_{n-1,k-i}$$

с определенными начальными условиями. В эту схему укладываются треугольник Паскаля, обобщенный треугольник Паскаля, треугольники Люка, Фибоначчи. В работе Бондаренко показываются фрактальные структуры различных треугольников и подсчитаны коэффициенты подобия треугольника Паскаля, элементы которого взяты по $\mathrm{mod} p$ при различных простых p.

В литературе, посвященной свойствам и приложениям треугольника Паскаля и его обобщений (см., напр., [4, 8, 12]), можно встретить анализ элементов треугольника Паскаля по конечному модулю, в частности по простому модулю p, которые образуют некоторые геометрические треугольные решетки — фракталы (рис. 3), играющие значительную роль при анализе различных структур и процессов. Для того чтобы обнаружить свойство самоподобности треугольника Паскаля по модулю p, следует использовать достаточно большое число строк треугольника Паскаля.

Фракталы являются мощным средством для анализа и формирования геометрических структур в самых различных областях математики и физики. В [3] фракталы применяются для инженерного синтеза случайных антенных решеток.

В отличие от редуцирования треугольника Паскаля по конечному или составному модулю, в данной работе излагается иной метод формирования фрактальных структур — выбор по определенному правилу бинарной образующей(их) и основанное на ней дальнейшее построение бинарной матрицы с арифметикой треугольника Паскаля. Таким образом, фрактал на рисунке 2 можно получить не только редуцированием треугольника Паскаля по модулю 2, но и с помощью первого способа построения бинарной матрицы с арифметикой треугольника Паскаля с шаблоном [1 0]. Серый квадрат — ноль, белый квадрат — единица.

Стоит отметить, что, используя различные способы построения образующих, можно получить фракталы, не получаемые редуцированием треугольника Паскаля по модулю p. В матрице 100×100 есть 2^{199} способов выбрать горизонтальную и вертикальную образующие, и, как результат, возможно построить такое же количество фрактальных структур.

Таким образом, метод построения бинарной матрицы с использованием образующих позволяет получить значительно больше различных фрактальных структур, чем метод приведения по модулю p.

4. Фрактальная размерность. Существует несколько определений размерности. Одна из размерностей, геометрическая, выражает минимальное число координат, необходимых для однозначного определения положения точки на прямой, плоскости и в пространстве. Другая, топологическая размерность, при которой размерность любого множества на единицу больше, чем размерность разреза, делящего его на две связные части. Указанные размерности могут быть только целыми. Так, оба определения размерности означают, что линия одномерна, плоскость двумерна, объемное геометрическое тело трехмерно. Кроме указанных размерностей, существуют и другие понятия размерностей. Одно из них — размерность самоподобия. Пусть n — число одинаковых частей, на которые разбивается данный самоподобный объект, имеющих в m раз меньший пространственный размер. Тогда размерность самоподобия D можно определить формулой:

$$D = \frac{\ln n}{\ln m}. \tag{1}$$

Используя введенное понятие, легко определить, что размерность самоподобия квадрата, последовательно деленного на четыре равных квадрата, равна $\ln 4/\ln 2 = 2$, размерность самоподобия куба равна $\ln 8/\ln 2 = 3$.

Многие технические и природные процессы содержат в определенной мере фрактальные структуры, а их фрактальные размерности могут быть расчитаны на основе выборки данных при помощи фрактального анализа. Фрактальная размерность имеет много практических приложений в различных областях, включающих нейробиологию [11], анализ изображений [7], физику [9].

5. Обобщенная пирамида Паскаля и учет развития популяции. Другой известный комбинаторный объект, позволяющий эффективно моделировать свойства и процессы природно-технических систем, — это обобщение пирамиды Паскаля [4, 8, 12]. Для этой комбинаторной модели будет дано определение и предоставлены перечислительные интерпретации в терминах развития популяции.

Пирамида Паскаля представляет собой комбинаторно-алгебраическую структуру (рис. 4), элементами которой являются триномиальные коэффициенты,

$$\binom{n}{k,l} = \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}, \tag{2}$$

которые используются в разложении степени тринома

$$(x_0 + x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{k,l} x_0^k x_1^l x_2^{n-k-l}.$$

Следует отметить, что число n в соотношении (2) указывает количество сечений пирамиды Паскаля, k — номер строки сечения, а l номер его столбца.

Для триномиальных коэффициентов справедливо рекуррентное соотношение:

$$\binom{n+1}{k,l} = \binom{n}{k-1,l} + \binom{n}{k,l-1} + \binom{n}{k,l}. \tag{3}$$

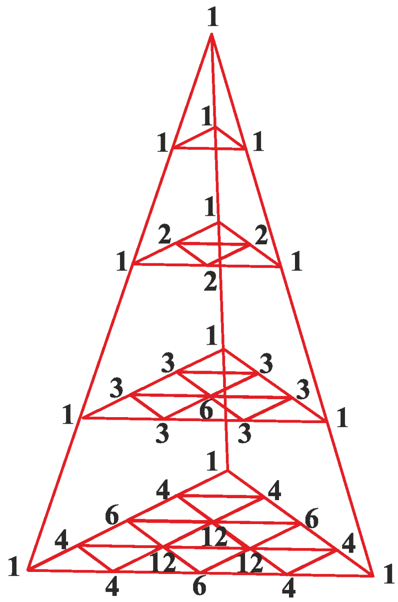


Рис. 4. Пирамида Паскаля.

Рекуррентное соотношение (3) позволяет сделать вывод, что любой внутренний элемент пирамиды Паскаля, стоящий в n-м сечении, равен сумме трех элементов, расположенных в углах треугольника пирамиды $(n-1)$-го сечения пирамиды.

Рассмотрим также расширенную комбинаторную структуру, основанную на пирамиде Паскаля. Обобщенная пирамида Паскаля представляет собой трехгранный пирамидальный массив, элементы которого для неотрицательных целых чисел n, k, l удовлетворяют рекуррентным соотношениям [4]:

$$V(n,k,l) = \alpha_{n,k-1,l} V(n-1,k-1,l) + \beta_{n,k,l-1} V(n-1,k,l-1) + \gamma_{n,k,l} V(n-l,k,l) \qquad (4)$$

с граничными условиями $V(0,0,0) = V_0$; $V(n,k,l) = 0$, если $\min(n,k,l,n-k-l) < 0$. Число V_0 на вершине обобщенной пирамиды Паскаля задается произвольно. Значения $\alpha_{n,k,l}$, $\beta_{n,k,l}$, $\gamma_{n,k,l}$, входящие в соотношение (4), называются весовыми коэффициентами.

Обобщенная пирамида Паскаля допускает перечислительную интерпретацию, согласно которой $V(n,k,l)$ используется для вычисления объема элементов (k,l) [4] вида в результате n-го этапа развития популяции. Под популяцией подразумевается дискретное множество переменного состава, элементы которого способны рождаться, умирать и переходить из одной качественной категории в другую. Развитие популяции рассматривается дискретно, и популяция состоит из однотипных элементов с двумя свойствами A и B со степенями k, l соответственно. Развитие популяции обеспечивает эволюцию без отклонений, то есть элемент (k,l) может генерировать на каждой стадии только элементы либо (k,l), либо $(k+1,l)$, либо $(k,l+1)$. Числа $V(n,k,l)$ и весовые коэффициенты $\alpha_{n,k,l}$, $\beta_{n,k,l}$, $\gamma_{n,k,l}$ в соотношении (2) могут быть интерпретированы следующим образом: $V(n,k,l)$ — объем (количество) элементов (k,l)-го вида в итоге n-го этапа; $\alpha_{n,k,l}$ — доля от объема $V(n-1,k,l)$, в котором элементы (k,l)-го вида породили элементы $(k+1,l)$-го вида на протяжении n-го этапа; $\beta_{n,k,l}$ — доля от объема $V(n-1,k,l)$, в котором элементы (k,l)-го вида породили элементы $(k,l+1)$-го вида на протяжении n-го этапа; $\gamma_{n,k,l}$ — доля элементов (k,l)-го вида, сохранившаяся от объема $V(n-1,k,l)$ на протяжении n-го этапа.

Представляется перспективным метод идентификации и описания схемы развития популяции при помощи фрактального анализа.

Нетрудно заметить, что каждое сечение пирамиды Паскаля представляет собой частный случай треугольника Паскаля, так же как каждое сечение обобщенной пирамиды Паскаля является обобщенным треугольником Паскаля. Представим каждое сечение обобщенной пирамиды Паскаля с бинарной арифметикой в виде бесконечной прямоугольной таблицы, дополнив недостающие элементы при помощи повторения шаблона первых столбца и строки. По аналогии с построениями в разделе 2, каждому сечению обобщенной пирамиды Паскаля можно поставить в соответствие бинарную матрицу, фрактальную размерность которой можно рассчитать при помощи формулы (1). Таким образом, каждой обобщенной пирамиде Паскаля, моделирующей развитие популяции, возможно сопоставить последовательность фрактальных размерностей $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$, при этом F_i, $i = \overline{1, n}$ уникально идентифицирует состояние популяции на n-м этапе развития.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бондаренко Б. А.* Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля, их фрактали, графы и приложения. — Ташкент: Фан, 1990.
2. *Доррер Г. А.* Математические модели динамики лесных пожаров. — М.: Лесная промышленность, 1979.
3. *Ким Й., Джаггард Д. Л.* Фрагментарно-самоподобные (фрактальные) случайные решетки// Тр. Ин-та инж. электротехн. электрон. — 1986. — *74*. — С. 124–126.
4. *Кузьмин О. В.* Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука, 2000.
5. *Нигматулин Р. Н.* Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978.
6. *Шур А. М.* Комбинаторика слов. — Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2003.
7. *Al-Kadi O.S, Watson D.* Texture analysis of aggressive and nonaggressive lung tumor CE CT images// IEEE Trans. Biomed. Eng. — 2008. — *55*, № 7. — P. 1822–1830.
8. *Balagura A. A., Kuzmin O. V.* Generalised Pascal pyramids and their reciprocals// Discr. Math. Appl. — 2007. — *17*, № 6. — P. 619–628.
9. *Dubuc B., Quiniou J., Roques-Carmes C., Tricot C., Zucker S.* Evaluating the fractal dimension of profiles// Phys. Rev. A. — 1989. — *39*, № 3. — P. 1500–1512.
10. *Fulkerson D. R.* Zero-one matrices with zero trace// Pac. J. Math. — 1960. — *10*. — P. 831–836.
11. *King R. D.* Characterization of atrophic changes in the cerebral cortex using fractal dimensional analysis// Brain Imaging Behav. — 2009. — *3*, № 2. — P. 154–166.
12. *Kuzmin O. V., Balagura A. A., Kuzmina V. V., Khudonogov I. A.* Partially ordered sets and combinatory objects of the pyramidal structure// Adv. Appl. Discr. Math. — 2019. — *20*, № 2. — P. 229–236.
13. *Kuzmin O. V., Seregina M. V.* Plane sections of the generalized Pascal pyramid and their interpretations// Discr. Math. Appl. — 2010. — *20*, № 4. — P. 377–389.
14. *Kuzmin O. V., Starkov B. A.* Application of hierarchical structures based on binary matrices with the generalized arithmetic of Pascal's triangle in route building problems// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847*. — 012030.
15. *Mandelbrot B. B.* Fractals: Form, Chance and Dimension. — Echo Point Books & Media, 2020.
16. *Richardson L. F.* The problem of contiguity: an appendix to statistics of deadly quarrels// Gen. Syst. Yearbook. — 1961. — *6*. — P. 139–187.
17. *Ryser H. J.* Matrices of zeros and ones// Bull. Am. Math. Soc. — 1960. — *66*. — P. 442–464.
18. *Wolfram S.* Geometry of binomial coefficients// Am. Math. Month. — 1984. — *91*. — P. 566–571.

Старков Борис Алексеевич
Иркутский государственный университет
E-mail: `stsibrus@gmail.com`