ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 76–81
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-76-81

УДК 514.76

ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ С ПОСТОЯННЫМИ ГЛАВНЫМИ КРИВИЗНАМИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ V^{n+1}

© 2022 г. **Е. Ю. КУЗЬМИНА**

Аннотация. Рассматриваются гиперповерхности в E^{n+1}, для которых найден тонкий веер. Показано, что он есть только для гиперповерхностей в E^{n+1} с постоянными или пропорциональными главными кривизнами, различными между собой. Выяснены условия существования гиперповерхностей в евклидовом пространстве V^{n+1}, главные кривизны которых постоянны (в предположении, что все главные кривизны различны между собой).

Ключевые слова: G-структуры, дифференцируемое многообразие, структурная функция, тонкий веер, инициальная пара.

HYPERSURFACES WITH CONSTANT PRINCIPAL CURVATURES IN EUCLIDEAN SPACE V^{n+1}

© 2022 **E. Yu. KUZMINA**

Abstract. Hypersurfaces in E^{n+1} for which a thin fan is found are considered. It is shown that it exists only for hypersurfaces in E^{n+1} with constant or proportional principal curvatures that differ from each other. The conditions for the existence of hypersurfaces in the Euclidean space V^{n+1}, whose main curvatures are constant (assuming that all the main curvatures are different from each other), are clarified.

Keywords and phrases: G-structures, differentiable manifold, structural function, thin fan, initial pair.

AMS Subject Classification: 53A05

1. Введение. Среди всех расслоений G-структуры, определяемые как редукции расслоения реперов $F(M)$ дифференцируемого многообразия M к линейной группе $G \subset GL(n)$ играют значительную роль в современной дифференциальной геометрии. Впервые понятие G-структуры введено Черном в [11], который привел в своей обзорной статье [12] много задач из различных разделов дифференциальной геометрии, сводящихся к задачам в теории G-структур. Понятие G-структуры позволяет описывать большинство геометрических структур единым методом, однако общих теорем о G-структурах мало, причем даже для конкретной группы Ли ответить на некоторые вопросы достаточно трудно. Основные результаты по проблеме интегрируемости G-структур получены Стернбергом [17] и Гийеминым [13]. Монна в [16] исследовал более широкий класс h-плоских структур, используемых в теории контактных многообразий.

При рассмотрении автоморфизмов и локальных автоморфизмов геометрических структур выделяются различия между структурами конечного и бесконечного типов. Для структуры конечного типа Стернбергом [14] было показано, что группа автоморфизмов является группой Ли.

Поэтому изучение транзитивных структур конечного типа сводится к задачам из геометрии однородных пространств группы Ли. При рассмотрении локально-транзитивных G-структур исследование сводится к изучению пар алгебр Ли [3, 5].

Одним из наиболее простых отображений, не имеющих обратного, является вложение, которое определяет пару структур. G-структуры на подмногообразиях строились в различных работах. Так, в [16] рассмотрена связь между контактными и симплектическими многообразиями. Часто приемы построения канонических или полуканонических реперов [7, 8] можно интерпретировать в терминах теории пар структур, имеющих общую базу. В этом случае подструктура B_0 является редукцией G-структуры B к подгруппе $H \subset G$.

Наиболее важным инвариантом G-структуры является структурная функция, введенная Бернардом в [10] и принимающая свои значения в когомологиях Спенсера. Необходимым, а в инвалютивном случае и достаточным, условием интегрируемости G-структуры является обращение её в нуль. В случае унитарной структурной группы это условие позволяет выделить кэлеровы многообразия.

Однако интересные результаты можно получить только в случае постоянного значения структурной функции, что позволяет выделить лишь достаточно узкий класс структур, не имеющих неголономного продолжения. При обобщении понятия автоморфизма Грушко [2] получен класс сопряженно транзитивных структур, для которых структурная функция уже не является постоянной. Для этого класса введен инвариант, называемый тонким веером и приведен критерий однородности геометрической структуры. Отметим, что такие структуры устойчивы относительно операций расширения структурной группы и неголономного продолжения [4].

Введение понятия инициальной пары [1] позволяет рассматривать подмногообразия в теории G-структур и посредством обобщения тонкого веера геометрической структуры на пару G-структур [9] выделять сопряженно транзитивные подмногообразия в E^{n+1}.

С гиперповерхностью M в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1} можно связать канонический репер $\{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n, \overline{e}_{n+1}\}$ такой, что вектор $\overline{e}_{n+1}$ в любой точке A гиперповерхности M направлен по нормали к поверхности, а векторы $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n$ — по касательным к линиям кривизны, принятым за координатные линии. Заметим, что n различных главных направлений в окрестности точки A однозначно определяется только в случае различных главных кривизн в точке A (см., напр., [15]), поэтому предполагаем, что в каждой точке гиперповерхности M значения главных кривизн различны между собой. Через B_0 обозначим множество таких реперов во всех точках гиперповерхности M. Через $\mathcal{B}$ обозначим риманову структуру в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1}. Очевидно, $B_0 \subset \mathcal{B}$ — инициальная пара, для которой структурная функция сводится к инвариантам канонического репера.

В данной работе приводится построение тонкого веера для гиперповерхностей, на которых можно задать канонический репер, и показывается, что он существует только для поверхностей малых размерностей ($\dim E^{n+1} \leqslant 3$). Веер первого порядка существует для гиперповерхностей с постоянными значениями инвариантов канонического репера и гиперповерхностей с пропорциональными между собой инвариантами канонического репера. Поверхностями, обладающими тонким веером, являются окружность и логарифмическая спираль в E^2, цилиндр, конус и цилиндрическая поверхность, образующая которой — логарифмическая спираль в E^3 (см. [6]).

Классификация гиперповерхностей с постоянными главными кривизнами в евклидовом пространстве V^{n+1} приводит к задаче описания представлений V компактных групп Ли G и векторов $v \in V$ с единичными стационарными подгруппами [15].

2. Построение тонкого веера в E^{n+1}.

С каждой гиперповерхностью в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве можно связать пару структур $B_0 \subset B$ следующим образом.

Пусть M_1 — область U в $\mathbb{R}^n$, $M_2 = E^{n+1}$. Пусть в M_2 задана поверхность $\overline{r} = \overline{r}(u)$, где $\overline{r}\colon M_1 \to M_2$. Определим на M_1 абсолютный параллелизм $G_0 = e$. За ω_1 возьмем $\theta = A du$, $u \in M_1$, $A = (a_{ij})$ — симметрическая матрица порядка n. Получили e-структуру на M_1.

Рассмотрим плоскую $O(n+1)$-структуру B_2 в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве M_2 с формой смещения $\omega_2 = g^{-1}dx$, где $g \in G$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Пусть $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\}$ — стандартный репер в $V_1 = \mathbb{R}^n$, $\{\overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots, \overline{E}_{n+1}\}$ — стандартный ортонормированный репер в $V_2 = \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\psi\colon M_1 \to O(n+1)$ — такое отображение, что $\psi(u) = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n, \overline{e}_{n+1}\}$, где $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ — ортонормированный репер в $\mathbb{R}^{n+1}$, $u \in M_1$ такой, что $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ касаются M_1, а $\overline{e}_{n+1}$ — нормаль к поверхности.

Тогда формула

$$f(u) = (\overline{r}(u), \psi(u))$$

задает морфизм структур $f\colon B_1 \to B_2$, если $\psi(u) = Adu = d\overline{r}$ и $A = \sqrt{g}$, где g — матрица первой квадратичной формы поверхности $r(u)$.

Пусть $l\colon V_1 \to V_2$ вложение такое, что $l\overline{F_i} = \overline{E_i}$, $i = \overline{1,n}$. Очевидно, что

$$\overline{r_i} = \sum_\alpha a_{\alpha_i}\overline{e}_\alpha, \quad i, \alpha = \overline{1,n}, \quad \overline{N} = \overline{e}_{n+1},$$

где $\overline{N}$ — нормаль к поверхности $\overline{r} = \overline{r}(u)$.

Рассмотрим теперь прямое произведение G-структур $B = B_1 \times B_2$. Тогда $V = V_1 + V_2$, $M = M_1 + M_2$, форма смещения $\omega = (A(u)du, u \in M_1, g^{-1}dx)$. В качестве V_0 выберем линейное подпространство $\{v, lv \mid v \in V_1\} \subset V$, представляющее собой линейную оболочку векторов $\{\overline{E}_1 + \overline{F_1}, \overline{E}_2 + \overline{F_2}, \ldots, \overline{E}_n + \overline{F_n}\}$. Через M_0 обозначим подпространство $\{u, \overline{r}(u) \mid u \in M_1\} \subset M$. Тогда $B_0 \subset B$ представляет собой график отображения

$$B_0 = \{u, (\overline{r}(u), \psi(u) \mid u \in M_1)\}, \quad G_0 = e.$$

Найдем относительные гомологии Спенсера данной пары $B_0 \subset B$ структур.

Запишем линейное отображение $\gamma\colon V \to \hat{G}$ такое, что $\gamma V_0 \subset \hat{G}_0$ и $\gamma(\overline{E}_i + \overline{F}_i) = 0$, $i = \overline{1,n}$, то есть $\gamma\overline{E}_i = -\gamma\overline{F}_i$. Пусть $\partial\gamma(v_1, v_2) = \gamma v_1 v_2 - \gamma v_2 v_1$ — граничные элементы в пространстве $\overline{(\Lambda^2 V^* \oplus V)}$. Тогда с учетом условия $\overline{Q}(V_0, V_0)?V_0$ пространство относительных гомологий Спенсера изоморфно прямой сумме пространств $\Lambda^2 V_2^* \oplus V_1 + \Lambda^2 V_1^* \oplus V_1 + V_1^* \oplus V_2^* \oplus V_1 + V_1^* \oplus V_2^* \oplus V_2$.

Изоморфизм задается формулой

$$\langle\overline{Q}(x, \overline{E}_{n+1}), y\rangle + \langle\overline{Q}(y, \overline{E}_{n+1}), x\rangle, \quad x, y \in V.$$

Подсчитаем теперь структурную функцию пары $B_0 \subset B$ структур. Пусть s — горизонтальная площадка в точке $x \in M_0$ такая, что $s(\overline{E}_p + \overline{F}_p)$, $p = \overline{1,n}$, касается структуры B_0, например,

$$s\overline{E}_j = (0, 0, 0, g\overline{E}_i); s\overline{F}_j = (0, A^{-1}\overline{F}_j, g\mu\overline{F}_j, 0),$$

где $i = \overline{1, n+1}$, $j = \overline{1,n}$, $\mu\colon \mathbb{R}^n \to o(n+1)$.

Положим $\mu\overline{F}_\alpha = \mu^p\overline{F}_{q\alpha}$, $\alpha = \overline{1,n}$, $q, p = \overline{1, n+1}$. Тогда получаем следующие ненулевые элементы пространства $\overline{H}^{\lambda_1 - 1}(V, G; V_0, G_0)$:

$$\overline{Q}(\overline{E}_i, \overline{F}_j) = -\mu\overline{F}_j\overline{E}_i = \mu_{ij}^p\overline{F}_p;$$
$$\overline{Q}(\overline{F}_i, \overline{F}_j) = \partial A_{A^{-1}\overline{F}_i} \circ A^{-1}\overline{F}_j - \partial A_{A^{-1}\overline{F}_i} \circ A^{-1}\overline{F}_i.$$

Рассмотрим теперь три возможные группы N_0:

I. $N_0 = G_0 = e$**.** В этом случае получаем, что $\overline{H} = l, a(x) = 1$. Условие $\overline{Q}(x)^{a(y)} = \overline{Q}(y)$ выполняется только при постоянных значениях μ_{ij}^p. В частности, тонкий веер существует для поверхностей с постоянными главными кривизнами.

II. $N_0 = \Lambda(n+1)$**.** Пусть $\mu\colon \mathbb{R}^n \to o(n+1)$ — такое отображение, что $\overline{Q}(v_1, v_2) = -\mu(v_2)v_1$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Если отображение $a(x)\colon U_b \to N_0$ удовлетворяет условиям

$$a(b) = 1, \quad R_g U_b = U_b, \quad a(R_g x) = g^{-1}a(x), \quad g \in G, \quad x \in U_b,$$
$$\overline{\varphi}(y) = \overline{\varphi}(b)^{a(y)}, \quad y \in U_b,$$

то отображение $a(x)$ можно задать следующим образом:

$$a(x) = \frac{k_1(x)}{k_1(y)} = \frac{k_2(x)}{k_2(y)} = \ldots = \frac{k_n(x)}{k_n(y)},$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — главные кривизны в точках x и y гиперповерхности μ_0 и $\overline{H} = e$. Веер первого приближения определен для гиперповерхностей, у которых главные кривизны связаны соотношениями

$$k_\alpha(y) = k_\alpha k_1(y), \quad \alpha = \overline{1,n}.$$

Теперь подсчитаем значение функции $\overline{\Gamma}$ на векторах $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots, \overline{E}_n$, $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$. Очевидно, что

$$\overline{\Gamma E}_1 = \overline{\Gamma E}_2 = \ldots = \overline{\Gamma E}_{n+1} = 0,$$

$$\overline{\Gamma F}_i = \frac{\partial a}{\partial u_i} = -\frac{\partial k_i(x)/\partial u_i}{k_i(x)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Предположим теперь, что множество вееров первого приближения содержится в одной орбите группы N_0. Это означает выполнение равенства $\overline{\varphi}(y) = \overline{\varphi}(b)^{a(y)}$. Действие отображения a на структурных константах уже посчитано, вычислим теперь действие отображения a на функции $\overline{\Gamma}$:

$$\overline{\Gamma}_x^{a(y)}\overline{E}_i = 0, \quad i = \overline{1, n+1};$$

$$\overline{\Gamma}^{a(y)}\overline{F}_i = Ad_{a(y)}\overline{\Gamma}(a^{-1}(y)\overline{F}_i) = \frac{k_1(y)}{k_1(x)} \cdot \frac{\partial k_1(x)/\partial u_i}{k(x)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Должно выполняться условие

$$\overline{\Gamma}^{a(y)}\overline{F}_i = \overline{F}_y\overline{F}_i - \gamma\overline{F}_i.$$

Так как $\overline{\Gamma}^{a(y)}\overline{E}_i = 0$, $i = \overline{1, n+1}$, то $\gamma\overline{E}_i = 0$, следовательно, $\gamma\overline{F}_i = 0$, то есть в случае тонкого веера кривизны гиперповерхности дополнительно связаны соотношениями

$$\frac{k_i(y) \cdot \partial k_i(x)/\partial u_j}{k_i^2(x)} = \frac{\partial k_i(y)/\partial u_j}{k_i(y)},$$

или

$$\frac{\partial k_i(y)}{\partial u_j} = c_{ij}k_i^2(y), \quad i, j = \overline{1,n}.$$

Решая эту систему дифференциальных уравнений в частных производных, получаем, что

$$k_i(y) = -\frac{1}{\sum_{j=1}^n c_{ij}u_j + c_{i,n+1}},$$

где c_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1, n+1}$ — произвольные постоянные, одновременно не равные нулю.

III. Предположим, что

$$N_0 \supset \left\{ \begin{pmatrix} A & & 0 & \\ & & A & & 0 \\ 0 & & & & \\ & & 0 & & A \end{pmatrix} \right\},$$

где $A \in O(n) \times \lambda$, λ — число, отличное от нуля. Пусть $\mu\colon \mathbb{R}^n \to o(n+1)$ — такое отображение, что

$$\overline{Q}(v_1, v_2) = \mu(v_2)v_1; \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n, \quad v_2 = lv_1;$$

$$\overline{Q}(\overline{E}_{n+1}, v_2) = -\mu(v_2)\overline{E}_{n+1}.$$

Отображение $a : U_b \to N_0$ ищем в виде

$$a(y) = \left\{ \begin{pmatrix} A & & 0 & \\ & & A & & 0 \\ 0 & & & & \\ & & 0 & & A \end{pmatrix} \right\}.$$

Из условия $\overline{Q}(x)^{a(y)} = \overline{Q}(y)$ получаем

$$\overline{Q}_x^{a(y)}(v_1, v_2) = A\overline{Q}_x(A^{-1}v_1, A^{-1}v_2) = -A_\mu(A^{-1}v_2)A^{-1}v_1;$$

$$\overline{Q}_x^{a(y)}(\overline{E}_{n+1}, v_2) = \lambda\overline{Q}(\lambda^{-1}\overline{E}_{n+1}, A^{-1}v_2) = \overline{Q}(\overline{E}_{n+1}, A^{-1}v_2) = -\mu(A^{-1}v_2)\overline{E}_{n+1}.$$

Очевидно, что $\overline{H} = e$. Действительно, на A и λ имеем условия:

$$A_\mu(A^{-1}v_2)A^{-1}v_1 = \mu(v_2)v_1; \quad \mu(A^{-1}v_2)\overline{E}_{n+1} = \mu(v_2)\overline{E}_{n+1},$$

т.е. $\mu(A^{-1}y) = \mu(y)$ или $A = J$.

На отображение $a(x)$ получаем условия

$$-A\mu_x(A^{-1}v_2)A^{-1}v_1 = -\mu_y(v_2)v_1; \quad \mu_y(v_2)\overline{E}_{n+1} = \mu_x(A^{-1}v_2)\overline{E}_{n+1},$$

из которых получаем, что

$$A\mu_x(A^{-1}v_2) = \mu_x(A^{-1}v_2)A.$$

Так как матрица $\mu(v_2)$ в общем случае произвольна (мы предполагаем только, что её собственные числа различны), то перестановочность матриц A и $\mu(v_2)$ означает, что A — скалярная матрица, то есть случай III свелся к случаю II.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Для гиперповерхностей в E^{n+1}, $n \geqslant 2$, тонкий веер существует в случае либо постоянных главных (различных между собой) кривизн, либо главных кривизн, пропорциональных между собой.*

3. Существование гиперповерхностей с постоянными главными кривизнами в евклидовом пространстве V^{n+1}. Выясним теперь, существуют ли такие поверхности, главные кривизны которых постоянны (в предположении, что все главные кривизны различны между собой).

Рассмотрим в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве V^{n+1} n-мерную поверхность $\overline{r} = \overline{r}(u)$.

Уравнения дифференцируемых перемещений репера $\overline{r}, \overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$ на поверхности $\overline{r} = \overline{r}(u)$ запишем в следующем виде:

$$d\bar{r} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \quad i, j = \overline{1, n+1},$$

где $\omega_i^j = \Gamma_{ik}^j \omega^k$ считаем постоянными числами.

Введем матрицу $\Gamma = (\Gamma_{ik}^j)$, $\Gamma_{ik}^j = \langle \Gamma \bar{E}_k \bar{E}_i, \bar{E}_j \rangle$. Запишем уравнения структуры:

$$d\omega^i = \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^i, \quad d\omega_i^j = \omega_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^j.$$

Тогда

$$d(\Gamma_{ik}^j \omega^k) = \Gamma_{i\beta}^\alpha \omega^\beta \wedge \Gamma_{\alpha\gamma}^j \omega^\gamma;$$
$$\Gamma_{ik}^j \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^k = \Gamma_{i\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^j \omega^\beta \wedge \omega^\gamma;$$
$$\Gamma_{ik}^j \Gamma_{\alpha\gamma}^k \omega^\alpha \wedge \omega^\gamma = \Gamma_{i\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^j \omega^\beta \wedge \omega^\gamma.$$

Приравниваем коэффициенты при $\omega^\beta \wedge \omega^\gamma$:

$$\Gamma_{ik}^j(\Gamma_{\beta\gamma}^k - \Gamma_{\gamma\beta}^k) = \Gamma_{i\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^j - \Gamma_{i\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^j,$$

или в общем виде:

$$\Gamma(\Gamma \bar{E}_\beta - \Gamma \bar{E}_\gamma) = [\Gamma \bar{E}_\beta, \Gamma \bar{E}_\gamma]. \tag{1}$$

Пусть теперь в V^{n+1} задана ортогональная структура $\mathcal{B} = o(n+1) \times \mathbb{R}^{n+1}$. На многообразии B рассмотрим дифференциальную систему

$$\omega^{n+1} = 0, \quad \omega_i^j = \Gamma_{ik}^j \omega^k, \ k = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Замыкание дифференциальной системы дает еще два уравнения:

$$\omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^{n+1} = 0, \quad \omega_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^j = \Gamma_{ik}^j \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^k,$$

т.е.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{n+1} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta = 0, \quad \Gamma_{i\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^j \omega^\beta \wedge \omega^\gamma = \Gamma_{ik}^j \Gamma_{\alpha\beta}^k \omega^\alpha \wedge \omega^\beta.$$

Это означает, что $\Gamma_{\alpha\beta}^{n+1}$ симметричны по $\alpha, \beta \leqslant n$, $k = \overline{1, n}$. Из последнего уравнения следует равенство (3).

Всякий n-мерный интегральный элемент, проектирующийся изоморфно на V_0, имеет вид

$$E = \{sv + j\gamma v \mid v \in V_0\},$$

где V_0 — линейная оболочка, натянутая на векторы

$$\{\bar{E}_1, \bar{E}_2, \ldots, \bar{E}_n\} \subset \bar{E}^{n+1}; \quad \gamma \in V_0^* \otimes o(n+1).$$

Из второго уравнения системы (2) следует, что $\gamma_i^j(v) = \Gamma_{ik}^j v_k$. Следовательно, интегральный элемент E определяется однозначно и размерность расслоения таких интегральных элементов равна размерности B.

Рассмотрим конкретный интегральный элемент:

$$E_0 = \{su + j_b\gamma_0 u \mid u \in V_0\}, \quad \gamma_0 \in \Gamma, \quad b \in B_0.$$

Если $0 \subset U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_{n-1} \subset V_0$ — квазирегулярный флаг, $\dim U_i = i$, то полярный к $E_0(U_i)$ элемент имеет вид: $H_i = \{sw+\lambda\}$, где $w \in V$, $\lambda \in o(n+1)$. При этом из первого уравнения системы (2) следует, что $w \in V_0$, из второго уравнения системы (2) — $\lambda_i^j(w) = \Gamma_{ik}^j \omega^k$.

Следовательно, элемент E_0 — ординарный. В силу теоремы Картана—Кэлера существует n-мерное интегральное многообразие, проходящее через точку b с касательной плоскостью E_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Грушко П. Я.* Морфизмы геометрических структур// Мат. заметки. — 1977. — *22*, № 5. — С. 844–849.
2. *Грушко П. Я.* О проблеме сопряженной эквивалентности Картана// Сиб. мат. ж. — 1981. — *22*, № 1. — С. 68–80.
3. *Грушко П. Я.* Сопряженно транзитивные структуры конечного типа// Изв. вузов. Мат. — 1981. — № 2. — С. 24–29.
4. *Грушко П. Я.* Сопряженно транзитивные структуры// Сиб. мат. ж. — 1983. — *24*, № 1. — С. 68–78.
5. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1986.
6. *Кузьмина Е. Ю.* Некоторые примеры пар геометрических структур в классической дифференциальной геометрии. — Деп. в ВИНИТИ СССР. 06.06.1984. — 06.06.1984.— № 4752-84.
7. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1953. — *2*. — С. 275–382..
8. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.
9. *Шилов Г. Е.* Математический анализ функции нескольких вещественных переменных. Ч. 1, 2. — М.: Наука, 1972.
10. *Bernard D.* Sur la geometrie differentielle des G-structures// Ann. Inst. Fourier. — 1960. — *10*. — P. 153–273.
11. *Chern S. S.* Pseudo-groupes continus infinis// in: Géométrie différentielle. V. LII. — Colloques Internationale du C.N.R.S., Strasbourg, 1953. — P. 119–136.
12. *Chern S. S* The geometry of G-structures// Bull. Am. Math. Soc. — 1966. — *72*. — P. 167–219.
13. *Guillemin V.* The integrability problem for G-structures// Trans. Am. Math. Soc. — 1965. — *116*. — P. 544–560.
14. *Hsiang W. C., Hsiang W. Y.* Differentiable action of compact connected classical groups, II// Ann. Math. — 1970. — *92*. — P. 189–223.
15. *Kuzmina E. Yu.* Representations of simple Lie algebras with vectors having a zero stationary subalgebra// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847*. — 012031.
16. *Monna G.* Integrabilite des structures de presque contact// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1980. — *291*. — P. 215–217.
17. *Singer I. M., Sternberg S.* The infinite groups of Lie and Cartan. Part 1. The transitive groups// J. Anal. Math. — 1965. — *15*. — P. 1–114.

Кузьмина Елена Юрьевна
Иркутский государственный университет
E-mail: quzminov@mail.ru