ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 237 (2024). С. 3–9
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-237-3-9

УДК 517.954

О РАЗРЕШИМОСТИ ВАРИАЦИОННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

© 2024 г. **А. С. БОНДАРЕВ, А. А. ПЕТРОВА, О. М. ПИРОВСКИХ**

Аннотация. В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается параболическая задача с весовым интегральным условием по времени специального вида. Получены условия, при которых решение задачи обладает большей гладкостью, чем слабое решение, существование и единственность которого были доказаны ранее.

Ключевые слова: параболическое уравнение, нелокальное по времени условие, гладкая разрешимость, обобщенная разрешимость.

ON THE SOLVABILITY OF A VARIATIONAL PARABOLIC EQUATION WITH A NONLOCAL-IN-TIME CONDITION ON THE SOLUTION

© 2024 **A. S. BONDAREV, A. A. PETROVA, O. M. PIROVSKIKH**

Abstract. In a separable Hilbert space, a parabolic equation with a special time-weighted integral condition is considered. Conditions are obtained under which the solution to the problem is more smooth than a weak solution, the existence and uniqueness of which was proved earlier.

Keywords and phrases: parabolic equation, nonlocal-in-time condition, smooth solvability, generalized solvability.

AMS Subject Classification: 58D25, 35Kxx

1. Постановка задачи. Пусть задана тройка вложенных сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения плотные и непрерывные. На $u, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u,v)$. Пусть для всех $u, v \in V$ выполнены оценки

$$|a(u,v)| \leqslant \mu \|u\|_V \|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|_V^2, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$, для которого $a(u,v) = (Au, v)$ ((z,v) — значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$). Для $z \in H$ выражение (z,v) совпадает со скалярным произведением в H (см. [7, с. 58]). Из определения оператора A следует оценка $\|A\|_{V \to V'} \leqslant \mu$.

В пространстве V' на $[0,T]$ рассмотрим параболическую задачу

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad \int_0^T p(t) u'(t)\, dt = \overline{u}. \tag{2}$$

В (2) на $[0,T]$ заданы функция $t \to f(t) \in V'$ и функция $t \to p(t) \in \mathbb{R}^1$, а также элемент $\overline{u}$. Производные функций в настоящей работе понимаются в обобщенном смысле.

Отметим, что вопросы разрешимости абстрактного параболического уравнения с переменным оператором $A(t)$ и периодическим по времени условием на решение рассматривались в [2]. В [8,9] изучались гладкая и обобщенная разрешимость параболического уравнения с весовым интегральным по времени условием на решение. В [12] для абстрактных дифференциальных уравнений с нелокальным по времени условием на решение наиболее общего вида получен критерий единственности в терминах собственных значений.

Приведем теорему о слабой разрешимости задачи (2).

Теорема 1 (см. [3]). *Пусть в задаче* (2) *выполнены условия* (1) *и вложение* $V \subset H$ *компактно. Пусть также* $f \in L_2(0,T;H)$, *а функция* $p(t)$ *является абсолютно непрерывной на* $[0,T]$, *невозрастающей и принимает положительные значения на* $[0,T]$. *Предположим, что* $\overline{u} \in V$. *Тогда существует единственная функция* $u(t)$, $u \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$, *удовлетворяющая в* (2) *уравнению почти всюду на* $[0,T]$ *и интегральному условию. Кроме того, справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)\|_H^2 + \int_0^T \left(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2\right) dt \leqslant C \left(\|\overline{u}\|_V^2 + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 \, dt\right).$$

2. Гладкая разрешимость. Для получения более гладких, чем в [3], решений сделаем дополнительные предположения об исходных данных задачи (2).

Определим множество $D(A) = \{u \in V : Au \in H\}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть функция* $f \in L_1(0,T;H) \cap L_2(0,T;V')$ *такова, что её обобщённая производная* f' *принадлежит классу* $L_2(0,T;V')$ *и* $Af \in L_1(0,T;H)$. *Предположим, что* $f(0) \in H$ *и* $\overline{u} \in D(A)$, *т.е.* $A\overline{u} \in H$. *Тогда задача* (2) *имеет единственное решение* $u(t)$, *удовлетворяющее условиям* $u' \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$, $u'' \in L_2(0,T;V')$. *Кроме того, справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u'(t)\|_H^2 + \int_0^T \left(\|u'(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_{V'}^2\right) dt \leqslant$$
$$\leqslant K \left\{ \|A\overline{u}\|_H^2 + \left(\int_0^T \|Af(t)\|_H \, dt\right)^2 + \int_0^T \left(\|f(t)\|_{V'}^2 + \|f'(t)\|_{V'}^2\right) dt + \|f(0)\|_H^2 \right\}. \quad (3)$$

Доказательство. Заметим, что из условия $f' \in L_2(0,T;V')$ следует, что $f \in C([0,T],V')$, поэтому выражение $f(0) \in V'$ имеет смысл и предположение $f(0) \in H$ корректно. Отметим также, что в силу теоремы 1 о слабой разрешимости задачи (2) гладкое решение $u(t)$, если оно существует, будет единственным.

В [10] показано, что если элемент $u_0 \in V$ удовлетворяет условию $Au_0 \in H$, то в условиях данной теоремы функция

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) \, ds \quad (4)$$

является в пространстве V' решением задачи Коши

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u_0,$$

удовлетворяющим указанной в теореме 2 гладкости. Выясним, при каком $u_0 \in D(A)$ функция $u(t)$, построенная по формуле (4), будет удовлетворять интегральному условию в (2).

На множестве $D(A)$ определим норму $\|v\|_{D(A)} = \|Av\|_H$, с которой $D(A)$ будет являться банаховым пространством. Рассмотрим оператор

$$B = A\int\limits_0^T p(t)e^{-At}dt = -\int\limits_0^T p(t)\frac{d}{dt}(e^{-At})dt = p(0)\left(\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-At}\right) + \frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}dt\right). \quad (5)$$

Покажем обратимость оператора $B : D(A) \to D(A)$. Используя [(2.6)] [3], для $v \in V$ имеем

$$\left\|\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}v\right\|_{D(A)} = \left\|\frac{p(T)}{p(0)}Ae^{-AT}v\right\|_H \leqslant \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\lambda T}\|Av\|_H = \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\lambda T}\|v\|_{D(A)},$$

где $\lambda = \alpha/\beta^2$ и β таково, что $\|u\|_H \leqslant \beta\|u\|_V$ для всех $u \in V$. Так как функция $p(t)$ является невозрастающей, то существует оператор

$$\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)^{-1} : D(A) \to D(A),$$

для которого справедлива оценка

$$\left\|\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)^{-1}\right\|_{D(A)\to D(A)} \leqslant \frac{p(0)}{p(0) - p(T)e^{-\lambda T}}. \quad (6)$$

Теперь оператор B можно представить в виде

$$B = p(0)\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)\left[I + \frac{1}{p(0)}\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}\,dt\right]. \quad (7)$$

Проведем следующую оценку. Для произвольного $v \in D(A)$ имеем

$$\left\|\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}v\,dt\right\|_{D(A)} \leqslant \int\limits_0^T \left\|p'(t)Ae^{-At}v\right\|_H dt \leqslant \int\limits_0^T |p'(t)|e^{-\lambda t}\|Av\|_H\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(p(0) - p(T)e^{-\lambda T} - \lambda\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}dt\right)\|v\|_{D(A)}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует оценка

$$\left\|\frac{1}{p(0)}\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}dt\right\|_{D(A)\to D(A)} \leqslant 1 - \frac{\lambda}{p(0) - p(T)e^{-\lambda T}}\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}dt < 1. \quad (9)$$

Из (7) и (9) следует, что оператор B обратим в пространстве $D(A)$ и

$$B^{-1} = \frac{1}{p(0)}\left[I + \frac{1}{p(0)}\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}\,dt\right]^{-1}\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)^{-1}.$$

Тогда из (5), (6) и (8) получим оценку

$$\|B^{-1}\|_{D(A)\to D(A)} \leqslant \frac{1}{p(0)}\cdot\frac{p(0)}{p(0) - p(T)e^{-\lambda t}}\cdot\left\{1 - \left(1 - \frac{\lambda}{p(0) - p(T)e^{-\lambda t}}\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}\,dt\right)\right\}^{-1} =$$

$$= \left(\lambda\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}\,dt\right)^{-1} = M_1. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь элемент

$$u_0 = -B^{-1}\left(\overline{u} - \int\limits_0^T p(t)f(t)dt\right). \tag{11}$$

Продифференцировав (4), получим $u'(t) = -Ae^{-At}u_0 + f(t)$. Умножим последнее равенство на $p(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до T:

$$\int\limits_0^T p(t)u'(t)dt = -A\int\limits_0^T p(t)e^{-At}u_0 dt + \int\limits_0^T p(t)f(t)dt. \tag{12}$$

Заметим, что

$$-A\int\limits_0^T p(t)e^{-At}u_0 dt = -Bu_0 = \overline{u} - \int\limits_0^T p(t)f(t)dt. \tag{13}$$

Складывая (12) и (13), получим

$$\int\limits_0^T p(t)u'(t)dt = \overline{u}.$$

Для $u(t)$ в [10] установлена оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u'(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T\left(\|u'(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_{V'}^2\right)dt \leqslant$$
$$\leqslant C\left\{\left\|Au_0\right\|_H^2 + \int\limits_0^T\left(\|f(t)\|_{V'}^2 + \|f'(t)\|_{V'}^2\right)dt + \|f(0)\|_H^2\right\}. \tag{14}$$

Таким образом, для получения (3) осталось оценить $\|Au_0\|_H^2$. Из (11) с учётом (10) получаем

$$\|Au_0\|_H^2 = \|u_0\|_{D(A)}^2 = \left\|B^{-1}\left(\overline{u} - \int\limits_0^T p(t)f(t)dt\right)\right\|_{D(A)}^2 \leqslant M_1^2\left\|\overline{u} - \int\limits_0^T p(t)f(t)dt\right\|_{D(A)}^2 =$$
$$= M_1^2\left\|A\overline{u} - A\int\limits_0^T p(t)f(t)dt\right\|_H^2 \leqslant M_1^2\left(\|A\overline{u}\|_H^2 + p^2(0)\left(\int\limits_0^T \|Af(t)\|_H dt\right)^2\right). \tag{15}$$

Подставляя оценку (15) в (14), получим оценку (3). □

Решение задачи (2), удовлетворяющее указанной в теореме 2 гладкости, будем называть *гладким*, а условия теоремы 2 — условиями гладкой разрешимости.

3. Обобщенная разрешимость. Пусть определённая ранее полуторалинейная форма $a(u,v)$ является симметричной, т.е. $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$ для всех $u, v \in V$, где черта обозначает переход к сопряжённому числу. Оператор A, порождённый формой $a(u,v)$, будем рассматривать как оператор в пространстве H. Тогда оператор $A : D(A) \subset H \to H$ является самосопряжённым и положительно определённым. Определим гильбертово пространство

$$V(A) = \big\{u, v \in V \mid (u,v)_{V(A)} = a(u,v)\big\}.$$

Из (1) для всех $u \in V$ следует оценка

$$\alpha^{1/2}\|u\|_V \leqslant \|u\|_{V(A)} \leqslant \mu^{1/2}\|u\|_V, \tag{16}$$

которая означает эквивалентность норм в пространствах V и $V(A)$.

Отметим (см., например, [1,4]), что для оператора A существует самосопряжённый и положительно определённый оператор $A^{1/2}$ с областью определения $D(A^{1/2}) = V$, для которого

$$\|v\|_{V(A)} = \|A^{1/2}v\|_H, \quad v \in V. \tag{17}$$

Вернёмся к задаче (2). Покажем, что при условии симметричности формы, а также при некоторых дополнительных условиях на элемент $\overline{u}$ и функцию $f(t)$ решение задачи (2) имеет бóльшую гладкость, чем в теореме 1.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть форма* $a(u,v)$ *симметрична. Предположим также, что в* (2) *функция* f *принадлежит классу* $L_1(0,T;V) \cap L_2(0,T;H)$. *Тогда существует единственная функция* $u(t)$, $u \in C([0,T],V)$, u', $Au \in L_2(0,T;H)$, *удовлетворяющая в* (2) *уравнению почти всюду на* $[0,T]$ *и интегральному условию. Кроме того, справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_V^2 + \int\limits_0^T \Big(\|u'(t)\|_H^2 + \|Au(t)\|_H^2\Big)\,dt \leqslant$$
$$\leqslant K\left\{\|\overline{u}\|_V^2 + \left(\int\limits_0^T \|f(t)\|_V\,dt\right)^2 + \int\limits_0^T \|f(t)\|_H^2\,dt\right\}. \tag{18}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в сделанных предположениях задача (2) имеет единственное слабое решение. Следовательно, более гладкое решение, если оно существует, будет также единственным.

Как было отмечено в [3], в H оператор A определяет полугруппу e^{-At}. Кроме того (см. [5]), если $u_0 \in D(A^{1/2}) = V$ и $f \in L_2(0,T;H)$, то функция

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int\limits_0^t e^{-A(t-s)}f(s)\,ds \tag{19}$$

является в пространстве H решением задачи Коши

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u_0. \tag{20}$$

Заметим (см., например, [6,11]), что для такого решения $u(t)$ выполняется следующая гладкость: $u \in C([0,T],V)$ и u', $Au \in L_2(0,T;H)$. Кроме того, справедлива оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_V^2 + \int\limits_0^T \Big(\|u'(t)\|_V^2 + \|Au(t)\|_H^2\Big)\,dt \leqslant C\left(\|u_0\|_V^2 + \int\limits_0^T \|f(t)\|_H^2\,dt\right). \tag{21}$$

Выясним теперь, при каком $u_0 \in V$ функция $u(t)$, построенная по формуле (21), будет удовлетворять интегральному условию в (2). Будем действовать по той же схеме, что и в доказательстве теоремы 2.

Рассмотрим оператор $B : V \to V$, определённый равенством (5). Покажем обратимость этого оператора в пространстве $V(A)$. Для $v \in V$ с учётом (17) получаем

$$\left\|\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}v\right\|_{V(A)} = \left\|A^{1/2}\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}v\right\|_H \leqslant \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\lambda T}\|A^{1/2}v\|_H = \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\lambda T}\|v\|_{V(A)}.$$

Так как функция $p(t)$ является невозрастающей, то существует оператор

$$\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)^{-1} : V \to V,$$

причем

$$\left\|\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)^{-1}\right\|_{V(A)\to V(A)} \leqslant \frac{p(0)}{p(0) - p(T)e^{-\lambda T}}. \tag{22}$$

Теперь оператор B можем представить в виде (7).

Проведём следующую оценку. Для произвольного $v \in V$ с учётом (17) имеем

$$\left\| \int_0^T p'(t)e^{-At}v\,dt \right\|_{V(A)} = \left\| A^{1/2} \int_0^T p'(t)e^{-At}v\,dt \right\|_H \leqslant \int_0^T \left\| p'(t)e^{-At}A^{1/2}v \right\|_H dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T |p'(t)|e^{-\lambda t}\|A^{1/2}v\|_H\,dt = \left(p(0) - p(T)e^{-\lambda T} - \lambda \int_0^T p(t)e^{-\lambda t}\,dt \right) \|A^{1/2}v\|_H =$$

$$= \left(p(0) - p(T)e^{-\lambda T} - \lambda \int_0^T p(t)e^{-\lambda t}\,dt \right) \|v\|_{V(A)},$$

так что из (22) получаем

$$\left\| \frac{1}{p(0)} \left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT} \right)^{-1} \int_0^T p'(t)e^{-At}\,dt \right\|_{V(A)\to V(A)} \leqslant 1 - \frac{\lambda}{p(0) - p(T)e^{-\lambda t}} \int_0^T p(t)e^{-\lambda t}\,dt < 1. \quad (23)$$

Таким образом, из (7), (22) и (23) следует, что оператор B в пространстве $V(A)$ обратим и

$$B^{-1} = \frac{1}{p(0)} \left[I + \frac{1}{p(0)} \left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT} \right)^{-1} \int_0^T p'(t)e^{-At}\,dt \right]^{-1} \left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT} \right)^{-1},$$

а также справедлива оценка

$$\|B^{-1}\|_{V(A)\to V(A)} \leqslant M_1,$$

где M_1 определено в (10).

Рассмотрим теперь элемент

$$u_0 = -B^{-1} \left(\overline{u} - \int_0^T p(t)f(t)dt \right). \quad (24)$$

Заметим, что $u_0 \in V$ в силу условий теоремы. Тогда функция $u(t)$, построенная по формуле (19), где элемент u_0 определен в (24), будет решением задачи (20), удовлетворяющим указанным в теореме условиям гладкости. Выполнение интегрального условия в (2) для данной функции $u(t)$ доказывается так же, как в теореме 2.

Таким образом, данная функция является решением задачи (2), удовлетворяющим указанным в теореме условиям гладкости. Напомним, что такое решение называется *обобщённым.* Условия теоремы 3 будем называть условиями обобщенной разрешимости задачи (2).

Заметим, что для полученного обобщённого решения выполняется оценка (21). Таким образом, для получения оценки (18) следует оценить $\|u_0\|_V^2$.

Из (24), с учетом (16), следует, что

$$\|u_0\|_V^2 = \left\| B^{-1} \left(\overline{u} - \int_0^T p(t)f(t)dt \right) \right\|_V^2 \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^{-1}M_1^2\mu \left\| \overline{u} - \int_0^T p(t)f(t)dt \right\|_V^2 \leqslant 2\alpha^{-1}M_1^2\mu \left(\|\overline{u}\|_V^2 + \left\| \int_0^T p(t)f(t)dt \right\|_V^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\alpha^{-1}M_1^2\mu \left(\|\overline{u}\|_V^2 + p^2(0) \left(\int_0^T \|f(t)\|_V dt \right)^2 \right). \quad (25)$$

Теперь из (25) следует оценка

$$\|u_0\|_V^2 \leqslant K \left\{ \|\overline{u}\|_V^2 + \left(\int\limits_0^T \|f(t)\|_V \, dt \right)^2 \right\},$$

подставляя которую в (21), получим (18). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.
2. *Бондарев А. С.* Разрешимость вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2015. — № 4. — С. 78–88.
3. *Бондарев А. С., Петрова А. А., Пировских О. М.* Слабая разрешимость вариационного параболического уравнения с нелокальным по времени условием на решение// Совр. мат. Фундам. напр. — 2024. — *70*, № 4.
4. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
5. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
6. *Ладыженская О. А.* О решении нестационарных операторных уравнений// Мат. сб. — 1956. — *39*, № 4. — С. 491–524.
7. *Обэн Ж. П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977.
8. *Петрова А. А.* Гладкая разрешимость параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение// Мат. Междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна» (Воронеж, 25–31 января 2016 г.). — Воронеж: YНаучная книга, 2016. — С. 320–323.
9. *Петрова А. А.* Сходимость метода Галёркина приближённого решения параболического уравнения с симметричным оператором и весовым интегральным условием// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2015. — № 4. — С. 160–174.
10. *Смагин В. В.* О гладкой разрешимости вариационных задач параболического типа// Тр. мат. ф-та (нов. серия). Воронеж. гос. ун-т. — 1998. — № 3. — С. 67–72.
11. *Соболевский П. Е.* Обобщённые решения дифференциальных уравнений первого порядка в гильбертовом пространстве// Докл. АН СССР. — 1958. — *122*, № 6. — С. 994–996.
12. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений// Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — *67*, № 2. — С. 133–166.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Бондарев Андрей Сергеевич (Bondarev Andrey Sergeevich)
Воронежский государственный университет
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: bondarev@math.vsu.ru

Петрова Анастасия Александровна (Petrova Anastasiya Aleksandrovna)
Воронежский государственный университет
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: rezolwenta@mail.ru

Пировских Олег Михайлович (Pirovskikh Oleg Mikhailovich)
Воронежский государственный университет
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: pirovskiholeg@yandex.ru