



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 237 (2024). С. 34–48
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-237-34-48

УДК 517.977

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО НЕЧЕТКОГО СИГНАЛА ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

© 2024 г. В. Л. ХАЦКЕВИЧ

Аннотация. Разработано применение метода функции Грина при решении задачи об ограниченных решениях линейного дифференциального уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами и нечеткозначной правой частью. Выделен класс уравнений, обладающих положительными коэффициентами и неотрицательной функцией Грина, для которых установлены результаты о существовании и гладкости нечеткого ограниченного на всей оси решения. Показано, что в случае правой части треугольного вида, такого же вида будет и решение. Рассмотрены примеры радиотехнических цепей с нечеткими входными сигналами.

Ключевые слова: нечеткозначные функции, нечеткие динамические системы с постоянным коэффициентом, метод функции Грина.

CONVERTING A CONTINUOUS FUZZY SIGNAL BY A LINEAR DYNAMIC SYSTEM

© 2024 V. L. KHATSKEVICH

ABSTRACT. In this paper, we apply the method of Green's function to the search for bounded solutions of a high-order linear differential equation with constant coefficients and a fuzzy right-hand side. A class of equations with positive coefficients and a nonnegative Green's function is distinguished, for which the results on the existence and smoothness of a fuzzy solution bounded on the whole axis are established. We prove that in the case where the right-hand side has a triangular form, the solution has the same form. Examples of radio engineering circuits with fuzzy input signals are considered.

Keywords and phrases: fuzzy-valued functions, fuzzy dynamical systems with a constant coefficient, Green's function method.

AMS Subject Classification: 93C42

1. Введение. Основы теории нечетких дифференциальных уравнений заложены в [19, 24, 26] и получили дальнейшее развитие в [12, 13, 22, 23]. Различные приложения отражены в [4, 6]. Из последних работ отметим [14, 15, 17, 28].

В литературе рассматриваются различные определения дифференцируемости нечеткозначных функций. В настоящей работе применяется «классическое» определение производной по Хукухаре (см. [24]) и связанной с ним производной по Сеиккала (см. [26]).

В разделе 3 данной работы рассматриваются «нечеткие» динамические системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями n -го порядка с постоянными коэффициентами и нечеткозначными правыми частями. Такие системы встречаются в теории автоматического регулирования, в задачах обработки сигналов (в радиотехнике) и других приложениях.

В данной работе задача о преобразовании нечеткого сигнала линейной динамической системой сводится к изучению задачи об ограниченных решениях для линейного дифференциального уравнения высокого порядка с нечеткозначной неоднородностью в правой части.

Обычно (см. [21]) при решении линейных нечетких дифференциальных уравнений выписывают систему уравнений для соответствующих α -индексов и решают ее. Затем проверяют, определяют ли производные полученных α -индексов производную нечеткозначной функции. Как показывают примеры (см. [10, 21]), это не всегда так. Отметим, что в [10] развит так называемый «операторный метод», когда дифференциальные уравнения для α -индексов сводятся к интегральным уравнениям, которые затем решаются.

В последние годы широкое распространение для решения линейных нечетких дифференциальных уравнений высокого порядка получил метод нечеткого преобразования Лапласа (см. [9, 16, 25]). Однако он не представляет возможности предварительно определить, будут ли полученные функции гладкими и, соответственно, решениями.

В отличие от известных подходов, предлагаемый в данной работе опирается на развитие метода функции Грина, широко распространенного в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [3, гл. II], [5, гл. 1, 2], на случай нечетких дифференциальных уравнений.

Метод функций Грина полезен тем, что он дает формулы для α -индексов нечетких решений. Это позволяет привести условия, при которых производные α -индексов определяют производную нечеткозначного решения по Сеиккала. В данной работе — это условие на положительность коэффициентов динамической системы, неотрицательность соответствующей функции Грина, а также дифференцируемость по Сеиккала входного нечеткого сигнала. Эти условия естественны для ряда прикладных задач. В частности, положительность коэффициентов является необходимым условием устойчивости соответствующего характеристического многочлена, соответствующего линейной динамической системе. Условия неотрицательности функции Грина широко известны (см., например, [5]). Они изучены в связи с различными прикладными задачами.

Уточним, что в данной статье введено и исследовано понятие ультраслабого нечеткого решения как нечеткозначной функции, α -индексы которой удовлетворяют уравнениям для α -индексов, вытекающих из заданного нечеткого дифференциального уравнения. Отметим установленный в данной работе факт, состоящий в том, что j -кратная дифференцируемость по Сеиккала нечеткозначной неоднородности влечет j -кратную дифференцируемость ультраслабого нечеткозначного решения по Сеиккала.

Добавим, что рядом авторов в последнее время исследованы нечеткие дифференциальные уравнения с обобщенными (по Беду—Гелу) производными (см. [9, 10, 13, 16, 21, 25]). Разработанный в настоящей статье подход допускает применение и к этому случаю.

В качестве приложений в разделе 4 настоящей работы рассмотрены модели радиотехнических цепей с нечеткими входными сигналами. Введены и исследованы слабые и сильно-слабые решения соответствующих динамических систем, как решения интегральных и, соответственно, интегро-дифференциальных нечетких уравнений, отвечающих рассматриваемым нечетким дифференциальным уравнениям.

Данная статья является продолжением и развитием работы автора [8], в которой рассмотрена взаимосвязь числовых характеристик нечетких ограниченных сигналов на входе и выходе линейной динамической системы. А именно, исследована взаимосвязь средних, а также ковариационных функций входного и выходного нечетких сигналов.

2. Нечеткие числа и нечеткозначные функции. Под нечетким числом будем понимать нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел, имеющее компактный носитель и нормальную, выпуклую и полунепрерывную сверху функцию принадлежности (см., например, [1, гл. 5], [7, гл. 2, 3]). Множество таких нечетких чисел обозначим J .

Ниже будем использовать интервальное представление нечетких чисел.

Как известно, интервалы α -уровня (α -уровни) нечеткого числа $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ определяются соотношениями

$$z_{\alpha} = \{x \mid \mu_{\tilde{z}}(x) \geq \alpha\}, \quad (\alpha \in (0, 1]), \quad z_0 = \text{cl}\{x \mid \mu_{\tilde{z}}(x) > 0\},$$

где cl обозначает замыкание множества. Согласно принятым предположениям все α -уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси.

Обозначим левую границу α -интервала через z_{α}^{-} , а правую — через z_{α}^{+} . Таким образом, $z_{\alpha} = [z^{-}(\alpha), z^{+}(\alpha)]$. Выражения z_{α}^{-} и z_{α}^{+} называют, соответственно, левым и правым α -индексами (индексами) нечеткого числа.

Обычно предполагается выполнение следующих условий на индексы нечеткого числа:

- (i) $z^{-}(\alpha) \leq z^{+}(\alpha)$ для всех $\alpha \in [0, 1]$;
- (ii) функция $z^{-}(\alpha)$ ограничена, не убывает, непрерывна слева на промежутке $(0, 1]$ и непрерывна справа в точке 0;
- (iii) функция $z^{+}(\alpha)$ ограничена, не возрастает, непрерывна слева на промежутке $(0, 1]$ и непрерывна справа в точке 0.

Обратно, пара функций на промежутке $[0, 1]$, для которых выполняются условия (i)–(iii), задают нечеткое число, α -интервал которого имеет вид $[z^{-}(\alpha), z^{+}(\alpha)]$.

Ниже под суммой нечетких чисел с индексами $z^{-}(\alpha)$, $z^{+}(\alpha)$ и $u^{-}(\alpha)$, $u^{+}(\alpha)$ понимается нечеткое число с интервалами α -уровня $[z^{-}(\alpha) + u^{-}(\alpha), z^{+}(\alpha) + u^{+}(\alpha)]$. Умножение на положительное число c характеризуется интервалами α -уровня $[cz^{-}(\alpha), cz^{+}(\alpha)]$, а умножение на отрицательное число c — интервалами α -уровня $[cz^{+}(\alpha), cz^{-}(\alpha)]$. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих α -индексов при всех $\alpha \in [0, 1]$.

На множестве нечетких чисел можно по-разному ввести определения расстояний между ними. При интервальном подходе часто используют расстояние Хаусдорфа между множествами α -уровня нечетких чисел. Именно, для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ с α -уровнями z_{α} и u_{α} задают метрику (см. [20])

$$\rho(\tilde{z}, \tilde{u}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|z^{-}(\alpha) - u^{-}(\alpha)|, |z^{+}(\alpha) - u^{+}(\alpha)|\}. \quad (1)$$

Здесь $[z^{-}(\alpha), z^{+}(\alpha)]$ и $[u^{-}(\alpha), u^{+}(\alpha)]$ — интервалы α -уровней нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ соответственно.

Отметим, что условие $\rho(\tilde{z}, \tilde{u}) = 0$ в силу (1) эквивалентно определению равенства нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$, данному выше.

Фиксируем промежуток T числовой оси. Отображение $\tilde{z} : T \rightarrow J$ будем называть нечеткозначной функцией.

Пусть нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ при всех $t \in T$ характеризуется функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x, t)$. При фиксированном $\alpha \in (0, 1]$ рассмотрим α -интервал $z_{\alpha}(t) = \{x \in R : \mu_{\tilde{z}}(x, t) \geq \alpha\}$ и $z_0(\alpha) = \text{cl}\{x \in R : \mu_{\tilde{z}}(x, t) > 0\}$. Обозначим через $z_{\alpha}^{-}(t) = z^{-}(t, \alpha)$ и $z_{\alpha}^{+}(t) = z^{+}(t, \alpha)$ левую и правую границы α -интервала соответственно. Таким образом, $z_{\alpha}(t) = [z_{\alpha}^{-}(t), z_{\alpha}^{+}(t)]$.

Непрерывность функции $\tilde{z}(t)$ по t будем понимать по метрике (1), а ограниченность — в следующем смысле: найдется такая постоянная $C > 0$, что при всех $t \in T$ выполнено неравенство

$$\rho(\tilde{z}(t), \tilde{0}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|z_{\alpha}^{-}(t)|, |z_{\alpha}^{+}(t)|\} \leq C.$$

Здесь $\tilde{0}$ — нечеткое число, у которого α -индексы $0_{\alpha}^{\pm} = 0$ при всех $\alpha \in [0, 1]$.

Замечание 1. Индексы $z_{\alpha}^{-}(t)$ и $z_{\alpha}^{+}(t)$ непрерывной нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ непрерывны по t при любом $\alpha \in [0, 1]$. Если $\tilde{z}(t)$ ограничена при $t \in T$, то это влечет ограниченность $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ по $t \in T$ при любом $\alpha \in [0, 1]$.

Интегралом по промежутку T от непрерывного нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ называют такое нечеткое число $\tilde{g}$, что его интервалы α -уровня при любом $\alpha \in [0, 1]$ имеют вид $g_{\alpha} = \int_T z_{\alpha}(t) dt$ (см. [19]). Интеграл обозначают $\int_T \tilde{z}(t) dt$.

По существу, это интеграл Аумана (см. [11]) от многозначного отображения $z_{\alpha}(t)$. Фактически имеет место интервальное представление (см. [27])

$$\left(\int_T \tilde{z}(t) dt \right)_{\alpha} = \left[\int_T z_{\alpha}^{-}(t) dt, \int_T z_{\alpha}^{+}(t) dt \right].$$

Перейдем к рассмотрению производных от нечеткозначных функций. В литературе используются различные определения. Одно из наиболее распространенных опирается на определение

разности Хукухары (см. [18]). Именно, для множеств A, B множество C называют разностью Хукухары, если $A = B + C$, и обозначают $A \ominus B$.

Функцию $\tilde{z} : T \rightarrow J$ называют H -дифференцируемой (или дифференцируемой по Хукухаре) в точке $t \in T$ (см. [24]), если для всех достаточно малых $h > 0$ существуют такие разности Хукухары $\tilde{z}(t+h) \ominus \tilde{z}(t)$, $\tilde{z}(t) \ominus \tilde{z}(t-h)$ и элемент $\tilde{z}'(t) \in J$, что

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \rho \left(\frac{\tilde{z}(t+h) \ominus \tilde{z}(t)}{h}, \tilde{z}'(t) \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \rho \left(\frac{\tilde{z}(t) \ominus \tilde{z}(t-h)}{h}, \tilde{z}'(t) \right) = 0,$$

где расстояние ρ определяется формулой (1). В этом случае элемент $\tilde{z}'(t)$ называют H -производной в точке t .

Нечеткозначную функцию $\tilde{z} : T \rightarrow J$ называют S -дифференцируемой (или дифференцируемой по Сеиккала) в точке $t \in T$ (см. [26]), если ее α -индексы $z_\alpha^-(t)$ и $z_\alpha^+(t)$ дифференцируемы и их производные $(z_\alpha^-)'(t)$ и $(z_\alpha^+)'(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ образуют нечеткое число с α -интервалом $[\tilde{z}'(t)]_\alpha = [(z_\alpha^-)'(t), (z_\alpha^+)'(t)]$.

Утверждение 1 (см. [23]). Пусть нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ H -дифференцируема в точке $t \in T$. Тогда она S -дифференцируема в точке $t \in T$.

Например, нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ вида $\tilde{z}(t) = g(t)\tilde{r}$, где $g(t)$ — скалярная дифференцируемая функция, а $\tilde{r} \in J$ — заданное нечеткое число, будет H -дифференцируемой (а значит, и S -дифференцируемой) в точке t при условии $g'(t) \geq 0$ (см. [12]).

Замечание 2. По определению нечеткая S -производная является аддитивной и положительно однородной. Иными словами, для нечеткозначных S -дифференцируемых функций $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{w}(t)$ имеем

$$(\tilde{z}(t) + \tilde{w}(t))' = \tilde{z}'(t) + \tilde{w}'(t), \quad (c\tilde{z}(t))' = c\tilde{z}'(t)$$

для любой вещественной постоянной $c \geq 0$.

Вторая производная по Сеиккала $\tilde{z}''(t)$ в точке $t \in T$ определяется как S -производная от первой производной, т.е. как нечеткое число $\tilde{z}''(t)$, имеющее левый α -индекс $(z_\alpha^-)''(t)$ и правый α -индекс $(z_\alpha^+)''(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$. Аналогично определяются последующие S -производные.

3. Преобразование непрерывного нечеткого сигнала линейной динамической системой. Устройство называют линейной динамической системой, если связь между входом и выходом описывается дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами. Если на входе и выходе наблюдаются нечеткие сигналы $\tilde{f}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ соответственно, то линейная динамическая система описывается «нечетким» дифференциальным уравнением

$$a_n \tilde{z}^{(n)}(t) + a_{n-1} \tilde{z}^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \tilde{z}'(t) + a_0 \tilde{z}(t) = \tilde{f}(t), \quad t \in T. \quad (2)$$

Здесь коэффициенты $a_i, i = 0, \dots, n$, — вещественные числа, $\tilde{f}(t)$ — входная нечеткозначная функция, производные от нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ понимаются как S -производные.

Ниже в качестве промежутка T рассматривается $T = (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим задачу об ограниченных решениях для скалярного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при $t \in (-\infty, \infty)$

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t). \quad (3)$$

Функцию $G(t)$ называют функцией Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (3), если она удовлетворяет следующим условиям (см., например, [3, гл. II, § 4], [5, гл. 1, § 4]):

- (i) $G(t)$ непрерывно дифференцируема $n - 2$ раз при всех t , а производные порядков n и $(n - 1)$ непрерывно дифференцируемы при всех t , кроме $t = 0$, причем

$$G^{(n-1)}(+0) + G^{(n-1)}(-0) = 1;$$

- (ii) во всех точках, кроме $t = 0$, функция $G(t)$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению, соответствующему (3) (при $f(t) \equiv 0$);

(iii) функция Грина и ее производные подчинены оценке

$$|G^{(i)}(t)| \leq M e^{-\gamma|t|}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad -\infty < t < +\infty,$$

где M и γ — некоторые положительные постоянные.

Утверждение 2 (см. [3, гл. II]). Пусть множество корней характеристического уравнения

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

не содержит точек мнимой оси. Тогда для любой непрерывной ограниченной на всей числовой оси функции $f(t)$ уравнение (3) имеет ограниченное на всей числовой оси решение, причем единственное. Оно дается формулой

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s) ds, \quad (4)$$

где $G(t)$ — функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (3).

Подчеркнем, что сходимость несобственного интеграла (4) и соответствующих интегралов для производных обеспечивается экспоненциальными оценками на функцию Грина и ее производные, а также непрерывностью и ограниченностью функции $f(t)$ на всей числовой оси.

Отметим, что общий вид функции Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (3) известен (см., например, [5, гл. 1, § 8]).

Утверждение 3 (см. [3, гл. сII]). Пусть в условиях утверждения 2 все корни характеристического уравнения лежат в левой полуполоскости ($\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$). Тогда ограниченное решение уравнения (3) асимптотически устойчиво по Ляпунову. При этом решение (4) приобретает вид

$$x(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s)f(s) ds. \quad (5)$$

Обратимся к случаю входных и выходных нечетких сигналов. В некоторых случаях, используя представление (4), удастся выписать α -индексы нечеткого сигнала на выходе динамической системы (2) в явном виде.

Сильным решением нечеткого дифференциального уравнения (2) будем называть n раз непрерывно S -дифференцируемую нечеткозначную функцию, удовлетворяющую (2) на соответствующем промежутке.

Лемма 1. Пусть коэффициенты нечеткого дифференциального уравнения (2) положительны: $a_i > 0$, $i = 0, \dots, n$. Если нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ есть сильное решение уравнения (2) на промежутке T , то его α -индексы $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ и $t \in T$ удовлетворяют следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$a_n (z_{\alpha}^{-})^{(n)}(t) + a_{n-1} (z_{\alpha}^{-})^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 (z_{\alpha}^{-})'(t) + a_0 z_{\alpha}^{-}(t) = f_{\alpha}^{-}(t), \quad (6)$$

$$a_n (z_{\alpha}^{+})^{(n)}(t) + a_{n-1} (z_{\alpha}^{+})^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 (z_{\alpha}^{+})'(t) + a_0 z_{\alpha}^{+}(t) = f_{\alpha}^{+}(t). \quad (7)$$

Доказательство. Действительно, подставим сильное решение $\tilde{z}(t)$ нечеткого дифференциального уравнения в (2). Поскольку равенство нечетких чисел означает равенство всех соответствующих α -индексов, то, согласно правилам интервальной арифметики, с учетом положительности коэффициентов a_i и в силу определения нечеткой производной по Сеиккала, а также замечания 2 получим, что уравнение (2) влечет при всех $\alpha \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$ выполнение равенств (6), (7). $\square$

Лемма 2. Пусть коэффициенты нечеткого дифференциального уравнения (2) положительны: $a_i > 0$, $i = 0, \dots, n$, а множество корней характеристического уравнения

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

не содержат точек мнимой оси. Пусть нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$, стоящая в правой части уравнения (2), непрерывна и ограничена при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда при всех $\alpha \in [0, 1]$ существуют, причем единственные, ограниченные на всей числовой оси решения каждого из уравнений (6), (7), и они могут быть представлены в виде

$$z_{\alpha}^{-}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f_{\alpha}^{-}(s)ds, \quad z_{\alpha}^{+}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f_{\alpha}^{+}(s)ds. \quad (8)$$

Доказательство. Действительно, по условию и согласно замечанию 1, при всех $\alpha \in [0, 1]$ функции $f_{\alpha}^{\pm}(t)$ непрерывны и ограничены на всей числовой оси. Тогда в силу утверждения 2 при всех $\alpha \in [0, 1]$ решения уравнений (6), (7) существуют, единственны, и выполнены равенства (8). $\square$

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 2 и, кроме того, функция Грина G задачи (3) неотрицательна. Тогда выражения (8) при всех $t \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяют условиям (i)–(iii) раздела 2 на индексы нечетких чисел.

Доказательство представлено в приложении.

Подчеркнем значимость леммы 3. Как показывают примеры (см. [10, 21]), решения систем для α -индексов линейных нечетких дифференциальных уравнений не всегда являются α -индексами некоторой нечеткозначной функции.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда нечеткозначная функция, порождаемая при всех $t \in (-\infty, \infty)$ α -индексами (8), характеризуется представлением

$$\tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\tilde{f}(s)ds. \quad (9)$$

Доказательство. Действительно, согласно леммам 1–3 и определению интеграла от нечеткозначной функции при всех $\alpha \in [0, 1]$ имеют место соотношения для α -индексов

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\tilde{f}(s)ds \right)_{\alpha}^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f_{\alpha}^{\pm}(s)ds,$$

которые в силу (8) влекут представление (9). $\square$

Теорема 2. В условиях теоремы 1 нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$, определенная формулой (9), непрерывна и ограничена по t на всей числовой оси.

Доказательство представлено в приложении.

Непрерывную нечеткозначную функцию $\tilde{z}(t)$ назовем ультраслабым решением нечеткого дифференциального уравнения (2), если ее α -индексы $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ непрерывно дифференцируемы n раз по t и удовлетворяют уравнениям (6) и (7) на соответствующем промежутке времени.

Таким образом, в условиях теоремы 1 нечеткозначная функция (9) есть ультраслабое ограниченное на всей числовой оси решение нечеткого уравнения (2).

Теорема 3. В условиях теоремы 1 ультраслабое решение нечеткого дифференциального уравнения (2), ограниченное на всей числовой оси существует и единственно.

Доказательство. Существование следует из теорем 1, 2. Покажем единственность. Предположим противное. Пусть $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{w}(t)$ — два различных ультраслабых решения уравнения (2), ограниченных на всей числовой оси. Тогда индексы $z_{\alpha}^{-}(t)$ и $w_{\alpha}^{-}(t)$ являются ограниченными решениями уравнения (6). Поэтому в силу утверждения 2 заключаем, что $z_{\alpha}^{-}(t) = w_{\alpha}^{-}(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$. Аналогично, $z_{\alpha}^{+}(t) = w_{\alpha}^{+}(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$. Но тогда, согласно признаку равенства нечетких чисел, $\tilde{z}(t) = \tilde{w}(t)$ при всех $t \in (-\infty, \infty)$; противоречие. $\square$

Слабым решением нечеткого дифференциального уравнения (2) будем называть нечеткозначную функцию, удовлетворяющую соответствующему (2) интегро-дифференциальному или интегральному нечеткому уравнению. Ниже мы уточним это понятие в разделе 4 на примерах.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости. Тогда ультраслабое ограниченное на всей числовой оси решение (9) нечеткого дифференциального уравнения (2) существует, единственно и имеет следующий вид:

$$\tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s)\tilde{f}(s)ds. \quad (10)$$

Утверждение вытекает из теоремы 1 с учетом утверждения 3.

Ниже мы используем следующее представление для ограниченного решения скалярного дифференциального уравнения (3), полученное из (5) заменой $t-s=\sigma$:

$$x(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma)f(t-\sigma)d\sigma. \quad (11)$$

Выясним условия, при которых ультраслабое ограниченное решение (10) нечеткого дифференциального уравнения (2) будет S -дифференцируемо по t .

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4 и, кроме того, нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$ дифференцируема при всех $t \in (-\infty, \infty)$ по Сеиккала, причем S -производная $\tilde{f}'(t)$ непрерывна и ограничена при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное решение (10) нечеткого дифференциального уравнения (2) будет S -дифференцируемым при $t \in (-\infty, \infty)$, причем выполнено равенство

$$\tilde{z}'(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma)\tilde{f}'_t(t-\sigma)d\sigma. \quad (12)$$

Доказательство. Действительно, согласно (6), (7) и в силу (11) для α -индексов ультраслабого решения $\tilde{z}(t)$ нечетко-дифференциального уравнения (2) можем записать

$$z_{\alpha}^{\pm}(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma)f_{\alpha}^{\pm}(t-\sigma)d\sigma. \quad (13)$$

Аналогично лемме 3, они порождают нечеткозначную функцию

$$\tilde{z}(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma)\tilde{f}(t-\sigma)d\sigma. \quad (14)$$

По условию α -индексы $f_{\alpha}^{\pm}(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ дифференцируемы по $t \in (-\infty, \infty)$, причем производные $(f_{\alpha}^{\pm})'_t(t)$ являются непрерывными и ограниченными на всей числовой оси скалярными функциями. Тогда вследствие (13) для производных α -индексов $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ по t имеем

$$(z_{\alpha}^{\pm})'(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma)(f_{\alpha}^{\pm})'_t(t-\sigma)d\sigma. \quad (15)$$

Здесь мы учли возможность дифференцирования по параметру под знаком абсолютно сходящегося интеграла.

В силу неотрицательности функции Грина (аналогично доказательству леммы 3) при каждом t выражения (15) являются α -индексами S -производной $\tilde{z}'(t)$. Поэтому из (14), (15) с учетом теоремы 1 следует (12).

Тогда в силу теоремы 3 о единственности ультраслабого ограниченного на всей числовой оси решения уравнения (2) и согласно (10), (14) получим, что

$$\left(\int_{-\infty}^t G(t-s) \tilde{f}(s) ds \right)' = \left(\int_0^{\infty} G(\sigma) \tilde{f}(t-\sigma) d\sigma \right)' = \int_0^{\infty} G(\sigma) \tilde{f}'_t(t-\sigma) d\sigma.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

Следствие 1. В условиях теоремы 5 нечеткая производная (12) непрерывна и ограничена при $t \in (-\infty, \infty)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2. $\square$

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 4 и, кроме того, нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$ дважды S -дифференцируема, причем первая и вторая S -производные $\tilde{f}'_t(t)$ и $\tilde{f}''_t(t)$ непрерывны и ограничены при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное на всей числовой оси решение $\tilde{z}(t)$, определяемое формулой (14), является дважды S -дифференцируемым при $t \in (-\infty, \infty)$.

Доказательство. Действительно, при всех $\alpha \in [0, 1]$ для α -индексов $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ в соответствии с равенством (15) можно записать

$$(z_{\alpha}^{\pm})''(t) = \left(\int_0^{\infty} G(\sigma) (f_{\alpha}^{\pm})'_t(t-\sigma) d\sigma \right)' = \int_0^{\infty} G(\sigma) (f_{\alpha}^{\pm})''_t(t-\sigma) d\sigma.$$

Отсюда на основании неотрицательности функции Грина выводим, что при всех $t \in (-\infty, \infty)$ интегралы в правой части порождают нечеткое число $\tilde{z}''(t)$ — вторую S -производную $\tilde{z}(t)$. $\square$

Следствие 2. В условиях теоремы 6 производные $\tilde{z}'(t)$ и $\tilde{z}''(t)$ непрерывны и ограничены при $t \in (-\infty, \infty)$.

Следствие 3. Пусть в условиях теоремы 4 нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$ непрерывно S -дифференцируема j раз, $j > 2$, причем все производные до порядка j ограничены на всей числовой оси. Тогда ультраслабое ограниченное решение (14) нечеткого дифференциального уравнения (2) является нечеткозначной функцией, непрерывно S -дифференцируемой j раз.

Замечание 3. Согласно утверждению 2 для производных α -индексов $z_{\alpha}^{\pm}(t)$, определяемых формулами (8), справедливы представления

$$(z_{\alpha}^{\pm})^{(j)}_t(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_t^{(j)}(t-s) f_{\alpha}^{\pm}(s) ds, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Однако, как показывают приведенные ниже примеры 1, 2, производные $G_t^{(j)}(t-s)$ функции Грина не сохраняют знак, так что для доказательства S -дифференцируемости нечеткозначного решения более удобным оказалось представление (13).

4. Примеры радиотехнических цепей с нечеткозначными входными сигналами. В настоящем разделе рассмотрены приложения результатов раздела 3 к простейшим радиотехническим цепям (см., например, [2]) в случае нечетких входных сигналов.

Пример 1. На вход RC-фильтра, т. е. динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\tilde{z}'(t) + \beta \tilde{z}(t) = \tilde{y}(t), \quad \beta = \frac{1}{RC} > 0, \quad (16)$$

поступает нечеткий непрерывный и ограниченный на всей числовой оси сигнал $\tilde{y}(t)$.

Укажем характеристики выходного нечеткого ограниченного сигнала $\tilde{z}(t)$. Заметим, что функция Грина задачи об ограниченных решениях скалярного уравнения $x' + \beta x = y(t)$ при $\beta > 0$ представима формулой

$$G_1(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

При этом $G_1(t) \geq 0$ при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Утверждение 4. Пусть коэффициент β нечеткого дифференциального уравнения (16) положителен, а правая часть $\tilde{y}(t)$ — непрерывная, ограниченная при $t \in (-\infty, \infty)$ нечеткозначная функция. Тогда нечеткий непрерывный и ограниченный на всей числовой оси ультраслабый сигнал на выходе динамической системы (16) имеет вид

$$\tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} \tilde{y}(s) ds. \quad (17)$$

Утверждение вытекает из теоремы 4.

Покажем, что ультраслабое решение является слабым, а именно, удовлетворяет при $t > 0$ приведенному ниже нечеткому интегральному уравнению.

Утверждение 5. В условиях утверждения 4 ультраслабое ограниченное решение (17) при всех $t > 0$ удовлетворяет следующему нечеткому интегральному уравнению:

$$\tilde{z}(t) + \beta \int_0^t \tilde{z}(s) ds = \tilde{z}(0) + \int_0^t \tilde{y}(s) ds. \quad (18)$$

Здесь нечеткое число $\tilde{z}(0)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ характеризуется α -индексами

$$z_{\alpha}^{\pm}(0) = \int_{-\infty}^0 e^{\beta(s)} y_{\alpha}^{\pm}(s) ds. \quad (19)$$

Доказательство. Действительно, по условию для α -индексов $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ нечеткого решения $\tilde{z}(t)$, определяемого (17) при всех $\alpha \in [0, 1]$, выполнены равенства

$$(z_{\alpha}^{\pm})'(t) + \beta z_{\alpha}^{\pm}(t) = y_{\alpha}^{\pm}(t). \quad (20)$$

Согласно утверждению 3 для непрерывных ограниченных на всей числовой оси решений уравнений (20) имеем

$$z_{\alpha}^{\pm}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} y_{\alpha}^{\pm}(s) ds. \quad (21)$$

Подставим решения (21) в (20) и проинтегрируем полученные тождества от 0 до t :

$$z_{\alpha}^{\pm}(t) + \beta \int_0^t z_{\alpha}^{\pm}(s) ds = z_{\alpha}^{\pm}(0) + \int_0^t y_{\alpha}^{\pm}(s) ds, \quad (22)$$

где $z_{\alpha}^{\pm}(0)$ определяются формулами (19).

Из (22) по определению сложения нечетких чисел в интервальной форме (с учетом positivity $\beta > 0$) и в силу определения интеграла от нечеткозначной функции [27], а также равенства нечетких чисел в интервальной форме получим (18). $\square$

Отметим, что изначально уравнение RC-фильтра выписывается как интегральное уравнение [2]. Уравнение вида (16) получается последующим дифференцированием.

Ниже приведено утверждение, обеспечивающее S -дифференцируемость нечеткозначного решения уравнения (16), вытекающее из теоремы 6.

Утверждение 6. Пусть выполнены условия утверждения 4 и дополнительно нечеткозначная правая часть уравнения (16) $\tilde{y}(t)$ непрерывно S -дифференцируема при всех $t \in (-\infty, \infty)$, причем S -производная $\tilde{y}'(t)$ ограничена на всей числовой оси. Тогда ультраслабое ограниченное решение (17) непрерывно S -дифференцируемо при всех $t \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет нечеткому дифференциальному уравнению (16) при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Таким образом, в условиях утверждения 6 формула (17) дает сильное ограниченное решение нечеткого уравнения (16).

Пример 2. На вход последовательного колебательного контура, описываемого дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_2 \tilde{z}''(t) + a_1 \tilde{z}'(t) + a_0 \tilde{z}(t) = \tilde{y}(t), \quad a_2 = L \geq 0, \quad a_1 = R > 0, \quad a_0 = \frac{1}{RC} > 0, \quad (23)$$

поступает непрерывный нечеткий ограниченный на всей числовой оси сигнал $\tilde{y}(t)$. Укажем характеристики выходного нечеткого ограниченного сигнала $\tilde{z}(t)$.

Теорема 7. Пусть коэффициенты нечеткого дифференциального уравнения (23) удовлетворяют условиям $a_i > 0$ ($i = 0, 1, 2$) и $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$. Пусть входной сигнал $\tilde{y}(t)$ является непрерывной ограниченной при $t \in (-\infty, \infty)$ нечеткозначной функцией. Тогда для нечеткого ультраслабого сигнала $\tilde{z}(t)$ на выходе динамической системы (23) справедливо представление

$$\tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^t G_2(t-s) \tilde{y}(s) ds. \quad (24)$$

Здесь $G_2(t)$ — функция Грина задачи об ограниченных решениях для скалярного дифференциального уравнения

$$a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = f(t)$$

с непрерывной и ограниченной на всей числовой оси вещественнозначной функцией $f(t)$, имеющая вид

$$G_2(t) = \begin{cases} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t})(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

где λ_1, λ_2 — вещественные, различные и отрицательные корни характеристического уравнения $a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$).

Доказательство. Действительно, заметим, что $G_2(t) \geq 0$ при всех $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда в соответствии с теоремой 4 для нечеткозначного сигнала $\tilde{z}(t)$ на выходе справедливо равенство (24). При этом выражение (24) является ультраслабым решением нечеткого дифференциального уравнения (23). $\square$

Покажем, что (24) является слабым решением, а именно, решением указанного ниже нечеткого интегрального уравнения.

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 7. Тогда при всех $t \geq 0$ нечеткозначная функция (24) является решением следующего нечеткого интегрального уравнения:

$$a_2 \tilde{z}(t) + a_1 \int_0^t \tilde{z}(s) ds + a_0 \int_0^t \int_0^\tau \tilde{z}(s) ds d\tau = \int_0^t \int_0^\tau \tilde{y}(s) ds d\tau + a_2 \tilde{z}(0) + t(a_2 \tilde{w}(0) + a_1 \tilde{z}(0)). \quad (25)$$

Здесь нечеткие числа $\tilde{z}(0)$ и $\tilde{w}(0)$ определяются равенствами

$$\tilde{z}(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_2 s} - e^{-\lambda_1 s} \right) \tilde{y}(s) ds, \quad (26)$$

$$\tilde{w}(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 s} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} \right) \tilde{y}(s) ds, \quad (27)$$

а $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ — корни характеристического уравнения $a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$.

Доказательство. Действительно, в условиях теоремы дифференциальные уравнения для α -индексов $z_\alpha^\pm(t)$ ультраслабого решения $\tilde{z}(t)$ уравнения (23) при всех $\alpha \in [0, 1]$ имеют вид

$$a_2 (z_\alpha^\pm)''(t) + a_1 (z_\alpha^\pm)'(t) + a_0 z_\alpha^\pm(t) = y_\alpha^\pm(t). \quad (28)$$

Согласно утверждению 3 непрерывные ограниченные на всей числовой оси решения скалярных дифференциальных уравнений (28) при всех $\alpha \in [0, 1]$ даются формулами

$$z_\alpha^\pm(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{\lambda_2(t-s)} - e^{\lambda_1(t-s)} \right) y_\alpha^\pm(s) ds. \quad (29)$$

Подставляя их в уравнения (28) и интегрируя обе части полученных тождеств от 0 до τ , получим равенства

$$a_2 (z_\alpha^\pm)'(\tau) + a_1 z_\alpha^\pm(\tau) + a_0 \int_0^\tau z_\alpha^\pm(s) ds = \int_0^\tau \tilde{y}(s) ds + a_2 w_\alpha^\pm(0) + a_1 z_\alpha^\pm(0). \quad (30)$$

Здесь числа $z_\alpha^\pm(0)$ имеют вид

$$z_\alpha^\pm(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_2 s} - e^{-\lambda_1 s} \right) y_\alpha^\pm(s) ds, \quad (31)$$

а $w_\alpha^\pm(0)$, равные $(z_\alpha^\pm)'(0)$, даются формулами

$$w_\alpha^\pm(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 s} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} \right) y_\alpha^\pm(s) ds. \quad (32)$$

Теперь проинтегрируем обе части равенств (30) от 0 до t . Тогда получим

$$\begin{aligned} a_2 z_\alpha^\pm(t) + a_1 \int_0^t z_\alpha^\pm(\tau) d\tau + a_0 \int_0^t \int_0^\tau z_\alpha^\pm(s) ds d\tau = \\ = \int_0^t \int_0^\tau y_\alpha^\pm(s) ds d\tau + a_2 z_\alpha^\pm(0) + t (a_2 w_\alpha^\pm(0) + a_1 z_\alpha^\pm(0)). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая положительность коэффициентов $a_i > 0$ ($i = 0, 1, 2$), правила арифметических действий с нечеткими числами в интервальной форме и условие равенства нечетких чисел, а также используя свойства интегралов от нечеткозначных функций, получим (25). При этом согласно (31), (32) нечеткие числа $\tilde{z}(0)$ и $\tilde{w}(0)$ определяются формулами (26), (27). $\square$

В силу теоремы 8 нечеткозначную функцию (24) естественно назвать слабым решением нечеткого дифференциального уравнения (23). Решения нечеткого интегрального уравнения типа (25) рассматривались, например, в [10].

Замечание 4. Выражения (26), (27) представляют собой нечеткие числа. В условиях теоремы 8 это можно показать аналогично лемме 3 с учетом представлений (31), (32) и неотрицательности функций $G_2(-s) \geq 0$ и $G'_2(-s) \geq 0$ при всех $s \in (-\infty, 0)$, участвующих в соответствующих подынтегральных выражениях в (31), (32).

Выясним, когда ультраслабое ограниченное решение (24) нечеткого дифференциального уравнения (23) является S -дифференцируемой нечеткозначной функцией.

Теорема 9. Пусть выполнены условия теоремы 7 и дополнительно нечеткозначная функция $\tilde{y}(t)$ непрерывно S -дифференцируема при всех $t \in (-\infty, \infty)$, причем S -производная $\tilde{y}'(t)$ ограничена при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное решение $\tilde{z}(t)$ нечеткого дифференциального уравнения (23), определяемое формулой (24), S -дифференцируемо при всех $t \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет при всех $t \in (0, \infty)$ следующему нечеткому интегро-дифференциальному уравнению:

$$a_2(\tilde{z})'(t) + a_1\tilde{z}(t) + a_0 \int_0^t \tilde{z}(s)ds = \int_0^t \tilde{y}(s)ds + a_2\tilde{w}(0) + a_1\tilde{z}(0),$$

где $\tilde{z}(0)$ и $\tilde{w}(0)$ определены формулами (26), (27).

Утверждение вытекает из теорем 5, 8 с учетом соотношений (30).

Такое решение естественно назвать сильно-слабым решением уравнения (23).

Отметим, что первоначально уравнение последовательного колебательного контура записывается именно как интегро-дифференциальное уравнение (см. [2]). Уравнение (23) получается последующим дифференцированием.

Теорема 10. Пусть выполнены условия теоремы 7 и дополнительно правая часть уравнения (23) $\tilde{y}(s)$ дважды непрерывно S -дифференцируема, причем S -производные $\tilde{y}'(t)$ и $\tilde{y}''(t)$ ограничены при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное решение $\tilde{z}(t)$, определяемое формулой (24), также дважды непрерывно S -дифференцируемо и удовлетворяет нечеткому дифференциальному уравнению (23).

Утверждение вытекает из теоремы 6 согласно (28) и в силу признака равенства нечетких чисел, заданных в интервальной форме.

Таким образом, в условиях теоремы 10 формула (24) дает сильное ограниченное решение нечеткого уравнения (23).

5. Приложения.

Доказательство леммы 3. Покажем, что для выражений $z_\alpha^\pm(t)$, определяемых формулами (8), выполнены условия (i)–(iii) раздела 2 на индексы нечетких чисел.

Фиксируем $t \in (-\infty, \infty)$ по предположению $f_\alpha^-(s) \leq f_\alpha^+(s)$ при всех $s \in (-\infty, \infty)$. Тогда в силу неотрицательности функции Грина

$$G(t-s)f_\alpha^-(s) \leq G(t-s)f_\alpha^+(s).$$

Поэтому на основании (8) и в силу монотонности интеграла получим, что $z_\alpha^-(t) \leq z_\alpha^+(t)$. Таким образом, при всех $t \in (-\infty, \infty)$ для $\tilde{z}(t)$ выполнено условие (i) раздела 2 для нечетких чисел.

Фиксируем произвольное $t \in (-\infty, \infty)$ и покажем, что функция $z_\alpha^-(t)$ не убывает по α . Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ и $\alpha_1 < \alpha_2$. По условию при всех $s \in (-\infty, \infty)$ выполнено условие $f_{\alpha_1}^-(s) \leq f_{\alpha_2}^-(s)$. Тогда в силу неотрицательности функции Грина имеем

$$G(t-s)f_{\alpha_1}^-(s) \leq G(t-s)f_{\alpha_2}^-(s).$$

Следовательно, в силу свойства монотонности интеграла $z_{\alpha_1}^-(t) \leq z_{\alpha_2}^-(t)$, т.е. функция $z_\alpha^-(t)$ монотонно не убывает по α . Аналогично доказывается, что функция $z_\alpha^+(t)$ монотонно не возрастает по α .

Согласно предположению функция $\tilde{f}(t)$ ограничена по t при $t \in (-\infty, \infty)$ в метрике (1). Это означает, что найдется такая постоянная $C > 0$, что $\rho(\tilde{f}(t), \tilde{0}) \leq C$ при любых $t \in (-\infty, \infty)$. Следовательно,

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} |f_{\alpha}^{\pm}(t)| \leq C.$$

Тогда, согласно (8), при фиксированном t и всех $\alpha \in [0, 1]$ имеем

$$|z_{\alpha}^{\pm}(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)| |f_{\alpha}^{\pm}(s)| ds \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)| ds,$$

а это гарантирует при каждом $t \in (-\infty, \infty)$ ограниченность по $\alpha \in [0, 1]$ индексов $z_{\alpha}^{\pm}(t)$.

Непрерывность слева функций $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ при фиксированном t по $\alpha \in (0, 1]$ вытекает из следующего соображения. Фиксируем $\alpha_0 \in [0, 1]$ и рассмотрим

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0 - 0} z_{\alpha}^{\pm}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0 - 0} f_{\alpha}^{\pm}(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_{\alpha_0}^{\pm}(s) ds = z_{\alpha_0}^{\pm}(t).$$

Здесь мы воспользовались представлением (8), возможностью предельного перехода под знаком абсолютно сходящегося несобственного интеграла и непрерывностью слева α -индексов $f_{\alpha}^{\pm}(s)$ нечеткозначной функции $\tilde{f}(s)$ по $\alpha \in (0, 1]$ при произвольном $s \in (-\infty, \infty)$. Аналогично проверяется непрерывность справа функций $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ по α при $\alpha = 0$.

Таким образом, для α -индексов $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ выполнены все условия раздела 2 на нечеткие числа. $\square$

Доказательство теоремы 2. Фиксируем вещественные числа t_1, t_2 . Тогда

$$G(t_1 - s) - G(t_2 - s) = G'_t(\tau - s)(t_1 - t_2), \quad \tau \in ((1 - \theta)t_1 + \theta t_2), \quad \theta \in (0, 1).$$

Согласно (8)

$$z_{\alpha}^{\pm}(t_1) - z_{\alpha}^{\pm}(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} (G(t_1 - s) - G(t_2 - s)) f_{\alpha}^{\pm}(s) ds.$$

Тогда

$$|z_{\alpha}^{\pm}(t_1) - z_{\alpha}^{\pm}(t_2)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |G(t_1 - s) - G(t_2 - s)| |f_{\alpha}^{\pm}(s)| ds.$$

В силу предыдущего

$$|z_{\alpha}^{\pm}(t_1) - z_{\alpha}^{\pm}(t_2)| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |G'_t(\tau - s)| |f_{\alpha}^{\pm}(s)| ds \right) |t_1 - t_2| \leq C |t_1 - t_2| \int_{-\infty}^{\infty} |G'_t(\tau - s)| ds,$$

где постоянная $C > 0$ характеризует условие ограниченности: $\rho(\tilde{f}(t), \tilde{0}) \leq C$ при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Воспользуемся теперь оценками производной функции Грина $|G'_t(t)| \leq M e^{-\gamma|t|}$ (см. п. (iii) свойств функции Грина в разделе 3). Тогда

$$|z_{\alpha}^{\pm}(t_1) - z_{\alpha}^{\pm}(t_2)| \leq MC |t_1 - t_2| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|\tau-s|} ds = 2 \frac{MC}{\gamma} |t_1 - t_2|.$$

Отсюда

$$\rho(z_{\alpha}^{\pm}(t_1), z_{\alpha}^{\pm}(t_2)) \leq 2 \frac{MC}{\gamma} |t_1 - t_2|,$$

что влечет непрерывность нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$, определенной формулой (9).

Покажем ограниченность при $t \in (-\infty, \infty)$ нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$, представимой формулой (9). По определению

$$\rho(\tilde{z}(t), \tilde{0}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} |z_{\alpha}^{\pm}(t)|.$$

При этом согласно (8)

$$|z_{\alpha}^{\pm}(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)| |f_{\alpha}^{\pm}(s)| ds \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)| ds \right) \rho(\tilde{f}(t), \tilde{0}) \leq 2 \frac{M\rho(\tilde{f}(t), \tilde{0})}{\gamma}.$$

Здесь мы опять воспользовались экспоненциальной оценкой на функцию Грина. Таким образом,

$$\rho(\tilde{z}(t), \tilde{0}) \leq 2 \frac{M\rho(\tilde{f}(t), \tilde{0})}{\gamma} \leq 2 \frac{MC}{\gamma} \quad \forall t \in (-\infty, \infty). \quad \square$$

6. Заключение. Основные результаты данной работы относятся к «нечетким» динамическим системам, описываемым линейными дифференциальными уравнениями n -го порядка с постоянными коэффициентами в предположении непрерывности и ограниченности входного нечеткого сигнала (раздел 3). Они опираются на развитие метода функций Грина на случай нечетких дифференциальных уравнений. Важное место в работе уделяется выяснению вопроса о гладкости полученных решений.

Приложения, приведенные в разделе 4 статьи, демонстрируют возможности применения установленных общих положений, к радиотехническим цепям с нечеткими входными сигналами. Они уточняют некоторые результаты раздела 3 на случай динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями первого и второго порядков.

Подход, представленный в настоящей статье, является альтернативой стандартному подходу к исследованию линейных динамических систем с постоянными коэффициентами, связанному с частотной характеристикой, прямым и обратным преобразованием Фурье, а также преобразованию Лапласа.

Отметим, что развитый подход допускает распространение на случай периодических и почти периодических сигналов, а также может быть полезен при исследовании краевых задач для нечетких дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аверкин А. Н. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. — М.: Наука, 1986.
2. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Высшая школа, 1988.
3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
4. Деменков Н. П., Микрин Е. А., Мочалов И. А. Нечеткое оптимальное управление линейными системами. Ч. 1. Позиционное управление // Информ. технол. — 2019. — 25, № 5. — С. 259–270.
5. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. — М.: Наука, 1970.
6. Мочалов И. А., Хрисат М. С., Шихаб Еддин М. Я. Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Ч. II // Информ. технол. — 2015. — 21, № 4. — С. 243–250.
7. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
8. Хацкевич В. Л. Непрерывные процессы с нечеткими состояниями и их приложения // Автомат. телемех. — 2023. — 8. — С. 43–60.
9. Ahmad L., Farooq M., Abdullah S. Solving n th order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace transform/ arXiv: arXiv:1403.0242 [math.GM].
10. Allahviranloo T., Abbasbandy S., Salahshour S., Hakimzadeh A. A new method for solving fuzzy linear differential equations // Soft Comput. — 2011. — 92. — P. 181–197.
11. Aumann R. J. Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. Appl. — 1965. — 12. — P. 1–12.
12. Bede B., Gal S. G. Almost periodic fuzzy-number-valued functions // Fuzzy Sets Syst. — 2004. — 147, № 3. — P. 385–403.
13. Bede B., Gal S. G. Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations // Fuzzy Sets Syst. — 2005. — 151, № 3. — P. 581–599.
14. Cao L., Yao D., Li H., Meng W., Lu R. Fuzzy-based dynamic event triggering formation control for nonstrict-feedback nonlinear MASs // Fuzzy Sets Syst. — 2023. — 452. — P. 1–22.

15. *Dai R., Chen M.* On the structural stability for two-point boundary value problems of undamped fuzzy differential equations// Fuzzy Sets Syst. — 2023. — 453, № 95–114.
16. *ElJaoui E., Melliani S., Chadli L. S.* Solving second-order fuzzy differential equations by the fuzzy Laplace transform method// Adv. Differ. Equations. — 2015. — 66.
17. *Esmi E., Sanchez D. E., Wasques V. F., de Barros L. C.* Solutions of higher order linear fuzzy differential equations with interactive fuzzy values// Fuzzy Sets Syst. — 2021. — 419. — P. 122–140.
18. *Hukuhara M.* Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe// Func. Ekvacioj. — 1967. — 11. — P. 205–223.
19. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — 24, № 3. — P. 301–317.
20. *Kaleva O., Seikkala S.* On fuzzy metric spaces// Fuzzy Sets Syst. — 1984. — 12. — P. 215–229..
21. *Khastan A., Bahrami F., Ivaz K.* New results on multiple solutions for N th order fuzzy differential equations under generalized differentiability// Boundary Value Probl. — 2009. — 7. — P. 1–13.
22. *Liu H. K.* Comparison result of two-point fuzzy boundary value problems// Int. J. Comput. Math. Sci.. — 5, № 1. — P. 463–469.
23. *Park J. Y., Han H. K.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations// Int. J. Math. Math. Sci. — 1996. — 22, № 2. — P. 271–279.
24. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Differential of fuzzy functions// J. Math. Anal. Appl. — 1983. — 91. — P. 552–558.
25. *Salahshour S., Allahviranloo T.* Applications of fuzzy Laplace transforms// Soft Comput. — 2013. — 17. — P. 145–158.
26. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — 24, № 3. — P. 319–330.
27. *Wu H. C.* The fuzzy Riemann integral and its numerical integration// Fuzzy Sets Syst. — 2000. — 110, № 1. — P. 1–25.
28. *Zhao R., Lu L., Feng G.* Asynchronous fault detection filtering design for continuous-time T-S fuzzy affine dynamic systems in finite-frequency domain// Fuzzy Sets Syst. — 2023. — 452. — P. 168–190.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хацкевич Владимир Львович (Khatskevich Vladimir L'vovich)

Военный учебно-научный центр ВВС «Военно-воздушная академия

имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж

(Russian Air Force Military Educational and Scientific Center “Air Force Academy

named after Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin,” Voronezh, Russia)

E-mail: vlkhats@mail.ru