ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 236 (2024). С. 3–12
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-236-3-12

УДК 517.9, 519.6

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СИЛЬНОМУ РЕШЕНИЮ B-ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ЕГО РАЗНОСТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

© 2024 г. **О. П. БАРАБАШ**

Аннотация. Работа посвящена построению разностной схемы для краевой задачи с уравнением B-эллиптического типа. Исследование сходимости ведется в весовом пространстве Киприянова. С помощью усредняющих операторов Стеклова выведено интегральное соотношение баланса, которому удовлетворяет точное решение исходной задачи. Получена пятиточечная разностная схема и априорная оценка погрешности.

Ключевые слова: оператор Бесселя, пространства Киприянова, разностная схема, усредняющий оператор Стеклова, сильное решение.

ON STRONG SOLUTIONS OF A B-ELLIPTIC BOUNDARY-VALUE PROBLEM AND ITS DIFFERENCE APPROXIMATION

© 2024 **O. P. BARABASH**

Abstract. In this work, a finite-difference scheme for a boundary-value problem for a B-elliptic equation is constructed. The convergence is examined in the Kipriyanov weight space. An integral balance relation for the exact solution of the original problem is obtained by using Steklov averaging operators. A five-point difference scheme and an a priori estimate for the error are obtained.

Keywords and phrases: Bessel operator, Kipriyanov spaces, difference scheme, Steklov averaging operator, strong solution.

AMS Subject Classification: 35J25, 35J75

1. Введение. Дискретные методы решения задач математической физики в настоящее время являются чрезвычайно действенными инструментами для исследования многих проблем естествознания. К реализуемым методам предъявляются требования высокой точности, устойчивости и экономичности.

Развитие теории однородных разностных схем, сохраняющих сходимость на разрывных решениях, было положено А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским (см. [12]. Для одномерных задач авторами с помощью естественных априорных оценок и представления погрешности аппроксимации в дивергентной форме были получены необходимые и достаточные условия сходимости в классе разрывных коэффициентов.

Для случая многомерных задач с негладкими данными естественно возникает понятие обобщенного решения. При этом ключевое значение приобретает вопрос принадлежности обобщенного решения некоторому классу, например, соболевскому классу W_p^k.

Исходя из того, что обобщенное решение определяется как функция, удовлетворяющая некоторому интегральному тождеству, в 1943 г. Р. Курант изложил метод построения дискретных схем как частный случай минимизации вариационного функционала по методу Ритца (см. [13]).

Следуя вариационной постановке задачи с обобщенным решением, построение разностных схем можно осуществлять с помощью аппроксимации производных конечными разностями в узлах сетки и вычисления интегралов по квадратурным формулам. Этим способом были получены хорошие аппроксимации для многомерных задач с граничными условиями второго и третьего рода (см. [8]).

Классическая трактовка погрешности аппроксимации как невязки, получающейся при подстановке точного решения в разностную схему, и ее оценка с помощью формулы Тейлора в многомерном случае не всегда оказывается эффективной. Требуется использование подходящего обобщения определения погрешности. Так, погрешность аппроксимации представляется в дивергентной форме $B_1 * \eta_1 + B_2 * \eta_2$, где B_α, $\alpha = 1, 2,$ — линейные разностные операторы. Например, если A — оператор разностной схемы и $A = A_1 + A_2$, то

$$A_\alpha y = -y_{\overline{x}_\alpha x} \equiv B_\alpha^* B_\alpha y, \quad B_\alpha^* y = -y_{x_\alpha}$$

(см. подробнее [7]). Тогда априорная оценка в энергетической норме $\|y\|_A = (Ay, y)^{1/2}$ выражается через $\|\eta_1\|_{L_2(\omega)} + \|\eta_2\|_{L_2(\omega)}$.

2. Постановка задачи. Рассмотрим в области $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}$ с границей $\Gamma = \{x_1 = 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\} \cup \{x_2 = 0,\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 1\}$ следующую краевую задачу:

$$Lu = f(x_1, x_2), \quad \gamma > 0, q \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

$$x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0,\ x_1 = 0, \quad u(x) = 0,\ x \in \Gamma, \tag{2}$$

$$Lu = x_1^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - qu, \quad q \in C(\overline{\Omega}), \quad q \geqslant 0.$$

Одним из способов введения нормы в пространствах Киприянова (см. [1, 4–6, 10, 14, 15] является следующая формула (см. [2, 3]):

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\Omega)} = \|u\|_{2,\gamma,\Omega} = \left(\sum_{\substack{0 \leqslant i_1 + 2i_2 + j \leqslant 2, \\ i_1 = 0,1,\ i_2, j \in \mathbb{Z}_+}} \left\| D^{i_1}_{x_1} B^{i_2}_{x_1} D^j_{x_2} u(x_1, x_2) \right\|^2_{L_{2,\gamma}} \right)^{1/2}, \tag{3}$$

где

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \|u\|_{L_{2,\gamma}(\Omega)} = \|u\|_{0,\gamma,\Omega} = \left(\iint\limits_\Omega x_1^\gamma u^2 d\Omega \right)^{1/2}.$$

Через $W^2_{2,\gamma,0}$ обозначим пространство функций, которые получаются замыканием в норме (3) функций $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих краевым условиям

$$x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0,\ x_1 = 0, \qquad u(x) = 0,\ x \in \Gamma.$$

Сильным решением задачи (1)–(2) будем называть функцию $u \in W^2_{2,\gamma,0}(\Omega)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$a(u, \mu) = l(\mu) \quad \forall \mu \in W^2_{2,\gamma,0}(\Omega), \tag{4}$$

где

$$a(u, \mu) = \iint\limits_\Omega x_1^\gamma L(u) L(\mu) d\Omega, \quad l(\mu) = \iint\limits_\Omega x_1^\gamma f(x_1, x_2) L(\mu) d\Omega, \quad f \in L_{2,\gamma}(\Omega). \tag{5}$$

Для дальнейшего исследования нам потребуется следующий известный результат.

Теорема 1 (лемма Лакса—Мильграма; см. [9, 11]). *Пусть V — гильбертово пространство, билинейная форма $a(\cdot,\cdot): V\times V\to\mathbb{R}^1$ непрерывна и V-эллиптична, линейная форма $f: V\to\mathbb{R}^1$ непрерывна. Тогда задача, состоящая в нахождении такого элемента $u\in V$, что*

$$a(u,v)=\langle f,v\rangle \quad \forall v\in V,$$

имеет единственное решение.

Теорема 2. *Пусть $f(x_1,x_2)\in L_{2,\gamma}(\Omega)$. Тогда сильное решение задачи* (1)–(2) *существует и единственно.*

Доказательство. Проверим выполнение условий леммы Лакса—Мильграма:

$$a(u,u)=\iint\limits_{\Omega} x_1^\gamma [L(u)]^2 d\Omega = \iint\limits_{\Omega} x_1^\gamma \left[x_1^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-qu\right]^2 d\Omega =$$

$$=\iint\limits_{\Omega} x_1^\gamma \Bigg[\left(x_1^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2+(qu)^2+$$

$$+2x_1^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-2x_1^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)qu-2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}qu\Bigg]d\Omega. \quad (6)$$

Рассмотрим четвертое слагаемое:

$$2\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}d\Omega = 2\int\limits_0^1\left[x_1^\gamma\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=1}-\int\limits_0^1 x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2\partial x_1}dx_1\right]dx_2 =$$

$$=2\left[x_1^\gamma\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\Bigg|_{x_1=1,x_2=0}^{x_2=1}-\int\limits_0^1 x_1^\gamma\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}\Bigg|_{x_1=1}dx_2\right]-2\int\limits_0^1 x_1^\gamma\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_1}\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=1}dx_1+$$

$$+2\iint\limits_{\Omega}x_1^\gamma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_1}\right)^2 d\Omega. \quad (7)$$

Для функций $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ первые три слагаемых в (7) равны нулю, поскольку содержат производную по направлению касательной на части границы, где функция равна нулю. Например, при $x_2=0$, $x_2=1$ имеем $u=0$, а значит,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{u(x_1+\Delta x_1,x_2)-u(x_1,x_2)}{\Delta x_1}=0.$$

Аналогично при $x_1=1$ выполняется равенство $\partial u/\partial x_2=0$. С учетом этих обстоятельств равенство (7) примет вид

$$2\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}d\Omega = 2\iint\limits_{\Omega}x_1^\gamma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_1}\right)^2 d\Omega.$$

Для функций $u\in W^2_{2,\gamma,0}(\Omega)$ это равенство получается переходом к пределу в норме $\|\cdot\|_{2,\gamma,0}$.

Кроме того, по теореме Вейерштрасса существует конечное значение $Q=\max\limits_{x\in\overline{\Omega}} q(x)$. Поэтому

$$-2\iint\limits_{\Omega}x_1^\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\,q\,u\,d\Omega\leqslant 2Q\iint\limits_{\Omega}x_1^\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 d\Omega,$$

$$-2\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^\gamma\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)q\,u\,d\Omega\leqslant 2Q\iint\limits_{\Omega}x_1^\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 d\Omega.$$

Таким образом,

$$a(u,u) \leqslant \iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma}\Bigg[\left(x_1^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^{\gamma}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\right)^2 + \\ + Q^2u^2 + 2Q\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + 2Q\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\Bigg] d\Omega.$$

Сравнивая полученное неравенство с полунормой

$$|u|^2_{2,\gamma,0} = \iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma}\left[\left(x_1^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^{\gamma}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\right)^2 \right] d\Omega,$$

получаем, что $a(u,u) \geqslant |u|^2_{2,\gamma,0}$.

Покажем эквивалентность полунормы $|u|_{2,\gamma,0}$ норме $\|u\|_{2,\gamma,0}$. Рассмотрим равенство

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} = -\int\limits_{x_1}^{1} \frac{\partial^2 u(x_3,x_2)}{\partial x_3 \partial x_2} dx_3.$$

Умножим обе части на $\sqrt{x_1^{\gamma}}$, возведем в квадрат и проинтегрируем по области Ω:

$$\iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma}\left(\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)^2 d\Omega = \iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma}\left(\int\limits_{x_1}^{1}\frac{\partial^2 u(x_3,x_2)}{\partial x_3\partial x_2}dx_3\right)^2 d\Omega \leqslant \\ \leqslant \iint\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{x_1}^{1}\sqrt{x_3^{\gamma}}\frac{\partial^2 u(x_3,x_2)}{\partial x_3\partial x_2}dx_3\right)^2 d\Omega \leqslant \int\limits_0^1 dx_1\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 x_3^{\gamma}\left(\frac{\partial^2 u(x_3,x_2)}{\partial x_3\partial x_2}\right)^2 dx_3\right)dx_2 \leqslant \\ \leqslant \iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma}\left(\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2 d\Omega. \quad (8)$$

Аналогичным образом, интегрируя равенство

$$u(x_1,x_2) = \int\limits_0^{x_2}\frac{\partial u(x_1,x_3)}{\partial x_3}dx_3,$$

получим

$$\iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma}u^2(x_1,x_2)d\Omega = \iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma}\left(\int\limits_0^{x_2}\frac{\partial u(x_1,x_3)}{\partial x_3}dx_3\right)^2 d\Omega \leqslant \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma}\left(\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)^2 d\Omega. \quad (9)$$

Далее рассмотрим соотношение

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \int\limits_0^{x_2}\frac{\partial^2 u(x_1,x_3)}{\partial x_1\partial x_3}dx_3.$$

Возводя в квадрат обе его части, умножая на x_1^{γ} и интегрируя по Ω, получим:

$$\iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma}\left(\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right)^2 d\Omega = \iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma}\left(\int\limits_0^{x_2}\frac{\partial^2 u(x_1,x_3)}{\partial x_1\partial x_3}dx_3\right)^2 d\Omega \leqslant \\ \leqslant \iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma}\left(\int\limits_0^1 dx_3\int\limits_0^1\left(\frac{\partial^2 u(x_1,x_3)}{\partial x_1\partial x_3}\right)^2 dx_3\right)d\Omega = \iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma}\left(\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2 d\Omega. \quad (10)$$

С учетом неравенств (8)–(10) будем иметь:

$$a(u,u) \geqslant \iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma}\left[\left(x_1^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^{\gamma}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3}u^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\right)^2\right] d\Omega.$$

Убедимся, что выполняется условие $W_{2,\gamma}^2$-эллиптичности билинейной формы, т.е.

$$a(u,u) \geqslant \chi\|u\|_{2,\gamma,0}, \chi > 0. \tag{11}$$

Проверим выполнение условия $|l(\mu)| \leqslant M\|\mu\|_{2,\gamma,0}$ для каждого $\mu \in W_{2,\gamma,0}^2(\Omega)$:

$$\big|l(\mu)\big| = \left|\iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma} f(x_1,x_2)\left[x_1^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^{\gamma}\frac{\partial \mu}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_2^2} - q\mu\right] d\Omega\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma} x_1^{-\gamma} f(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^{\gamma}\frac{\partial \mu}{\partial x_1}\right) d\Omega\right| + \left|\iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma} f(x_1,x_2)\frac{\partial^2 \mu}{\partial x_2^2} d\Omega\right| + Q\left|\iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma} f(x_1,x_2)\mu d\Omega\right|.$$

Для первого слагаемого имеем:

$$\left|\iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma} x_1^{-\gamma} f(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^{\gamma}\frac{\partial \mu}{\partial x_1}\right) d\Omega\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma} f^2(x_1,x_2) d\Omega\right)^{1/2} \left(\iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma}\left(x_1^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^{\gamma}\frac{\partial \mu}{\partial x_1}\right)\right)^2 d\Omega\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \big\|f\big\|_{L_{2,\gamma}}\big\|\mu\big\|_{2,\gamma,0} = M_1\big\|\mu\big\|_{2,\gamma,0}.$$

Для второго:

$$\left|\iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma} f(x_1,x_2)\frac{\partial^2 \mu}{\partial x_2^2} d\Omega\right| \leqslant \left(\iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma} f^2(x_1,x_2) d\Omega\right)^{1/2} \left(\iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma}\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x_2^2}\right)^2 d\Omega\right)^{1/2} \leqslant M_2\|\mu\|_{2,\gamma,0}.$$

Для третьего слагаемого справедлива оценка:

$$Q\left|\iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma} f(x_1,x_2)\mu d\Omega\right| \leqslant M_3\|\mu\|_{2,\gamma,0}.$$

Суммируя полученные оценки, приходим к неравенству

$$\big|l(\mu)\big| \leqslant M\|\mu\|_{2,\gamma,0} \quad \forall \mu \in W_{2,\gamma,0}^2. \tag{12}$$

Аналогично доказывается третье условие леммы Лакса—Мильграма

$$\big|a(u,\mu)\big| \leqslant \widetilde{M}\big\|u\big\|_{2,\gamma,0}\big\|\mu\big\|_{2,\gamma,0} \quad \forall u,\mu \in W_{2,\gamma,0}^2.$$

Таким образом, все условия леммы Лакса—Мильграма выполнены, что и доказывает теорему. □

3. Построение разностной схемы. Априорная оценка. На замыкании области Ω введем сетку $\overline{\omega} = \overline{\omega}_{x_1} \times \overline{\omega}_{x_2}$:

$$\overline{\omega}_{x_1} = \left\{ x_{1,i} = \left(i - \frac{1}{2} \right) h_1,\ i = \overline{1, N_1},\ \left(N_1 - \frac{1}{2} \right) h_1 = 1 \right\},$$
$$\overline{\omega}_{x_2} = \left\{ x_{2,j} = j h_2,\ j = \overline{0, N_2},\ h_2 = \frac{1}{N_2} \right\}.$$

Обозначим через ω и σ соответственно множества внутренних узлов сетки $\overline{\omega}$ и узлов, лежащих на границе Γ.

Скалярное произведение и норма на множестве сеточных функций, обращающихся в нуль на границе, задаются следующим образом:

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} y(x) v(x) h_1 h_2, \quad \|y\| = (y, y)^{1/2}. \tag{13}$$

Следуя обозначениям [9], запишем разностные отношения по формулам:

$$y^{(\pm 1_i)} = y^{(\pm 1_i)}(x) = y(x_1, \ldots, x_i \pm h_i, \ldots, x_n),$$
$$y_{\overline{x}_i} = y_{\overline{x}_i}(x) = \frac{y - y^{(-1_i)}}{h_i}, \quad y_{x_i} = y_{x_i}(x) = \frac{y^{(+1_i)} - y}{h_i},$$
$$y_{\overline{x}_i x_i} = y_{\overline{x}_i x_i}(x) = \frac{y^{(+1_i)} - 2y + y^{(-1_i)}}{h_i^2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Примем функцию $\mu(x)$ из равенства (4) такой, чтобы она удовлетворяла равенству

$$x_1^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^{\gamma} \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_2^2} - q\mu = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in e, \\ 0, & (x_1, x_2) \in \Omega \setminus e, \end{cases}$$

где

$$e = \left\{ (\xi_1, \xi_2) : |\xi_1 - x_1| < \frac{h_1}{2},\ |\xi_2 - x_2| < \frac{h_2}{2} \right\}.$$

С учетом выбранного μ запишем (4):

$$\frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_e \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + x_1^{\gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - x_1^{\gamma} q u \right] dx_1 dx_2 = \frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_e f(x_1, x_2) x_1^{\gamma} dx_1 dx_2.$$

Рассмотрим первое слагаемое полученного выражения:

$$\frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_e \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 = \frac{1}{h_1 h_2} \int\limits_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} \xi^{\gamma} \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi} \bigg|_{x - \frac{h_1}{2}}^{x + \frac{h_1}{2}} d\tau,$$

$$\left[S_2 \left(x_1^{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^{-0,5_1} \right]_{x_1} =$$
$$= \frac{1}{h_1 h_2} \int\limits_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} \left[\left(x_1 + \frac{h_1}{2} \right)^{\gamma} \frac{\partial u(x_1 + h_1/2, \tau)}{\partial x_1} - \left(x - \frac{h_1}{2} \right)^{\gamma} \frac{\partial u(x_1 - h_1/2, \tau)}{\partial x_1} \right] d\tau.$$

Для второго слагаемого:

$$\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_e x_1^\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx_1dx_2 = \frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}} \xi^\gamma \frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \tau}\Bigg|_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} d\xi,$$

$$\left[S_1\left(x_1^\gamma\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)^{-0{,}5_2}\right]_{x_2} = \frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}}\left[\xi^\gamma\frac{\partial u\left(\xi,x_2+1/h_2\right)}{\partial x_2} - \xi^\gamma\frac{\partial u\left(\xi,x_2-1/h_2\right)}{\partial x_2}\right]d\xi.$$

Для третьего:

$$-S_1S_2\Big(x_1^\gamma q(x_1,x_2)u(x_1,x_2)\Big) = -\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_e \xi^\gamma q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Теперь рассматриваемое равенство (4) запишется в виде

$$\left[S_2\left(x_1^\gamma\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^{-0{,}5_1}\right]_{x_1} + \left[S_1\left(x_1^\gamma\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^{-0{,}5_2}\right]_{x_2} - S_1S_2\left(x_1^\gamma qu\right) = S_1S_2\left(x_1^\gamma f\right), \tag{14}$$

где S_1 и S_2 — усредняющие операторы Стеклова по переменным x_1 и x_2 соответственно, определенные формулой

$$S_iu(x) = \frac{1}{h_i}\int\limits_{x_i-0{,}5h_i}^{x_i+0{,}5h_i} u(x_1,\ldots,\xi_i,\ldots,x_n)d\xi_i.$$

Далее в последнем интегральном тождестве заменим производные конечно-разностными соотношениями, интегралы — квадратурной формулой прямоугольников. По первой переменной произведем аппроксимацию производной центрально-разностным соотношением

$$S_2\left(x_1^\gamma\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^{-0{,}5_1} \cong S_2\left(x_1^\gamma\frac{u(x_1+0{,}5h_1,\xi_2)-u(x_1-0{,}5h_1,\xi_2)}{h_1}\right)^{-0{,}5_1} =$$

$$= \frac{1}{h_2}\int\limits_{x_2-0{,}5h_2}^{x_2+0{,}5h_2}(x_1-0{,}5h_1)^\gamma\,\frac{u(x_1,\xi_2)-u(x_1-h_1,\xi_2)}{h_1}d\xi_2 \cong (x_1-0{,}5h_1)^\gamma y_{\overline{x}_1}.$$

Аналогичные действия произведем по второй переменной:

$$S_1\left(x_1^\gamma\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^{-0{,}5_2} \cong S_1\left(\xi_1^\gamma\frac{u(\xi_1,x_2+0{,}5h_2)-u(\xi_1,x_2-0{,}5h_2)}{h_2}\right)^{-0{,}5_2} =$$

$$= \frac{1}{h_1}\int\limits_{x_1-0{,}5h_1}^{x_1+0{,}5h_1}\xi_1^\gamma\frac{u(\xi_1,x_2)-u(\xi_1,x_2-h_2)}{h_2}d\xi_1 \cong x_1^\gamma y_{\overline{x}_2}.$$

В результате приходим к следующей разностной схеме для приближенного решения $y(x_1,x_2)$:

$$\begin{aligned} &\Lambda y \equiv ((x_1-0{,}5h_1)^\gamma y_{\overline{x}_1})_{x_1} + x_1^\gamma y_{\overline{x}_2x_2} - qx_1^\gamma y = \\ &\qquad\qquad = S_1S_2\left(x_1^\gamma f(x_1,x_2)\right), \qquad (x_1,x_2)\in\omega, \\ &y(x_1,x_2) = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad (x_1,x_2)\in\sigma. \end{aligned} \tag{15}$$

Пусть $v = y - u$, где y — решение полученное с помощью схемы (15), u — сильное решение задачи (1)–(2). Разность v будем называть погрешностью решения. Тогда

$$\begin{aligned} &\Lambda v = \Lambda y - \Lambda u = S_1S_2\left(x_1^\gamma f(x_1,x_2)\right) - \Lambda u = \psi(x_1,x_2), \qquad (x_1,x_2)\in\omega, \\ &v(x_1,x_2) = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad (x_1,x_2)\in\sigma. \end{aligned} \tag{16}$$

Представим погрешность аппроксимациии ψ в следующем виде:

$$\psi(x_1,x_2) = -\eta_{1x_1} - \eta_{2x_2} + \eta_3,$$

где

$$\eta_1 = \left(x_1 - 0{,}5h_1\right)^{\gamma} u_{\overline{x}_1} - S_2\left(x_1^{\gamma}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^{-0{,}5_1},$$

$$\eta_2 = x_1^{\gamma} u_{\overline{x}_2} - S_1\left(x_1^{\gamma}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^{-0{,}5_2}, \quad \eta_3 = x_1^{\gamma} qu - S_1 S_2\left(x_1^{\gamma} qu\right).$$

Применим скалярное умножение (13) на v к (16). Затем используем первую разностную формулу Грина для функции равной нулю в граничных точках:

$$\left(v_{\overline{x}_i x_i}, v\right) = -\left(v_{\overline{x}_i}, v_{\overline{x}_i}\right]_i = -\left\|v_{\overline{x}_i}\right]\right|_i^2,$$

где

$$\left(\omega, v\right]_1 = \sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\omega(i_1h_1, i_2h_2)v(i_1h_1, i_2h_2)h_1h_2,$$

$$\left(\omega, v\right]_2 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\omega(i_1h_1, i_2h_2)v(i_1h_1, i_2h_2)h_1h_2.$$

В результате получим:

$$\left(\left(\left(x_1 - 0{,}5h_1\right)^{\gamma} v_{\overline{x}_1}\right)_{x_1}, v\right) + \left(x_1^{\gamma} v_{\overline{x}_2 x_2}, v\right) - \left(x_1^{\gamma} qv, v\right) =$$
$$= -\left(\left(x_1 - 0{,}5h_1\right)^{\gamma} v_{\overline{x}_1}, v_{\overline{x}_1}\right]_1 - \left(x_1^{\gamma} v_{\overline{x}_2}, v_{\overline{x}_2}\right]_2 - \left(x_1^{\gamma} qv, v\right) =$$
$$= (\psi, v) = \left(\eta_1, v_{\overline{x}_1}\right]_1 + \left(\eta_2, v_{\overline{x}_2}\right]_2 + (\eta_3, v).$$

Введем в рассмотрение следующую норму:

$$\left\|\Xi y\right\|_{0,\gamma,\omega} = \left\{\left(\left(x_1 - 0{,}5h_1\right)^{\gamma} y_{\overline{x}_1},\ y_{\overline{x}_1}\right]_1 + \left(x_1^{\gamma} y_{\overline{x}_2},\ y_{\overline{x}_2}\right]_2 + \left(x_1^{\gamma} qy, y\right)\right\}^{1/2}.$$

С учетом неравенства Коши—Буняковского получим:

$$\left\|\Xi v\right\|_{0,\gamma,\omega}^2 \leqslant \left\|\frac{1}{\sqrt{\left(x_1 - 0{,}5h_1\right)^{\gamma}}}\eta_1\right]\right|_1 \left\|\sqrt{\left(x_1 - 0{,}5h_1\right)^{\gamma}} v_{\overline{x}_1}\right]\right|_1 +$$
$$+ \left\|\frac{1}{\sqrt{x_1^{\gamma}}}\eta_2\right]\right|_2 \left\|\sqrt{x_1^{\gamma}} v_{\overline{x}_2}\right]\right|_2 + \left\|\eta_3\right\| \left\|v\right\|. \quad (17)$$

Оценим множители, входящие в правую часть (17):

$$\left\|\sqrt{\left(x_1 - 0{,}5h_1\right)^{\gamma}} v_{\overline{x}_1}\right]\right|_1 = \sqrt{\left(\left(x_1 - 0{,}5h_1\right)^{\gamma} v_{\overline{x}_1}, v_{\overline{x}_1}\right]_1} \leqslant \left\|\Xi v\right\|_{0,\gamma,\omega},$$

$$\left\|\sqrt{x_1^{\gamma}} v_{\overline{x}_2}\right]\right|_2 = \sqrt{\left(x_1^{\gamma} v_{\overline{x}_2}, v_{\overline{x}_2}\right]_2} \leqslant \left\|\Xi v\right\|_{0,\gamma,\omega}.$$

Для оценки $\|v\|$ рассмотрим равенство

$$v_{\overline{\xi}_2} = \frac{v(x_1,\xi_2) - v(x_1,\xi_2 - h_2)}{h_2},$$

$$\sum_{\xi_2=h_2}^{x_2} h_2 v_{\overline{\xi}_2}(x_1,\xi_2) = v(x_1,h_2) - v(x_1,0) + v(x_1,2h_2) - v(x_1,h_2) + v(x_1,3h_2) - v(x_1,2h_2) +$$
$$+ \dots + v(x_1,x_2 - h_2) - v(x_1,x_2 - 2h_2) + v(x_1,x_2) - v(x_1,x_2 - h_2) = v(x_1,x_2).$$

Умножим равенство

$$v(x_1,x_2)=\sum_{\xi_2=h_2}^{x_2} h_2 v_{\overline{\xi}_2}(x_1,\xi_2)$$

на $\sqrt{x_1^\gamma h_1 h_2}$, возведем в квадрат и просуммируем по сетке ω:

$$h_1h_2\sum_{\omega} x_1^\gamma v^2(x_1,x_2)=\|v\|^2_{0,\gamma,\omega}=\sum_{\omega} x_1^\gamma h_1 h_2 h_2^2\left(\sum_{\xi_2=h_2}^{x_2} v_{\overline{\xi}_2}(x_1,\xi_2)\right)^2. \qquad (18)$$

Принимая во внимание неравенство $(a_1+a_2+\dots+a_n)^2\leqslant n\left(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2\right)$, а также тот факт, что $h_2N_2=1$, перепишем (18) в следующем виде:

$$\|v\|^2_{0,\gamma,\omega}\leqslant\sum_{\omega} x_1^\gamma h_2^2 N_2\sum_{\omega_2} v^2_{\overline{\xi}_2}(x_1,\xi_2)h_1h_2=\sum_{\omega} x_1^\gamma h_1 h_2^2\sum_{\xi_2\in\omega_2} v^2_{\overline{\xi}_2}(x_1,\xi_2)=$$
$$=\sum_{x_1\in\omega_1} x_1^\gamma h_1\sum_{x_2\in\omega_2} h_2\sum_{\xi_2\in\omega_2} v^2_{\overline{\xi}_2}(x_1,\xi_2)h_2\leqslant 2\sum_{x_1\in\omega_1} x_1^\gamma h_1\sum_{\xi_2\in\omega_2} v^2_{\overline{\xi}_2}(x_1,\xi_2)h_2=$$
$$=2\left\|\sqrt{x_1^\gamma}v_{\overline{\xi}_2}\right\|^2\leqslant C\,\|\Xi v\|^2.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Разностная схема* (16) *имеет единственное решение, являющееся устойчивым по правой части. При этом выполнена априорная оценка*

$$\|\Xi v\|_{0,\gamma,\omega}\leqslant\left\|\frac{1}{\sqrt{\left(x-0{,}5h_1\right)^\gamma}}\eta_1\right]\Bigg|_1+\left\|\frac{1}{\sqrt{x_1^\gamma}}\,\eta_2\right]\Bigg|_2+\|\eta_3\|C. \qquad (19)$$

4. Заключение. Обсуждаемый в статье подход построения и исследования разностной схемы для эллиптической задачи имеет важные особенности, а именно: 1) представление погрешности аппроксимации согласовано через оператор разностной схемы с нормой, в которой получена оценка; 2) составляющие погрешности аппроксимации η_1 и η_2 оцениваются на обобщенных решениях, имеющих определенную гладкость, которая выражается в их принадлежности пространству Киприянова $W^2_{2,\gamma}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений// Совр. мат. Фундам. напр. — 2018. — *64*, № 2. — С. 211–426.
2. *Катрахова А. А.* Формула Тейлора с оператором Бесселя// в кн.: Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. — Новосибирск: Ин-т мат. им. С. Л. Соболева СО РАН, 1981. — С. 96–97.
3. *Катрахова А. А.* Сингулярные краевые задачи и приближенные методы их решения/ дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Воронеж, 1982.
4. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
5. *Киприянов И. А.* Преобразование Фурье–Бесселя и теоремы вложения для весовых классов// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1967. — *89*. — С. 130–213.
6. *Ляхов Л. Н.* B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
7. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983.
8. *Самарский А. А., Андреев В. Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. — М.: Наука, 1976.
9. *Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. — М.: Высшая школа, 1987.
10. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
11. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980.

12. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Об однородных разностных схемах// Докл. АН СССР. — 1958. — *122*, № 4. — С. 562–565.
13. *Courant R.* Variational methods for solution of problems of equilibrium and vibration// Bull. Am. Math. Soc. — 1943. — *49*. — P. 1–13.
14. *Muravnik A. B.* Fourier–Bessel transformation of compactly supported non-negative functions and estimates of solutions of singular differential equations// Funct. Differ. Equations. — 2001. — *8*, № 3. — P. 353–363.
15. *Shishkina E. L., Sitnik S. M.* Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. — London: Academic Press, 2020.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Барабаш Ольга Павловна (Barabash Olga Pavlovna)
Военный учебно-научный центр ВВС «Военно-воздушная академия
имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж
(Russian Air Force Military Educational and Scientific Center “Air Force Academy
named after Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin,” Voronezh, Russia)
E-mail: navyS9@yandex.ru