



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 236 (2024). С. 22–30
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-236-22-30

УДК 514.7

ВКЛАД ОБОБЩЕННОЙ ТЕХНИКИ БОХНЕРА В ГЕОМЕТРИЮ ПОЛНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

© 2024 г. С. Е. СТЕПАНОВ, И. И. ЦЫГАНОК

Аннотация. На основе методов техники Бохнера, являющейся важной частью геометрического анализа, установлены условия, при которых минимальные и устойчивые минимальные подмногообразия в римановых многообразиях характеризуются как вполне геодезические подмногообразия.

Ключевые слова: евклидово пространство, риманово многообразие, минимальная гиперповерхность, устойчивая гиперповерхность, теорема о жесткости.

A CONTRIBUTION OF THE GENERALIZED BOCHNER TECHNIQUE TO THE GEOMETRY OF COMPLETE MINIMAL SUBMANIFOLDS

© 2024 S. E. STEPANOV, I. I. TSYGANOK

ABSTRACT. In this paper, based on methods of the Bochner technique, which is an important part of the geometric analysis, we establish conditions under which minimal and stable minimal submanifolds in Riemannian manifolds are characterized as totally geodesic submanifolds.

Keywords and phrases: Euclidean space, Riemannian manifold, minimal hypersurface, stable hypersurface, rigidity theorem.

AMS Subject Classification: 53C20, 53C21, 53C24

1. Введение. Изучение минимальных поверхностей имеет долгую и богатую историю. Напомним, что n -мерное минимальное подмногообразие (M, g) в m -мерном римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ при $m > n$ характеризуется как критическая точка его функционала объема. Важные результаты о минимальных подмногообразиях можно найти в монографии [7, гл. 5]. Более того, такое подмногообразие (M, g) считается устойчивым, если вторая вариация его объема всегда неотрицательна для любой нормальной деформации с компактным носителем. Интересные результаты об устойчивости минимальных подмногообразий можно найти в монографии [7, § 5.10, 11.3, 11.4, 16.11], статье [12], а также в настоящей статье.

Получение результатов о жесткости для минимальных и устойчивых минимальных подмногообразий в римановых многообразиях — это проблема, которая привлекла значительный интерес в сообществе геометрического анализа, начиная с классической статьи [5] и заканчивая более поздними статьями (см., например, [6]).

Методы, используемые в данной работе, являются методами обобщенной техники Бохнера (см. [13]), которая является важной частью геометрического анализа (см., например, [16]). Они позволяют получить новые результаты в этой активно изучаемой теме.

2. Минимальные подмногообразия в римановых многообразиях. Напомним, что одной из наиболее интересных тем в вариационном исчислении в римановой геометрии является изучение минимальных подмногообразий (M, g) риманова многообразия $(\bar{M}, \bar{g})$, которые возникают как критические точки функционала объема (см. [7, § 5.1]).

Пусть (M, g) — n -мерное полное многообразие, изометрически погруженное в $(n + k)$ -мерное риманово многообразие $(\bar{M}, \bar{g})$ постоянной кривизны C . Обозначим через ∇ и $\bar{\nabla}$ связности Леви-Чивиты на (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ соответственно. Для векторных полей $X, Y \in C^\infty(TM)$ тангенциальная компонента $\bar{\nabla}_X Y$ равна $\nabla_X Y$. Формула Гаусса для $(M, g) \subset (\bar{M}, \bar{g})$ имеет вид (см. [7, § 3.1])

$$\varphi(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y;$$

φ — это симметричное 2-тензорное поле на M , которое называется второй фундаментальной формой (M, g) . В этом случае

$$H = \sum_{i=1, \dots, n} \varphi(e_i, e_i)$$

— вектор средней кривизны, где $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный репер на открытом множестве $U \subseteq M$ (см., например, [18, с. 68]). Многообразие (M, g) называется минимальным подмногообразием $(\bar{M}, \bar{g})$, если векторное поле средней кривизны тождественно равно нулю (см. [7, § 3.3]). Гиперповерхность (M, g) является вполне геодезическим подмногообразием $(\bar{M}, \bar{g})$ тогда и только тогда, когда каждая геодезическая многообразия (M, g) является геодезической многообразия $(\bar{M}, \bar{g})$. Это условие эквивалентно обращению в нуль ее второй фундаментальной формы φ для (M, g) .

Замечание 1. Подробные сведения о вполне геодезических подмногообразиях можно найти в монографии [7, гл. 11].

Рассмотрим далее полные римановы многообразия. Существование и несуществование положительной функции Грина делит класс полных многообразий на две категории. В общем случае методы работы с теорией функций на многообразиях из этих двух категорий различны. Если риманово многообразие не допускает положительной функции Грина, то оно называется параболическим, и непараболическим в противном случае (см. [11, с. 164]). Например, полное риманово многообразие (M, g) конечного объема является параболическим многообразием (см. [8]).

Следующая теорема является обобщением утверждения Кобаяси, Черна и до Кармо (см. [5, Theorem 1 and its Corollary]) для компактной минимальной поверхности в римановом многообразии постоянной кривизны.

Теорема 1. Пусть (M, g) — n -мерное полное параболическое многообразие (в частности, полное многообразие конечного объема), минимально погруженное в $(n + k)$ -мерное риманово многообразие $(\bar{M}, \bar{g})$ постоянной кривизны C . Если (M, g) не является вполне геодезическим и

$$\|\varphi\|^2 \leq \frac{n}{2 - 1/k} C,$$

где φ — вторая фундаментальная форма многообразия (M, g) , то (M, g) является параллельным подмногообразием и

$$\|\varphi\|^2 = \frac{n}{2 - 1/k} C.$$

Доказательство. Пусть (M, g) — n -мерное риманово полное многообразие, изометрически погруженное в $(n + q)$ -мерное риманово многообразие $(\bar{M}, \bar{g})$ постоянной кривизны C . Обозначим через $\bar{g}$ метрику расслоения $TM \oplus T^\perp M$ над M ; тогда, в частности, квадрат длины второй фундаментальной формы φ многообразия (M, g) имеет вид

$$\|\varphi\|_{\bar{g}}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{g}(\varphi(e_i, e_j), \varphi(e_i, e_j)),$$

где $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный репер на открытом множестве $U \subseteq M$. Следовательно, $\|\varphi\|_{\bar{g}}^2$ — гладкая функция, определенная на M . Независимо от того, компактно (M, g) или нет,

согласно уравнениям (3.10) и (3.12) из [5, с. 65-66], имеем уравнение

$$\frac{1}{2}\Delta_g\|\varphi\|_{\tilde{g}}^2 = \|\tilde{\nabla}\varphi\|_{\tilde{g}}^2 + \left(nC - \left(2 - \frac{1}{k}\right)\|\varphi\|_{\tilde{g}}^2\right)\|\varphi\|_{\tilde{g}}^2, \quad (1)$$

где $\Delta_g = \text{trace}_g \nabla^2$ — лапласиан, определенный на $C^2(M)$, а $\tilde{\nabla}\varphi$ — ковариантная производная относительно связности $\tilde{\nabla}$, определенной на $TM \oplus T^\perp M$ (см. [7, § 3.1], [5, с. 62, 66]). Поэтому, если предположить, что (M, g) не является вполне геодезическим и $\|\varphi\|_{\tilde{g}}^2 \leq nC/(2 - 1/k)$, то из (1) заключаем, что

$$\Delta_g\|\varphi\|_{\tilde{g}}^2 \geq 0.$$

В этом случае $\|\varphi\|_{\tilde{g}}^2$ — неотрицательная субгармоническая функция, ограниченная сверху. Обратим внимание, что определение параболичности допускает следующую характеристику: полное многообразие (M, g) является параболическим, если каждая ограниченная субгармоническая функция на (M, g) является константой (см. [11, с. 164], [10, с. 66]). Следовательно, если (M, g) — параболическое многообразие и, в частности, имеет конечный объем, то $\|\varphi\| = \text{const}$. В этом случае из (1) получаем $\|\varphi\|_{\tilde{g}}^2 = nC$ и $\tilde{\nabla}\varphi = 0$. Напомним также, что риманово подмногообразие называется параллельным, если его вторая фундаментальная форма параллельна относительно $\tilde{\nabla}$ (подробности см. в [7, гл. 8]). Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим теперь гладкое связное n -мерное риманово многообразие (M, g) , изометрически погруженное в $(n + 1)$ -мерное риманово многообразие $(\overline{M}, \overline{g})$, $n \geq 2$; такое многообразие называется гиперповерхностью. В этом случае справедлива формула Гаусса:

$$\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y - g(A_g X, Y)N,$$

где X и Y — произвольные касательные векторные поля к (M, g) , N — глобальное нормальное единичное векторное поле к (M, g) , а A_g — оператор формы (оператор Вейнгартена) многообразия (M, g) . Средняя кривизна многообразия (M, g) задается формулой $H = \text{trace } A_g$. Многообразие (M, g) минимально тогда и только тогда, когда $H \equiv 0$ (см. [3, с. 39]).

Вторая фундаментальная форма гиперповерхности (M, g) определяется тождеством $\varphi(X, Y) := g(A_g X, Y)$, где X и Y — произвольные касательные векторные поля к (M, g) .

Обозначим через $\|\varphi_g\|^2 := \|\varphi_g\|_g^2$ квадрат длины оператора формы (M, g) . Следующее утверждение очевидно.

Следствие 1. Пусть (M, g) — n -мерное полное параболическое многообразие (в частности, полное многообразие конечного объема), минимально погруженное в $(n + 1)$ -мерное риманово многообразие $(\overline{M}, \overline{g})$ постоянной кривизны C . Если (M, g) не является вполне геодезическим и $\|\varphi_g\|^2 \leq nC$, где φ_g — оператор формы (M, g) , то $\|\varphi_g\|^2 = nC$ и вторая фундаментальная форма φ многообразия (M, g) параллельна относительно связности Леви-Чивиты ∇ многообразия (M, g) .

Известная теорема Эйзенхарта (см. [9, с. 303]) утверждает следующее: если φ — параллельный симметричный 2-тензор на (M, g) , то для каждой точки $x \in M$ существует некоторая окрестность $U \subset M$, где

$$\varphi = \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_r g_r,$$

и локально (M, g) допускает риманову структуру прямого произведения $(M, g) \supset (U, g|_U) = (U_1, g_1) \times \dots \times (U_r, g_r)$. Здесь коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ являются константами, а $(U_1, g_1), \dots, (U_r, g_r)$ являются римановыми многообразиями размерностей $n_1 \geq 1, \dots, n_r \geq 1$ соответственно, причем $n_1 + \dots + n_r = n$ для некоторого r (см. [9]). В этом случае условия $\text{trace}_g \varphi = 0$ и $\|\varphi_g\|^2 = nC$ можно переписать в виде

$$n_1 \lambda_1 + \dots + n_r \lambda_r = 0, \quad n_1 \lambda_1^2 + \dots + n_r \lambda_r^2 = nC,$$

соответственно. Кроме того, согласно [5], известно, что если (M, g) — минимальная (но не вполне геодезическая) гиперповерхность, погруженная в $(n + 1)$ -мерное риманово многообразие $(\overline{M}, \overline{g})$ постоянной кривизны 1, удовлетворяющее условию $\|\varphi_g\|^2 = n$, то $r = 2$. В этом случае прямыми вычислениями получаем равенства

$$\lambda_1 = \sqrt{(n - m)/m}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{n/(n - m)}$$

где $m = \dim U_1 \geq 1$ и $n - m = \dim U_2 \geq 1$. Следовательно, справедливо следующее следствие (ср. с утверждением, приведенным в [5, с. 68]).

Следствие 2. Если (M, g) — такое n -мерное минимальное (не вполне геодезическое) подмногообразие $(n + 1)$ -мерного риманова многообразия $(\bar{M}, \bar{g})$ постоянной кривизны $C = 1$, что $\|\varphi_g\|^2 = n$, то для каждой точки $x \in M$ существует такая окрестность $U \subset M$, что (M, g) локально является римановым прямым произведением $(M, g) \supset (U, g|_U) = (U_1, g_1) \times (U_2, g_2)$, где (U_1, g_1) и (U_2, g_2) — римановы многообразия постоянной кривизны размерностей соответственно $m \geq 1$ и $n - m \geq 1$ и $\varphi = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$, где $\lambda_1 = \sqrt{(n - m)/m}$ и $\lambda_2 = -\sqrt{n/(n - m)}$.

Если $(\bar{M}, \bar{g})$ — риманово многообразие постоянной секционной кривизны, то вторая фундаментальная форма φ гиперповерхности (M, g) удовлетворяет уравнениям Кодацци (см. [3, с. 436] и [14, с. 350]):

$$(\nabla_X \varphi)(Y, Z) = (\nabla_Y \varphi)(X, Z), \quad (2)$$

где X, Y и Z — произвольные касательные векторные поля многообразия (M, g) . В то же время, любое поле $\varphi \in C^\infty(S^2 M)$, удовлетворяющее уравнениям Кодацци (2), называется тензором Кодацци (см. [3, с. 435] и [14, с. 350]).

Следовательно, если $(\bar{M}, \bar{g})$ — риманово многообразие постоянной секционной кривизны, то из уравнений Кодацци (2) выводим

$$\delta \varphi = -dH, \quad (3)$$

где $\delta \varphi = -\operatorname{div} \varphi$. В то же время хорошо известно, что для любого n -мерного ($n \geq 3$) компактного (без края) риманова многообразия (M, g) алгебраическая сумма $\operatorname{Im} \delta^* + C^\infty M \cdot g$ замкнута в $S^2 M$, где $\delta^* \theta := \frac{1}{2} L_\xi g$ и $L_\xi g$ — производная Ли вдоль гладкого векторного поля ξ , которое является двойственным (относительно g) к 1-форме θ (см. [3, с. 35]). В этом случае имеет место разложение (см. [3, с. 130])

$$S^2 M = (\operatorname{Im} \delta^* + C^\infty M \cdot g) \oplus (\delta^{-1}(0) \cap \operatorname{trace}_g^{-1}(0)), \quad (4)$$

где оба слагаемых бесконечномерны и ортогональны друг другу относительно внутреннего скалярного произведения в L^2 :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \int_M g(\cdot, \cdot) dv_g$$

для канонической меры dv_g на (M, g) . Очевидно, что второе слагаемое $\delta^{-1}(0) \cap \operatorname{trace}_g^{-1}(0)$ в (4) — это пространство TT -тензоров.

Замечание 2. Напомним, что симметричный бездивергентный бесследовый ковариантный 2-тензор называется TT -тензором. Как следствие результата Бургинона, Эбина и Марсдена (см. [3, с. 132]), пространство TT -тензоров является бесконечномерным векторным пространством для любого замкнутого риманова многообразия (M, g) . Такие тензоры имеют фундаментальное значение в анализе устойчивости в общей теории относительности (см., например, [4]) и в римановой геометрии (см., например, [3, с. 346–347]).

Учитывая вышеизложенное, приходим к выводу, что вторая фундаментальная форма φ имеет следующее L^2 -ортогональное разложение (см. также формулу (4)):

$$\varphi = \left(\frac{1}{2} L_\xi g + \lambda g \right) + \varphi^{TT} \quad (5)$$

для некоторых векторного поля $\xi \in C^\infty TM$, TT -тензора $\varphi^{TT} \in C^\infty(S^2)$ и скалярной функции $\lambda \in C^\infty M$. Применяя оператор trace_g к обеим сторонам (5), получим

$$H = -\delta \theta + n \lambda, \quad (6)$$

где $\theta^\sharp = \xi$ (см. [3, с. 30]). В этом случае уравнение (6) можно переписать в виде

$$\varphi_0 = S\theta + \varphi^{TT}, \quad (7)$$

где $\varphi_0 = \varphi - \frac{1}{n} Hg$ — бесследовая часть второй фундаментальной формы φ и

$$S\theta = \frac{1}{2} L_\xi g + \frac{1}{n} \delta \theta g$$

— оператор Коши—Альфорса. Далее, применяя $S^* := \delta$ к обеим сторонам (6), получаем

$$S^* S \theta = \delta \varphi_0 \quad (8)$$

для лапласиана Альфорса $S^* S$ (см. [15]). Объединяя (3) и (8), находим

$$S^* S \theta = -dH. \quad (9)$$

Следовательно, если средняя кривизна $H(M, g)$ постоянна, то $S^* S \theta = 0$. Тогда $S \theta = 0$, поскольку $\langle S^* S \theta, \theta \rangle = \langle S \theta, S \theta \rangle \geq 0$ (см. [15]). В этом случае из (7) получаем

$$\varphi = \frac{1}{n} H g + \varphi^{TT}.$$

Обратное утверждение также справедливо. Теперь мы готовы сформулировать результат, обобщающий теорему 5.4.2 из [18].

Теорема 2. Пусть (M, g) — компактная гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ постоянной секционной кривизны, $\dim \overline{M} \geq 4$. Средняя кривизна H многообразия (M, g) постоянна тогда и только тогда, когда вторая фундаментальная форма $\varphi(M, g)$ допускает L^2 -ортogonalное разложение

$$\varphi = \frac{1}{n} H g + \varphi^{TT}, \quad (10)$$

где φ^{TT} — некоторый TT -тензор. В частности, если (M, g) — компактная минимальная гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ постоянной секционной кривизны, то $\varphi = \varphi^{TT}$.

Из (10) и уравнений Кодаци (2) следует, что φ^{TT} — бесследовый тензор Кодаци, а это значит, что φ^{TT} — гармоническая форма (см. [14, с. 350]). В то же время в [2] мы доказали, что любой такой TT -тензор должен быть нулевым тензором на компактном римановом многообразии (M, g) с квазиположительной секционной кривизной, т.е. она всюду полуотрицательно определена и отрицательно определена в некоторой точке. В частности, если (M, g) — гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ постоянной секционной кривизны, то она является вполне омбилической (см. [3, с. 39]) и имеет постоянную среднюю кривизну. В этом случае (M, g) — риманово многообразие постоянной секционной кривизны. Более того, эта кривизна должна быть положительной, поскольку мы предположили, что (M, g) — многообразие квазиположительной секционной кривизны.

Римановы многообразия постоянной секционной кривизны называются пространственными формами (см. [14, с. 20]). Поэтому в нашем случае (M, g) должно быть сферической пространственной формой, поскольку имеет положительную постоянную кривизну. В частности, если (M, g) — односвязное многообразие, то $M = \mathbb{S}^n$ (см. [14, с. 200–201]). Используя этот факт, а также результат теоремы 2, приходим к следующему выводу.

Следствие 3. Пусть $(\overline{M}, \overline{g})$ — n -мерное риманово многообразие постоянной секционной кривизны, где $n \geq 4$, и пусть (M, g) — изометрически вложенная компактная гиперповерхность $(M, g) \subset (\overline{M}, \overline{g})$ постоянной средней кривизны. Если (M, g) имеет квазиположительную секционную кривизну, то (M, g) — сферическая пространственная форма. Кроме того, если (M, g) — односвязное многообразие, то это евклидова сфера $\mathbb{S}^n$.

Замечание 3. Приведем альтернативное доказательство следствия 2. Следующая теорема хорошо известна (см. [3, с. 436]): Каждый тензор Кодаци φ с постоянным следом на компактном римановом многообразии (M, g) неотрицательной секционной кривизны параллелен. Более того, если секционные кривизны многообразия (M, g) положительны в некоторой точке, то φ является постоянным кратным g . Следовательно, если (M, g) — гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ постоянной секционной кривизны, то она является вполне омбилической и имеет постоянную среднюю кривизну.

Рассмотрим (M, g) как гиперповерхность $(n+1)$ -мерного риманова многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$ положительной постоянной секционной кривизны. Напомним, что в таком случае ее вторая фундаментальная форма является тензором Кодаци (см. [3, с. 436]). Более того, если средняя кривизна

многообразия (M, g) постоянна (и, в частности, если она равна нулю), то его вторая фундаментальная форма становится гармонической билинейной формой (см. [14, с. 350]). Используя этот факт, а также наши результаты о гармонических билинейных формах на полных многообразиях (см. [17]), приходим к следующему выводу.

Следствие 4. Пусть (M, g) — полная некомпактная гиперповерхность в $(n + 1)$ -мерном римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ положительной постоянной секционной кривизны. Если секционная кривизна многообразия (M, g) неотрицательна, средняя кривизна постоянна (в частности, равна 0), а вторая фундаментальная форма φ удовлетворяет условию

$$\int_M \|\varphi\|^p dv_g < \infty$$

хотя бы для одного значения $p \geq 1$, то (M, g) — сферическая пространственная форма. В частности, если (M, g) — односвязное многообразие, то это евклидова сфера $\mathbb{S}^n$.

3. Устойчивые минимальные гиперповерхности в римановых многообразиях. В этом разделе рассматриваем полные, связные, изометрически погруженные гиперповерхности $(M, g) \rightarrow (\overline{M}, \overline{g})$, где $(\overline{M}, \overline{g})$ — риманово многообразие размерности $n + 1 \geq 3$. Напомним, что минимальная гиперповерхность (M, g) в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ считается устойчивой тогда и только тогда, когда вторая вариация ее функционала объема неотрицательна для любой нормальной деформации с компактным носителем (см., например, [7, § 5.2], [8]). Согласно [6] устойчивость (M, g) , связанная с неотрицательностью второй вариации ее функционала объема, эквивалентна неположительности оператора Якоби (или оператора устойчивости)

$$L_g := \Delta_g + \|A_g\|^2 + \text{Ric}_{\overline{g}}(N, N),$$

где $\text{Ric}_{\overline{g}}(N, N)$ — кривизна Риччи многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$ в направлении единичного нормального векторного поля N к многообразию (M, g) в каждой его точке. Следовательно, в этом случае имеем

$$\Delta_g u \leq -[\|A_g\|^2 + \text{Ric}_{\overline{g}}(N, N)]u \quad (11)$$

для любой функции $u \in C^\infty(M)$. В то же время, если $\text{Ric}_{\overline{g}}(N, N) \geq 0$ в каждой точке многообразия M , то из неравенства (11) получаем $\Delta_g u \leq 0$ и, следовательно, u — супергармоническая функция.

Обратим внимание, что определение параболичности допускает эквивалентную характеристику: полное многообразие (M, g) является параболическим, если любая положительная супергармоническая функция на (M, g) является постоянной; в противном случае оно считается непараболическим (см. [11, с. 164], [1]). В этом случае, если гиперповерхность (M, g) является параболическим полным римановым подмногообразием многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$ и существует положительная функция $u \in C^2(M)$, удовлетворяющая неравенству $L_g u \leq 0$, то u является постоянной и из (11) выводим, что $A_g = 0$ и $\text{Ric}_{\overline{g}}(N, N) = 0$ в каждой точке многообразия M . В этом случае (M, g) является вполне геодезическим подмногообразием многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$. Это приводит к следующей теореме.

Теорема 3. Пусть (M, g) — параболическое риманово многообразие, которое является устойчивой минимальной гиперповерхностью в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$, причем кривизна Риччи многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$ в направлении единичного нормального векторного поля N к (M, g) неотрицательна в каждой точке M . Если существует положительная функция $u \in C^2(M)$, удовлетворяющая неравенству $L_g u \leq 0$, где L_g — оператор устойчивости (или оператор Якоби) на (M, g) , и (M, g) параболично, то оно является вполне геодезическим подмногообразием в $(\overline{M}, \overline{g})$.

Замечание 4. Эта теорема дополняет следующий результат (см. [12, Теорема 1.1]): Пусть (M, g) — полная минимальная гиперповерхность в многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ с неотрицательной кривизной Риччи $\text{Ric}_{\overline{g}}$. Если гиперповерхность (M, g) является параболической, то она должна быть вполне геодезической в $(\overline{M}, \overline{g})$. Более того, кривизна Риччи $\text{Ric}_{\overline{g}}(N, N)$ многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$ в

нормальном направлении также равна нулю, и гиперповерхность (M, g) должна иметь неотрицательную скалярную кривизну. Это можно объяснить следующим образом: неотрицательность скалярной кривизны (M, g) следует из уравнения кривизны Гаусса в сочетании с предположением, что $(\overline{M}, \overline{g})$ имеет неотрицательную кривизну Риччи $\text{Ric}_{\overline{g}}$.

По теореме Ченга—Яу полное многообразие конечного объема является параболическим (см. [8]). Следовательно, полное риманово многообразие конечного объема не допускает непостоянных положительных супергармонических функций. Более того, если $0 < u \in C^2(M)$ и $\text{Ric}_{\overline{g}}(N, N) \geq 0$ в каждой точке многообразия M , то из (11) заключаем, что u должна быть постоянной, что подразумевает $A_g = 0$ и $\text{Ric}_{\overline{g}}(N, N) = 0$ в каждой точке M . В этом сценарии (M, g) является вполне геодезическим подмногообразием $(\overline{M}, \overline{g})$. Имея это в виду, можно сформулировать следующее утверждение.

Следствие 5. Пусть (M, g) — полное устойчивое риманово многообразие конечного объема, которое является минимальной гиперповерхностью в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$, причем что кривизна Риччи $(\overline{M}, \overline{g})$ в направлении единичного нормального векторного поля $\kappa(M, g)$ неотрицательна в каждой точке M . Если существует положительная функция $u \in C^2(M)$, удовлетворяющая неравенству $L_g u \leq 0$, где L_g — оператор устойчивости (или оператор Якоби) на (M, g) , то (M, g) — вполне геодезическое подмногообразие в $(\overline{M}, \overline{g})$.

Замечание 5. Подробности об устойчивости вполне геодезических подмногообразий можно найти в монографии [7, § 11.3].

Кроме того, обратим внимание на следующий элегантный результат Ченга и Яу (см. [8, Theorem 1, Corollary 1]): Если на полном римановом многообразии (M, g) объем V_R геодезического шара радиуса R с фиксированным центром удовлетворяет неравенству $V_R \leq CR^2$, то каждая отрицательная субгармоническая функция на (M, g) должна быть постоянной. По определению функция u называется субгармонической, если $-u$ является супергармонической (см. [11, с. 150]). Таким образом, если (M, g) — связная, полная, устойчивая минимальная гиперповерхность в $(\overline{M}, \overline{g})$, удовлетворяющая условию теоремы Ченга—Яу и критериям, указанным в предыдущей теореме, то из (11) следует, что $A_g = 0$ и, следовательно, (M, g) является вполне геодезической. В свете вышеизложенного можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть (M, g) — связная, полная, устойчивая минимальная гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$, причем кривизна Риччи многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$ в направлении единичного нормального векторного поля κ многообразию (M, g) неотрицательна в каждой точке M . Если объем V_R геодезического шара радиуса R с центром в фиксированной точке удовлетворяет неравенству $V_R \leq CR^2$ и существует положительная функция $u \in C^2(M, g)$, удовлетворяющая неравенству $L_g u \leq 0$, где L_g — оператор устойчивости (или оператор Якоби) на (M, g) , то (M, g) — вполне геодезическое подмногообразие в $(\overline{M}, \overline{g})$.

Основной результат работы [1] можно сформулировать следующим образом: Если на полном римановом многообразии (M, g) объем V_R геодезического шара радиуса R с центром в фиксированной точке удовлетворяет неравенству $V_R \leq e^{CR^2}$, то каждая неотрицательная супергармоническая функция в $L^1(M, g)$ является константой. В этом сценарии многообразие (M, g) является параболическим, поскольку определение параболичности допускает эквивалентную характеристику: многообразие (M, g) является параболическим, если любая положительная супергармоническая функция на (M, g) является константой; в противном случае оно считается непараболическим (см. [11, стр. 164]). Таким образом, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть (M, g) — связная, полная, устойчивая минимальная гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$, причем кривизна Риччи многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$ в направлении единичного нормального векторного поля κ многообразию (M, g) неотрицательна в каждой точке M . Предположим, что объем V_R геодезического шара радиуса R с фиксированным центром на (M, g) удовлетворяет неравенству $V_R \leq e^{CR^2}$. Если существует гладкая положительная функция $u \in L^1(M, g)$, удовлетворяющая неравенству $L_g u \leq 0$, где L_g — оператор устойчивости (или оператор Якоби) на (M, g) , то (M, g) — вполне геодезическое подмногообразие в $(\overline{M}, \overline{g})$.

Имеется обобщение понятия параболического многообразия, известное как стохастически полные многообразия. Любое параболическое многообразие является стохастически полным, но обратное не обязательно верно (см. [11, р. 172]). Рассмотрим минимальный винеровский процесс на (M, g) , т.е. диффузионный процесс, порожденный оператором Лапласа—Бельтрами Δ с условиями поглощения на бесконечности. Если вероятность поглощения на бесконечности за конечное время равна нулю, то многообразие (M, g) называется стохастически полным (см. [1, 11]). В заключение докажем следующую теорему.

Теорема 6. Пусть (M, g) — полное, устойчивое и стохастически полное риманово многообразие, которое является минимальной гиперповерхностью в римановом многообразии $(\bar{M}, \bar{g})$, причем кривизна Риччи многообразия $(\bar{M}, \bar{g})$ в направлении единичного нормального векторного поля к многообразию (M, g) неотрицательна в каждой точке M . Если существует гладкая положительная функция $u \in L^p(M, g)$, $0 < p \leq 1$, удовлетворяющая неравенству $L_g u \leq 0$, где L_g — оператор устойчивости (или оператор Якоби) на (M, g) , то (M, g) является вполне геодезическим подмногообразием многообразия $(\bar{M}, \bar{g})$.

Доказательство. Хорошо известно, что если (M, g) — стохастически полное многообразие, то каждая положительная супергармоническая функция $u \in L^1(M, g)$ является постоянной (см. [1]). Следовательно, если гиперповерхность (M, g) — стохастически полное риманово многообразие и кривизна Риччи многообразия $(\bar{M}, \bar{g})$ в направлении единичного нормального векторного поля к многообразию (M, g) неотрицательна в каждой точке M , то из (11) следует, что для каждой гладкой положительной функции $u \in L^1(M, g)$ имеем $A_g = 0$, и, следовательно, (M, g) — вполне геодезическое многообразие.

Напомним, что Яу установил следующий результат (см. [20]): Пусть u — гладкая функция, определенная на полном римановом многообразии (M, g) , причем $u \geq 0$ и $(p-1)u\Delta_g u \geq 0$, где p — положительное число. Тогда для $p \neq 1$ либо

$$\int_M u^p dv_g = \infty,$$

либо u является константой. Следовательно, для случая, когда $0 < u \in L^p(M, g)$ по крайней мере для одного $0 < p < 1$ и кривизна Риччи многообразия $(\bar{M}, \bar{g})$ в направлении единичного нормального векторного поля к многообразию (M, g) неотрицательна в каждой точке M , из уравнения (11) на основании теоремы Яу получаем, что $A_g = 0$ и, следовательно, (M, g) является вполне геодезической. Доказательство завершено. $\square$

Замечание 6. Если (M, g) — полное некомпактное риманово многообразие с неотрицательной кривизной Риччи, то (M, g) имеет бесконечный объем (см. [19]). В то же время, если объем полного и стохастически полного риманова многообразия (M, g) бесконечен, то не существует положительных супергармонических функций $u \in L^1(M)$ (см. [1]). Следовательно, если полное некомпактное и стохастически полное риманово многообразие (M, g) имеет неотрицательную кривизну Риччи Ric_g , то не может существовать положительной функции $u \in L^1(M, g)$, которая удовлетворяла бы неравенству (11) с $\text{Ric}_{\bar{g}}(N, N) \geq 0$ в каждой точке x множества M .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьян А. А. Стохастически полные многообразия и суммируемые гармонические функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — 52, № 5. — С. 1102–1108.
2. Степанов С. Е., Цыганок И. И. Поточечное ортогональное расщепление пространства ТТ-тензоров // Диффер. геом. многообр. фигур. — 2023. — 54, № 2. — С. 45–53.
3. Besse A. Einstein Manifolds. — Berlin: Springer, 1987.
4. Carlotto A. The general relativistic constraint equations // Living Rev. Relativ. — 2021. — 24. — 2.
5. do Carmo M. P., Chern S. S., Kobayashi S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length // in: Functional Analysis and Related Fields (Browder F. E., ed.). — Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag, 1970. — P. 59–75.

6. *Catino G., Mastrolia P., Roncoroni A.* Two rigidity results for stable minimal hypersurfaces// *Geom. Funct. Anal.* — 2024. — 34. — P. 1–18.
7. *Chen B.-Y.* Riemannian submanifolds// in: *Handbook of Differential Geometry. Vol. 1 (Dillen F. J. E., Verstraeten L. C. A., eds.)*. — Amsterdam: North Holland, 2000. — P. 187–418.
8. *Cheng S. Y., Yau S.-T.* Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications// *Commun. Pure Appl. Math.* — 1975. — 28, № 3. — P. 333–354.
9. *Eisenhart L. P.* Symmetric tensor of the second order whose first covariant derivatives are zero// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1923. — 25, № 2. — P. 297–306.
10. *Fu H.-P., Xu G.-B., Tao Y.-Q.* Some remarks on Riemannian manifolds with parallel Cotton tensor// *Kodai Math. J.* — 2019. — 42, № 1. — P. 64–74.
11. *Grigor'yan A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds// *Bull. Am. Math. Soc.* — 1999. — 36, № 2. — P. 135–249.
12. *Li P., Wang J.* Stable minimal hypersurfaces in a non-negatively curved manifold// *J. Reine Angew. Math.* — 2004. — 566. — P. 215–230.
13. *Mikeš J., Stepanov S.* What is the Bochner technique and where is it applied// *Lobachevskii J. Math.* — 2022. — 43, № 4. — P. 709–719.
14. *Petersen P.* Riemannian Geometry. — Cham: Springer, 2016.
15. *Pierzchalski A.* Gradients: The ellipticity and the elliptic boundary conditions — a jigsaw puzzle// *Folia Math.* — 2017. — 19, № 1. — P. 65–83.
16. *Pigola S., Rigoli M., Setti A. G.* Vanishing and Finiteness Results in Geometric Analysis. A Generalization of the Bochner Technique. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2008.
17. *Shandra I. G., Stepanov S. E., Mikeš J.* On higher-order Codazzi tensors on complete Riemannian manifolds// *Ann. Glob. Anal. Geom.* — 2019. — 56. — P. 429–442.
18. *Simons J.* Minimal varieties in Riemannian manifolds// *Ann. Math.* — 1968. — 88, № 1. — P. 62–105.
19. *Yau S.-T.* Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry// *Indiana Univ. Math. J.* — 1976. — 25, № 7. — P. 659–670.
20. *Yau S.-T.* Erratum: Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry// *Indiana Univ. Math. J.* — 1982. — 31, № 4. — P. 607–607.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Степанов Сергей Евгеньевич (Stepanov Sergey Evgenievich)

Всероссийский институт научной и технической информации

Российской академии наук, Москва

(Russian Institute for Scientific and Technical Information

of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia);

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва

(Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia)

E-mail: s.e.stepanov@mail.ru

Цыганок Ирина Ивановна (Tsyganok Irina Ivanovna)

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва

(Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia)

E-mail: i.i.tsyganok@mail.ru