



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 236 (2024). С. 72–88
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-236-72-88

УДК 517.9; 531.01

ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ. I. СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2024 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Представлены примеры интегрируемых однородных по части переменных динамических систем третьего порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к двумерному многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, первый интеграл с существенно особыми точками, инвариантная дифференциальная форма.

INVARIANTS OF HOMOGENEOUS DYNAMIC SYSTEMS OF ARBITRARY ODD ORDER WITH DISSIPATION. I. THIRD-ORDER SYSTEMS

© 2024 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. In this paper, we present new examples of integrable dynamical systems of the third order that are homogeneous in part of the variables. In these systems, subsystems on the tangent bundles of two-dimensional manifolds can be distinguished. In the cases considered, the force field is partitioned into an internal (conservative) part and an external part. The external force introduced by a certain unimodular transformation has alternate dissipation; it is a generalization of fields examined earlier. Complete sets of first integrals and invariant differential forms are presented.

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, dissipation, first integral with essential singular points, invariant differential form.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

1. Примеры интегрирования систем третьего порядка	73
1.1. Введение	73
1.2. Некоторые примеры из плоскопараллельной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой	74
1.3. Системы при отсутствии внешнего поля сил	77
1.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов	80
1.5. Системы со знакопеременной диссипацией	80
Список литературы	84

1. ПРИМЕРЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

1.1. Введение. Как известно (см. [14, 15, 83], нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов) облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью.

Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для таких систем коэффициенты искомых инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [1, 25, 81]).

Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m - 1$ независимых тензорных инвариантов. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с малым числом степеней свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались в работах автора [26, 37, 68]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем. При этом в указанных работах акцент был сделан на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полный набор первых интегралов для систем не существует, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Для систем классической механики понятия «консервативность», «силовое поле», «диссипация» и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ «в целом» начинается с исследования приведенных уравнений геодезических, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые подставляются в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать «силовые поля». Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (квазискоростей) касательного пространства, получим силовое поле с диссипацией разного знака (в зависимости от знака самого коэффициента).

Хотя словосочетание «диссипация разного знака» несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять, учитывая при этом, что в математической физике диссипация «со знаком «плюс» — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация «со знаком «минус» — это своеобразная «подкачка» энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии, называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии, — разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов; это говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же такие множества имеются, то будем говорить, что система в той или иной области фазового пространства обладает диссипацией определенного знака. Следствием этого является тот факт, что система обладает хотя бы одним первым интегралом с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннюю и внешнюю части. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы, тогда как внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела (см. [8, 9, 19]).

В данном разделе 1 приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем третьего порядка, в которых может быть выделена система с одной степенью свободы на своем двумерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает так называемой знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

1.2. Некоторые примеры из плоскопараллельной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой. Рассмотрим плоскопараллельное движение симметричного твердого тела с передним плоским торцом (одномерной пластиной) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности (см. [8, 19]). Если (v, α) — полярные координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр пластины), Ω — значение его угловой скорости, I , m — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина; см. [8, 19]), при котором касательные силы воздействия среды на пластину отсутствуют, примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 &= \frac{F_x}{m}, \\ \dot{v} \sin \alpha + \dot{\alpha} v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega} &= 0, \\ I \dot{\Omega} &= y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

где $F_x = -S$, $S = s(\alpha)v^2$, $\sigma > 0$, $v > 0$. Первые два уравнения (1.2.1) описывают движение центра масс на двумерной евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$ в проекциях на систему координат Dx_1x_2 , связанную с телом. При этом Dx_1 — срединный перпендикуляр к пластине, проходящий через центр масс C симметричного тела, а Dx_2 — ось, выбранная вдоль пластины. Третье же уравнение (1.2.1) получено из теоремы об изменении кинетического момента.

Таким образом, фазовым пространством системы (1.2.1) третьего порядка является прямое произведение $\mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathfrak{so}(2)$ части двумерного цилиндра на алгебру Ли $\mathfrak{so}(2)$.

Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс, см. также [35, 40, 43])

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const}, \quad (1.2.2)$$

то в системе (1.2.1) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T - s(\alpha)v^2 \equiv 0$, $\sigma = DC$. Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (1.2.3)$$

Случай (1.2.3) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы второго порядка после некоторого преобразования системы

третьего порядка (1.2.1). Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T :

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = \tau_1 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 + \tau_2 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega v + \tau_3 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega^2 = T_1 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2.$$

Систему (1.2.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} + \sigma \Omega^2 \cos \alpha - \sigma \sin \alpha \left[\frac{v^2}{I} y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right] &= \frac{1}{m} \left[T_1 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha) v^2 \right] \cos \alpha, \\ \dot{\alpha} v + \Omega v - \sigma \cos \alpha \left[\frac{v^2}{I} y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right] - \sigma \Omega^2 \sin \alpha &= \frac{1}{m} \left[s(\alpha) v^2 - T_1 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 \right] \sin \alpha, \\ \dot{\Omega} &= \frac{v^2}{I} y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Введя далее новые фазовую переменную и дифференцирование по формулам

$$\Omega = n_1 v \omega, \quad \langle \rangle = n_1 v \langle' \rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \text{const},$$

приведем систему (1.2.4) к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \omega), \quad (1.2.5)$$

$$\alpha' = -\omega + \sigma n_1 \omega^2 \sin \alpha + \left[\frac{\sigma}{I n_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \cos \alpha - \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha, \quad (1.2.6)$$

$$\begin{aligned} \omega' &= \frac{1}{I n_1^2} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) - \omega \left[\frac{\sigma}{I n_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \sin \alpha + \\ &\quad + \sigma n_1 \omega^3 \cos \alpha - \omega \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma n_1 \omega^2 \cos \alpha + \left[\frac{\sigma}{I n_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \sin \alpha + \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha. \quad (1.2.8)$$

Видно, что в системе третьего порядка (1.2.5), (1.2.7) может быть выделена независимая подсистема второго порядка (1.2.7), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем двумерном фазовом цилиндре. В частности, при выполнении условия (1.2.3) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы второго порядка также возможен.

Система (1.2.5), (1.2.7) содержит динамические уравнения движения твердого тела. При отсутствии силового поля (формально при $s(\alpha) \equiv T_1(\alpha, n_1 \omega) \equiv 0$) она примет вид

$$v' = v \Psi(\alpha, \omega), \quad \Psi(\alpha, \omega) = -\sigma n_1 \omega^2 \cos \alpha, \quad (1.2.9)$$

$$\alpha' = -\omega + \sigma n_1 \omega^2 \sin \alpha, \quad \omega' = -\omega \Psi(\alpha, \omega). \quad (1.2.10)$$

1.2.1. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [8, 19]) динамические функции s и y_N примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) = y_0(\alpha) = A \sin \alpha, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0, \quad (1.2.11)$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от угла α). Тогда благодаря условиям (1.2.2), (1.2.11) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.2.5), (1.2.7)) примет вид аналитической системы

$$v' = v \Psi(\alpha, \omega), \quad (1.2.12)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b \omega^2 \sin \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha - b \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b \omega^3 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -b \omega^2 \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Безразмерный параметр b и постоянную n_1 выберем следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/I$, $n_1 = n_0$.

Итак, система (1.2.12), (1.2.13) может быть рассмотрена на части фазового трехмерного цилиндра $W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$.

Теорема 1.1 (см. [10, 82]). Система (1.2.12), (1.2.13) обладает полным набором первых интегралов (один из которых является аналитической функцией, а второй — трансцендентной функцией фазовых переменных), выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Здесь необходимо привести важное замечание. Дело в том, что с точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы.

1.2.2. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости. Дальнейший пример посвящен случаю движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости. Поэтому введем такую зависимость. Отметим, что данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для трехмерных, и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на одномерную пластину, $Q = (Q_1, Q_2)$ — компоненты силы $\mathbf{S}$ воздействия среды, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}) = (x_N, y_N)$ от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно (см. [8]).

Итак, примем следующую зависимость: $x = Q + R$, где $R = (R_1, R_2)$ — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции R от угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \quad (1.2.14)$$

Здесь (h_1, h_2) — некоторые положительные параметры (см. [8]). Применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, имеем $x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1\Omega/v$.

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [8, 19]) допустим равенство $Q_2 = A \sin \alpha$, $A > 0$, а динамические функции s и y_N примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) = A \sin \alpha - h \frac{\Omega}{v}, \quad A, B, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \quad (1.2.15)$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости).

Тогда, благодаря условиям (1.2.2), (1.2.15) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.2.5), (1.2.7)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (1.2.16)$$

$$\alpha' = -\omega + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b\omega^2 \sin \alpha - bH_1\omega \cos^2 \alpha, \quad (1.2.17)$$

$$\omega' = \sin \alpha \cos \alpha - b\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b\omega^3 \cos \alpha + bH_1\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1\omega \cos \alpha,$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -b\omega^2 \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha - bH_1\omega \sin \alpha \cos \alpha.$$

Безразмерные параметры b , H_1 и постоянную n_1 выберем следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/I$, $H_1 = Bh/In_0$, $n_1 = n_0$.

Итак, система (1.2.16), (1.2.17) также может быть рассмотрена на части фазового трехмерного цилиндра $W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$.

Теорема 1.2. Система (1.2.16), (1.2.17) обладает полным набором первых интегралов (один из которых является аналитической функцией, а второй — трансцендентной функцией фазовых переменных), выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Здесь необходимо повторить важное замечание. С точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы, хотя рассматриваемые первые интегралы являются действительными функциями.

1.3. Системы при отсутствии внешнего поля сил. Проиллюстрируем предлагаемый в работе подход на примере систем третьего порядка. Пусть v, α, z — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= a(\alpha)v^2 + b(\alpha)vz + c(\alpha)z^2, \\ \dot{z} &= d(\alpha)v^2 + e(\alpha)vz + f(\alpha)z^2, \\ v\dot{\alpha} &= g(\alpha)v^2 + h(\alpha)vz + i(\alpha)z^2. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Тогда, выбирая новую независимую переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = \langle' \rangle$, $v \neq 0$), а также новую фазовую переменную Z ($z = Zv$), перепишем систему (1.3.1) в следующем виде:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2, \quad (1.3.2)$$

$$x\alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, \quad Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z); \quad (1.3.3)$$

при этом уравнение (1.3.2) на v отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы (1.3.3) с одной степенью свободы на двумерном фазовом многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$.

Особняком стоит случай некоторой *усеченной* системы, когда выполнены тождества

$$d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0.$$

Тогда система (1.3.2), (1.3.3) имеет естественный аналитический первый интеграл

$$z = vZ = \text{const}. \quad (1.3.4)$$

Для точной интегрируемости усеченной системы (1.3.2), (1.3.3) нужно найти еще один первый интеграл, независимый с (1.3.4).

В данном разделе мы ограничимся следующим важным частным случаем системы (1.3.2), (1.3.3) третьего порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0Z^2\tilde{\Delta}(\alpha)f_1(\alpha), \quad \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_1(\alpha)}, \quad (1.3.5)$$

$$\alpha' = f_1(\alpha)Z + b_0Z^2\delta(\alpha), \quad Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \quad (1.3.6)$$

$b_0 \geq 0$ — параметр, $f_1(\alpha)$, $\delta(\alpha)$ — некоторые гладкие функции. Будем рассматривать систему (1.3.5), (1.3.6) как систему *при отсутствии внешнего поля сил*.

Система (1.3.5), (1.3.6) имеет более общий вид, чем система (1.2.9), (1.2.10), взятая из динамики твердого тела. В частности, они совпадают при $Z = \omega$, $b_0 = \sigma n_1$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $f_1(\alpha) \equiv -1$.

1.3.1. Полный набор гладких первых интегралов.

Предложение 1.1. Система (1.3.5), (1.3.6) имеет два гладких (автономных) первых интеграла

$$\begin{aligned} \Phi_0(v; Z; \alpha) &= v^2(1 + 2b_0Z\Delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}, \\ \Phi_1(v; Z) &= vZ = C_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

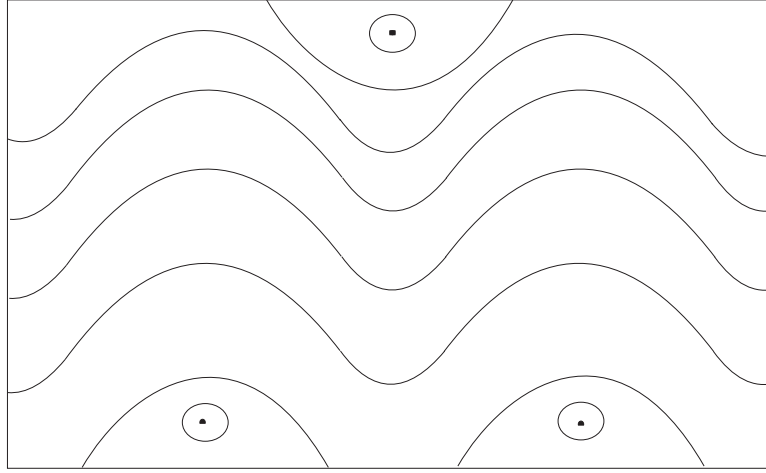


Рис. 1. Поле направлений для фазового портрета системы (1.3.9).

Доказательство. Чтобы убедиться в верности предложения 1.1, достаточно продифференцировать функции Φ_0 и Φ_1 в силу системы (1.3.5), (1.3.6). $\square$

Другими словами, независимая подсистема (1.3.6) на многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$ имеет рациональный (см. [13, 16]) по Z (автономный) первый интеграл вида

$$\Phi(Z; \alpha) = \frac{1 + 2b_0 Z \Delta(\alpha)}{Z^2} = C = \text{const}, \quad (1.3.8)$$

который не имеет существенно особых точек. В силу этого подсистема (1.3.6) также не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака. Таким образом, внутреннее гладкое силовое поле (зависящее от параметра $b_0 > 0$) в системе (1.3.5), (1.3.6) не нарушает консервативности системы.

1.3.2. Некоторые фазовые портреты. 1. Приведем фазовый портрет системы (1.3.6), для начала слегка преобразовав ее. Правая часть обращается в нуль при $Z = 0$. Таким образом, вся ось абсцисс $\{(\alpha, Z) \in \mathbb{R}^2 : Z = 0\}$ состоит из неизолированных положений равновесия системы (1.3.6).

Несколько изменим правую часть за счет ее сокращения на величину Z (изменив тем самым скорость движения вдоль фазовых траекторий). Таким образом, фазовые характеристики остались на своем месте, при этом ось абсцисс перестала быть «сотканной» из неизолированных положений равновесия. Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = f_1(\alpha) + b_0 Z \delta(\alpha), \quad Z' = b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha) f_1(\alpha). \quad (1.3.9)$$

Для функций $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $f_1(\alpha) \equiv -1$ поле направлений для фазового портрета системы (1.3.9) представлено на рис. 1. Здесь по горизонтали изменяется переменная α , а по вертикали — переменная Z .

1.3.3. Инвариантные дифференциальные формы. Зададимся вопросом поиска инвариантных дифференциальных форм (для начала фазового объема) для интегрируемости системы (1.3.5), (1.3.6).

Может показаться излишним нахождение инвариантных дифференциальных форм после нахождения полного набора (а именно, двух) первых интегралов рассматриваемой системы, поскольку она уже интегрируема в квадратурах (точно интегрируема). Но, как известно (см. [2, 14]), не всегда можно найти полный набор первых интегралов, а полный набор инвариантных дифференциальных форм фазового объема может быть найден независимо от первых интегралов, что

также будет свидетельствовать о точной интегрируемости системы. Другое дело, что из полного набора функционально независимых дифференциальных форм фазового объема можно будет получить некоторые первые интегралы.

Для начала сделаем вспомогательную замену независимого переменного t на τ по формуле $d/dt = f_1(\alpha)d/d\tau$ и будем по-прежнему штрихом обозначать производную по τ . Система (1.3.5), (1.3.6) примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha), \quad (1.3.10)$$

$$\alpha' = Z + b_0 Z^2 \Delta(\alpha), \quad Z' = -Z\Psi(\alpha, Z). \quad (1.3.11)$$

Для поиска функции $\rho(v; \alpha, Z)$, которая определяет искомую инвариантную внешнюю дифференциальную форму

$$\rho(v; \alpha, Z)dv \wedge d\alpha \wedge dZ, \quad (1.3.12)$$

подсчитаем дивергенцию векторного поля $w(v; \alpha, Z)$ системы (1.3.10), (1.3.11) в евклидовых координатах:

$$\operatorname{div} w(v; \alpha, Z) = 3b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha).$$

Тогда составная система уравнений характеристик для поиска решения линейного уравнения

$$\operatorname{div} [\rho(v; \alpha, Z)w(v; \alpha, Z)] = 0 \quad (1.3.13)$$

в частных производных будет состоять из системы (1.3.10), (1.3.11) и следующего добавочного уравнения:

$$\rho' = -3b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha)\rho. \quad (1.3.14)$$

Как отмечалось, система (1.3.5), (1.3.6) (а поэтому и (1.3.10), (1.3.11)) имеет два гладких первых интеграла (1.3.7). Для получения дополнительного первого интеграла составной системы уравнений характеристик нетрудно получить следующее соотношение:

$$\frac{d\rho}{dZ} = \frac{-3\rho}{Z}, \quad (1.3.15)$$

что немедленно дает необходимый первый интеграл:

$$\Phi_\rho(\rho; Z) = \rho Z^3 = C_\rho = \operatorname{const}. \quad (1.3.16)$$

Теперь нетрудно найти общее решение уравнения (1.3.13):

$$\rho = \frac{\mathcal{F}_0[\Phi_0, \Phi_1]}{Z^3}, \quad (1.3.17)$$

и убедиться, что функции

$$\rho_1(Z) = \frac{1}{Z^3}, \quad \rho_2(v) = v^3 \quad (1.3.18)$$

являются примерами функции $\rho(v; \alpha, Z)$, определяющей инвариантную внешнюю дифференциальную форму фазового объема (1.3.12) для системы (1.3.10), (1.3.11). Здесь $\mathcal{F}_0[\Phi_0, \Phi_1]$ — произвольная гладкая функция двух аргументов, при этом Φ_0, Φ_1 — два независимых первых интеграла (1.3.7).

Заметим, что все найденные в разделе 1.3.3 инвариантные внешние дифференциальные формы для систем (1.3.10), (1.3.11) позволяют выписать соответствующие дифференциальные формы и для систем (1.3.5), (1.3.6). Для этого все найденные формы нужно поделить на $f_1(\alpha)$ (т.е. вернуться к старой независимой переменной t).

1.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов. Теперь переходим к некоторому усложнению, добавляя следующим образом в систему (1.3.10), (1.3.11) (лишь в уравнение на Z') внешнее гладкое силовое поле $F(\alpha)$ при наличии внутреннего ($b_0 > 0$):

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha), \quad (1.4.1)$$

$$\alpha' = Z + b_0 Z^2 \Delta(\alpha), \quad Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z). \quad (1.4.2)$$

Может создаться впечатление, что система осталась консервативной (это действительно имеет место при $b_0 = 0$, т.е. при отсутствии внутреннего поля); консервативность подтвердилась бы наличием в системе двух гладких (автономных) первых интегралов.

Действительно, при некотором естественном условии у системы (1.4.1), (1.4.2) существует гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 - F_1(\alpha)) = C_1 = \text{const}, \quad \frac{dF_1(\alpha)}{d\alpha} = 2F(\alpha), \quad (1.4.3)$$

структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого (во всем фазовом пространстве) первого интеграла система (1.4.1), (1.4.2), вообще говоря, не имеет. Более того, если, в частности, $F(\alpha) = \Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, то дополнительный интеграл является трансцендентной функцией фазовых переменных (т.е. имеет существенно особые точки, означающие наличие в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств; см. предложение 1.2, а также [23, 27]).

Предложение 1.2. Если $F(\alpha) = \Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, то система (1.4.1), (1.4.2) имеет два независимых первых интеграла (один, вообще говоря, трансцендентный и один гладкий):

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2 \left(1 + b_0 Z \Delta(\alpha) + \frac{b_0}{2} (Z^2 - \Delta^2(\alpha)) \ln \left| \frac{Z + \Delta(\alpha)}{Z - \Delta(\alpha)} \right| \right) = C_0 = \text{const}, \quad (1.4.4)$$

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 - \Delta^2(\alpha)) = C_1 = \text{const}. \quad (1.4.5)$$

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости предложения 1.2, достаточно продифференцировать функции (1.4.4) и (1.4.5) в силу системы (1.4.1), (1.4.2) при условии $F(\alpha) = \Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$. $\square$

Более того, из вида первого интеграла (1.4.4) ясно, что притягивающие и отталкивающие предельные множества системы (1.4.1), (1.4.2) могут быть найдены из системы недифференциальных равенств $Z = 0$, $\Delta(\alpha) = 0$. В данном случае первый интеграл (1.4.5) является частным случаем интеграла (1.4.3).

1.5. Системы со знакопеременной диссипацией. Модифицируем далее систему (1.4.1), (1.4.2), где будут присутствовать уже два ключевых параметра $b_0 \geq 0$, $b_1 \neq 0$, введя внешнее гладкое силовое поле. Таким образом, будем рассматривать следующую систему:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha) \Delta(\alpha), \quad (1.5.1)$$

$$\alpha' = Z + b_0 Z^2 \Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha) \bar{f}(\alpha), \quad \bar{f}(\alpha) = \frac{\mu - \Delta^2(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)}, \quad (1.5.2)$$

$$Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \quad (1.5.3)$$

где $\mu > 0$. При этом коэффициенты консервативной составляющей (внутреннего) силового поля содержат параметр b_0 , а неконсервативной составляющей (внешнего) поля — параметр b_1 .

Напомним, что система (1.5.1), (1.5.2) фактически является «образом» следующей системы при замене $d/dt = f_1(\alpha)d/d\tau$ независимой переменной:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha) f_1(\alpha) + b_1 F(\alpha) \delta(\alpha), \quad (1.5.4)$$

$$\alpha' = f_1(\alpha)Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha) + b_1 F(\alpha) \bar{f}(\alpha) f_1(\alpha), \quad (1.5.5)$$

$$Z' = F(\alpha) f_1(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z). \quad (1.5.6)$$

Выше мы ввели подобное поле (см. раздел 1.4), добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z' системы (1.4.1), (1.4.2), и убедились, что полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность наблюдается при дополнительном условии $b_0 = 0$ (отсутствие внутреннего силового поля).

Будем рассматривать одновременное присутствие двух силовых полей в системе, положив $b_0 > 0$, $b_1 \neq 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча $\mathbb{R}_+^1\{v\}$ и касательного расслоения $TM^1\{Z; \alpha\}$ приняла вид (1.5.1), (1.5.2). Как будет видно далее, только что было введено составное силовое поле со знакопеременной диссипацией (или с диссипацией переменного знака) с помощью некоторого *унимодулярного преобразования*.

Система (1.5.4), (1.5.5) имеет более общий вид, чем система (1.2.12), (1.2.13), взятая из динамики твердого тела, и, в частности, при $Z = \omega$, $b_0 = -b_1 = b$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $F(\alpha) = -\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, $f_1(\alpha) \equiv -1$ они совпадают.

1.5.1. Первые интегралы и инвариантные дифференциальные формы.

Теорема 1.3. *Если выполнено условие $F(\alpha) = \lambda\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то система (1.5.1), (1.5.2) обладает полным набором из двух независимых первых интегралов: одного гладкого и одного, вообще говоря, трансцендентного, т.е. имеющего существенно особые точки. Кроме того, она обладает двумя инвариантными внешними дифференциальными формами, независимыми между собой, но зависимыми с первыми интегралами.*

Доказательство. Действительно, пусть выполнено условие $F(\alpha) = \lambda\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$; тогда

$$F(\alpha)\bar{f}(\alpha) = \lambda\Delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha)), \quad \frac{d}{d\alpha} [F(\alpha)\bar{f}(\alpha)] = \lambda\tilde{\Delta}(\alpha)(\mu - 3\Delta^2(\alpha)).$$

Напомним, что в процессе исследования системы (1.3.5), (1.3.6) (при переходе к системе (1.3.10), (1.3.11)) была сделана замена независимой переменной: $d/dt = f_1(\alpha)d/d\tau$. Это значит, что инвариантные внешние дифференциальные формы (1.3.12) (например, $\rho_1(Z) = 1/Z^3$, $\rho_2(v) = v^3$), найденные для системы (1.3.10), (1.3.11), позволяют выписать инвариантные дифференциальные формы, например,

$$\rho_1(\alpha, Z) = \frac{1}{f_1(\alpha)Z^3}, \quad \rho_2(v; \alpha) = \frac{v^3}{f_1(\alpha)} \quad (1.5.7)$$

для системы (1.3.5), (1.3.6).

Более того, вычисление с некоторым множителем $\rho(v; \alpha, Z)$ дивергенции векторного поля $W_1(v; \alpha, Z)$ первоначальной системы есть не что иное, как вычисление дивергенции векторного поля $\rho(v; \alpha, Z)W_1(v; \alpha, Z)$ преобразованной системы после замены $\rho(v; \alpha, Z)d/dt = d/d\tau$ независимой переменной t в первоначальной системе.

Используем для вычисления дивергенции векторного поля $w_1(v; \alpha, Z)$ системы (1.5.1), (1.5.2) со знакопеременной диссипацией функцию $\rho_2(v) = v^3$ (полученную ранее для системы (1.3.10), (1.3.11) без внешнего поля сил). Имеем:

$$\operatorname{div} [v^3 w_1(v; \alpha, Z)] = v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha).$$

Тогда составная система уравнений характеристик для поиска решения линейного уравнения

$$\operatorname{div} [\rho(v; \alpha, Z) w_1(v; \alpha, Z)] = 0 \quad (1.5.8)$$

в частных производных будет состоять из системы (1.5.1), (1.5.2) (правая часть которой умножена на функцию $\rho_2(v) = v^3$) и следующего добавочного уравнения:

$$\rho' = -v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha) \rho. \quad (1.5.9)$$

Системе (1.5.1), (1.5.2) можно поставить в соответствие уравнения

$$\frac{dZ}{d\alpha} = \frac{\lambda\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_0 Z^3 \tilde{\Delta}(\alpha) - b_1 \lambda Z \Delta^2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha)}{Z + b_0 Z^2 \Delta(\alpha) + b_1 \lambda \Delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha))}$$

или

$$\frac{dZ}{d\Delta} = \frac{\lambda\Delta + b_0Z^3 - b_1\lambda Z\Delta^2}{Z + b_0Z^2\Delta + b_1\lambda\Delta(\mu - \Delta^2)}, \quad (1.5.10)$$

а также

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{-b_1\lambda\mu\tilde{\Delta}(\alpha)\rho}{Z + b_0Z^2\Delta(\alpha) + b_1\lambda\Delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha))},$$

или

$$\frac{d\rho}{d\Delta} = \frac{-b_1\lambda\mu\rho}{Z + b_0Z^2\Delta + b_1\lambda\Delta(\mu - \Delta^2)}. \quad (1.5.11)$$

Введя новую однородную переменную u , $Z = u\Delta$, уравнениям (1.5.10), (1.5.11) можно поставить в соответствие следующие соотношения: сначала

$$\Delta \frac{du}{d\Delta} + u = \frac{\lambda + b_0u^3\Delta^2 - b_1\lambda u\Delta^2}{u + b_0u^2\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)},$$

а затем

$$\begin{aligned} \Delta \frac{du}{d\Delta} &= \frac{\lambda - b_1\lambda\mu u - u^2}{u + b_0u^2\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \\ \Delta \frac{d\rho}{d\Delta} &= \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{u + b_0u^2\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}. \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

Первое уравнение из (1.5.12) (приводящееся к линейному неоднородному) позволяет выписать первый интеграл (вообще говоря, с существенно особыми точками) независимой системы (1.5.2) (а значит, и для независимой системы (1.5.5)). Действительно, справедливо следующее уравнение Бернулли:

$$\frac{d\Delta}{du} = \frac{(u + b_1\lambda\mu)\Delta + (b_0u^2 - b_1\lambda)\Delta^3}{\lambda - b_1\lambda\mu u - u^2}, \quad (1.5.13)$$

которое заменой $p = 1/\Delta^2$ приводится к линейному неоднородному:

$$\frac{dp}{du} = \frac{2(u + b_1\lambda\mu)p + 2(b_0u^2 - b_1\lambda)}{u^2 + b_1\lambda\mu u - \lambda}. \quad (1.5.14)$$

Последнее уравнение имеет линейный по p первый интеграл (вообще говоря, с существенно особыми точками) следующего вида:

$$\begin{aligned} p\Psi_0(u) - \int \varphi(u)\Psi_0(u)du &= C = \text{const}, \\ \Psi_0(u) &= \exp\left\{-\int \frac{2(u + b_1\lambda\mu)du}{u^2 + b_1\lambda\mu u - \lambda}\right\}, \quad \varphi(u) = \frac{2(b_0u^2 - b_1\lambda)}{u^2 + b_1\lambda\mu u - \lambda}. \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

Тогда полученный первый интеграл независимой системы (1.5.2) в первоначальных переменных имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_1(Z; \alpha) = G\left(\Delta(\alpha), \frac{Z}{\Delta(\alpha)}\right) = C_1 = \text{const}. \quad (1.5.16)$$

У системы (1.5.1), (1.5.2) имеется также гладкий первый интеграл следующего вида (для простоты при $b_0 = -b_1$):

$$\Theta_0(v; Z; \alpha) = v^2 (1 + 2b_0Z\Delta(\alpha) - b_0^2\mu Z^2) = C_0 = \text{const}. \quad (1.5.17)$$

Второе уравнение из (1.5.12), в свою очередь, позволяет получить функцию $\rho(v; \alpha, Z)$, которая определяет инвариантную дифференциальную форму объема. Действительно, из уравнений (1.5.12) следует, что справедливо соотношение

$$\frac{d\rho}{du} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{\lambda - b_1\lambda\mu u - u^2}, \quad (1.5.18)$$

откуда получаем еще одно инвариантное соотношение:

$$\rho \cdot \exp\left\{b_1\lambda\mu \int \frac{du}{\lambda - b_1\lambda\mu u - u^2}\right\} = C_\rho = \text{const}. \quad (1.5.19)$$

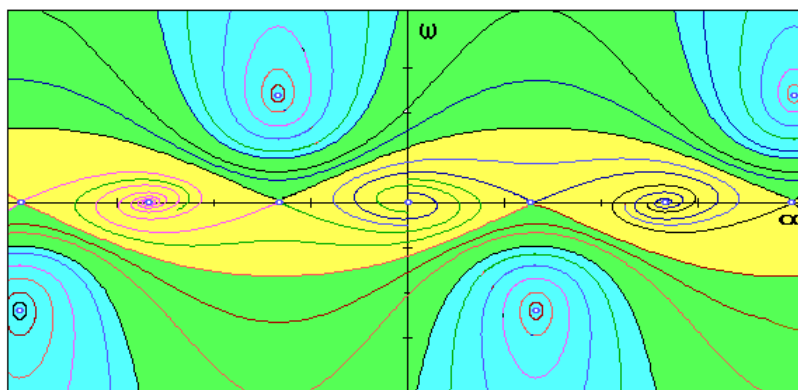


Рис. 2. Относительно грубый портрет системы со знакопеременной диссипацией.

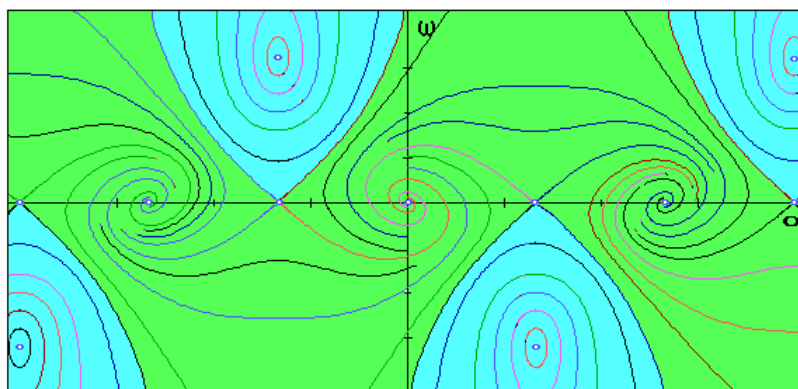


Рис. 3. Относительно негрубый портрет системы со знакопеременной диссипацией.

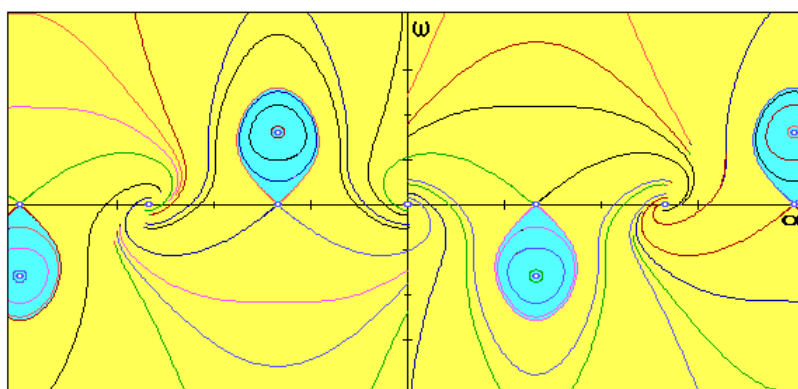


Рис. 4. Относительно грубый портрет системы со знакопеременной диссипацией.

Таким образом, общее решение линейного уравнения (1.5.8) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du}{\lambda - b_1 \lambda \mu u - u^2} \right\} \cdot \mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1], \quad (1.5.20)$$

где $\mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1]$ — произвольная гладкая функция двух аргументов; при этом Θ_0, Θ_1 — два первых интеграла (1.5.17), (1.5.16) соответственно.

В частности, в качестве двух функционально независимых решений линейного уравнения (1.5.8) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_1(v; Z; \alpha) = \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du}{\lambda - b_1 \lambda \mu u - u^2} \right\} \cdot \Theta_0(v; Z; \alpha), \quad (1.5.21)$$

$$\rho_2(Z; \alpha) = \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du}{\lambda - b_1 \lambda \mu u - u^2} \right\} \cdot \Theta_1(Z; \alpha), \quad (1.5.22)$$

где $u = Z/\Delta(\alpha)$. Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема для системы (1.5.1), (1.5.2) является следующая форма:

$$\rho(v; \alpha, Z) dv \wedge d\alpha \wedge dZ = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du}{\lambda - b_1 \lambda \mu u - u^2} \right\} dv \wedge d\alpha \wedge dZ, \quad u = \frac{Z}{\Delta(\alpha)}. \quad \square$$

Заметим, что все найденные в разделе 1.5.1 инвариантные внешние дифференциальные формы для систем (1.5.1), (1.5.2) позволяют выписать соответствующие дифференциальные формы и для систем (1.5.4), (1.5.5). Для этого все найденные формы надо поделить на $f_1(\alpha)$ (т.е. вернуться к старой независимой переменной t).

1.5.2. Некоторые фазовые портреты. 2. Приведем фазовые портреты системы (1.5.5), которая получена из системы (1.5.2) и в которой возвращена независимая переменная t (ранее была произведена ее замена $d/dt = f_1(\alpha)d/d\tau$, см. выше; штрих для обозначения производной сохранен). При этом три различных топологических типа портретов приводятся для функций $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $f_1(\alpha) \equiv -1$, $F(\alpha) = -\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, $\mu = 1$. Эти три типа фазовых портретов системы (1.5.5) представлены на рис. 2–4 ($\omega \leftrightarrow Z$, см. также [69, 84]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. Вейль Г. Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
5. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
6. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.
7. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
9. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
11. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
13. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.

14. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
15. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 5. — С. 763–766.
16. Походня Н. В., Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.
17. Походня Н. В., Шамолин М. В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.
18. Походня Н. В., Шамолин М. В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
19. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
20. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
21. Трофимов В. В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 6. — С. 1349–1353.
23. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
24. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
26. Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
27. Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
28. Шамолин М. В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
29. Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbb{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
30. Шамолин М. В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
31. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
32. Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
33. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
34. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
35. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
36. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
37. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
38. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
39. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.

40. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
41. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
42. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
43. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
44. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
45. Шамолин М. В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
46. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
47. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
48. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
49. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.
50. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.
51. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.
52. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
53. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
54. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
55. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
56. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
57. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.
58. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.
59. Шамолин М. В. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 501, № 1. — С. 89–94.
60. Шамолин М. В. Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2022. — 507, № 1. — С. 86–92.
61. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоении гладкого n -мерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 214. — С. 82–106.

62. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. II. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в потенциальном силовом поле// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 215. — С. 81–94.
63. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. III. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 216. — С. 133–152.
64. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 22–54.
65. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 77–95.
66. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 29–40.
67. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. III. Силовые поля с диссипацией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 120–138.
68. Шамолин М. В. Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 108–116.
69. Шамолин М. В. Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 96–105.
70. Шамолин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 41–74.
71. Шамолин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 139–148.
72. Шамолин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. III. Системы на касательных расслоениях гладких n -мерных многообразий// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 213. — С. 96–109.
73. Шамолин М. В. Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 208. — С. 91–121.
74. Шамолин М. В. Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Динамические системы на касательных расслоениях// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 88–107.
75. Шамолин М. В. Системы с четырьмя степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 55–94.
76. Шамолин М. В. Инварианты однородных динамических систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 514, № 1. — С. 98–106.
77. Шамолин М. В. Инвариантные формы геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 512, № 1. — С. 10–17.
78. Шамолин М. В. Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 509, № 1. — С. 69–76.
79. Шамолин М. В. Инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем с тремя степенями свободы// Диффер. уравн. — 2024. — 60, № 3. — С. 322–345.
80. Шамолин М. В. Инварианты однородных динамических систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2024. — 516, № 1. — С. 65–74.

81. *Шамолин М. В.* Инварианты систем с малым числом степеней свободы, обладающих диссипацией// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2024. — № 2. — С. 3–15.
82. *Polyanin A. D., Zaitsev V. F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. — New York: Chapman and Hall, 2017.
83. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
84. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.
85. *Shamolin M. V.* Invariants of dynamical systems with dissipation on tangent bundles of low-dimensional manifolds// in: Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms (*Vasilyev V.*, ed.). — Cham: Springer, 2023. — P. 167–179.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шамолин Максим Владимирович (Shamolin Maksim Vladimirovich)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomovosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru