ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 239 (2025). С. 13–24
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-239-13-24

УДК 519.1, 519.116, 511.344

КОМБИНАТОРНЫЙ АЛГОРИТМ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ И ПЕРЕСЧЕТА КОМПОЗИЦИЙ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2025 г. **О. В. КУЗЬМИН, М. В. СТРИХАРЬ**

Аннотация. Предложен алгоритм перечисления и пересчета композиций натурального числа на основе комбинаторных объектов иерархической структуры, таких как треугольник Паскаля, пирамида Паскаля и гиперпирамиды Паскаля. Получено рекуррентное соотношение, лежащее в основе перечисления и пересчета композиций натурального числа с произвольным количеством ограничений на значения его натуральных частей, а также формула для пересчета в явном виде и производящая функция числа композиций.

Ключевые слова: композиция числа, гиперпирамида Паскаля, пирамида Паскаля, треугольник Паскаля, полиномиальные коэффициенты, триномиальные коэффициенты, биномиальные коэффициенты, рекуррентное соотношение, производящая функция, числа Фибоначчи, числа Трибоначчи, числа Тетраначчи, числа Пентаначчи.

THE LISTING AND COUNTING COMBINATORIAL ALGORITHM FOR COMPOSITIONS OF A NATURAL NUMBER WITH CONSTRAINTS

© 2025 **O. V. KUZMIN, M. V. STRIKHAR**

Abstract. In this paper, we propose a listing and counting algorithm for compositions of a natural number based on combinatorial objects of a hierarchical structure, such as Pascal's triangle, Pascal's pyramid, and Pascal's hyperpyramids. We obtain the recurrent relation that is the basis for listing and counting of compositions of a natural number with an arbitrary constraints on the values of its natural parts and the formula for explicit counting of compositions and a generating function for the number of compositions.

Keywords and phrases: composition of number, Pascal's hyperpyramid, Pascal's pyramid, Pascal's triangle, polynomial coefficients, trinomial coefficients, binomial coefficients, recurrence relation, generating function, Fibonacci numbers, Tribonacci numbers, Tetranacci numbers, Pentanacci numbers.

AMS Subject Classification: 05A05, 11B75, 11B39, 11P81

1. Введение. Структура многих информационных объектов может быть представлена в виде иерархической или рекурсивной зависимости, что приводит к возможности описания этих объектов с помощью формальных комбинаторных множеств, для которых применимы различного рода алгоритмы комбинаторной генерации (см. [1–3]). Для реализации процедуры построения элементов ряда комбинаторных множеств в конце XX в. было введено понятие обобщенной пирамиды Паскаля (см. [4]). В 2010 г. были изучены сечения обобщенной пирамиды Паскаля (см. [6]), которые позволили расширить число исследуемых комбинаторных множетсв и получить ряд новых иерархических и рекурсивных зависимостей. Частными случаями обобщенной пирамиды Паскаля являются треугольник и пирамида Паскаля (см. [4]). Данная работа является продолжением изучения композиций натурального числа с ограничениями (см. [5]), в которой были выведены формулы для пересчета числа композиций с тремя ограничениями на основе плоских сечений пирамиды Паскаля и получены рекуррентные соотношения и производящие функции числа таких композиций. Получено новое рекуррентное соотношение между элементами гиперпирамиды Паскаля, которое позволит пересчитывать и перечислять композиции натурального числа с произвольным количеством ограничений на значения его натуральных частей.

2. Основные понятия. *Композицией* натурального числа называется его представление в виде упорядоченной суммы других натуральных чисел (см. [8]). Слагаемые, составляющие композицию, называются ее *частями*, а количество частей называется *длиной композиции*. Известно, что для числа n существует 2^{n-1} композиций, из которых $\binom{n-1}{k-1}$ композиций имеют длину k. Числа

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

называются *биномиальными коэффициентами*. Например, для числа 5 существует $2^{5-1} = 16$ композиций, из которых $\dbinom{5-1}{3-1} = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$ композиций имеют длину 3:

$$\begin{aligned}5 &= 5 = 4+1 = 1+4 = 3+2 = 2+3 = \\ &= 3+1+1 = 1+3+1 = 1+1+3 = 2+2+1 = 2+1+2 = 1+2+2 = \\ &= 2+1+1+1 = 1+2+1+1 = 1+1+2+1 = 1+1+1+2 = 1+1+1+1+1,\end{aligned}$$

В данной работе мы накладываем ограничения на значения натуральных частей, а именно, исследуем композиции натурального числа m, состоящие строго из частей $m_1, m_2, \dots, m_s$, которые, для определенности в дальнейшем, образуют упорядоченное множество натуральных чисел, т.е. $m_1 < m_2 < \cdots < m_s$. Например, для числа $m = 5$ существует 13 композиций, состоящих строго из частей $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ и $m_3 = 3$:

$$\begin{aligned}5 &= 3+2 = 2+3 = \\ &= 3+1+1 = 1+3+1 = 1+1+3 = 2+2+1 = 2+1+2 = 1+2+2 = \\ &= 2+1+1+1 = 1+2+1+1 = 1+1+2+1 = 1+1+1+2 = 1+1+1+1+1.\end{aligned}$$

Не умаляя общности, далее положим, наибольший общий делитель всех частей равным 1, т.е. $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = 1$. В противном случае, если $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = \mu \neq 1$, то рассматриваемые композиции числа m будут существовать только в случае $m = \mu k$, $k \in \mathbb{B} = \{1, 2, 3, \dots\}$, и число таких композиций будет совпадать с числом композиций числа k, составленных из частей m_1/μ, m_2/μ, …, m_s/μ, где $\gcd(m_1/\mu, m_2/\mu, \dots, m_s/\mu) = 1$.

Треугольником Паскаля (см. [4]) называется бесконечная иерархическая треугольная структура, элементы которой для целых неотрицательных n, k удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

с начальными условиями $\binom{0}{0} = 1$; $\binom{n}{k} = 0$, если $\min(n, k, n-k) < 0$, где, как упоминалось ранее, числа $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ являются биномиальными коэффициентами, т.е. коэффициентами разложения степени бинома

$$(x_0 + x_1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^k x_1^{n-k}.$$

Биномиальные коэффициенты удовлетворяют граничным условиям

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

и равенству (правилу симметрии)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

подтверждающему наличие оси симметрии в треугольнике Паскаля.

Пирамидой Паскаля (см. [4]) называется бесконечная иерархическая трехгранная пирамидальная структура, элементы которой для целых неотрицательных n, k, l удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\binom{n+1}{k,\ l} = \binom{n}{k-1,\ l} + \binom{n}{k,\ l-1} + \binom{n}{k,\ l},$$

с граничными условиями

$$\binom{0}{0,\ 0} = 1, \qquad \binom{n}{k,\ l} = 0, \text{ если } \min(n,k,l,n-k-l) < 0.$$

В n-м сечении (треугольнике) пирамиды ($n = 0, 1, 2, \dots$), параллельном основанию, располагаются *триномиальные коэффициенты*

$$\binom{n}{k,\ l} = \frac{n!}{k!\,l!\,(n-k-l)!}$$

— коэффициенты разложения степени тринома в форме

$$(x_0 + x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{k,\ l} x_0^k x_1^l x_2^{n-k-l}.$$

Любой внутренний элемент пирамиды Паскаля, стоящий в n-м сечении, равен сумме трех элементов, расположенных в углах элементарного треугольника $(n-1)$-го сечения пирамиды.

Триномиальные коэффициенты $\binom{n}{k,l}$ удовлетворяют граничным условиям

$$\binom{n}{0,\ 0} = \binom{n}{n,\ 0} = \binom{n}{0,\ n} = 1$$

и равенствам

$$\binom{n}{k,\ l} = \binom{n}{l,\ k} = \binom{n}{n-k-l,\ l} = \binom{n}{k,\ n-k-l},$$

подтверждающим наличие трех осей симметрии в пирамиде Паскаля.

Полиномиальными коэффициентами называются числа вида

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}} = \frac{n!}{k_1!\ k_2!\ \dots\ k_{s-1}!\ (n-k_1-k_2-\dots-k_{s-1})!}, \tag{1}$$

которые являются обобщениями биномиальных и триномиальных коэффициентов на случай размерности s и совпадают с коэффициентами разложения степени многочлена:

$$(x_0 + x_1 + \dots + x_{s-1})^n =$$
$$= \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \cdots \sum_{k_{s-1}=0}^{n-k_1-k_2-\dots-k_{s-2}} \binom{n}{k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_{s-1}} {x_0}^{k_1} {x_1}^{k_2} \dots {x_{s-1}}^{n-k_1-k_2-\dots-k_{s-1}}.$$

Гиперпирамидой Паскаля (см. [9]) называется бесконечный иерархический s-мерный массив полиномиальных коэффициентов, элементы которого для целых неотрицательных n, k_1, k_2, ..., k_{s-1} удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\binom{n+1}{k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_{s-1}} = \binom{n}{k_1-1,\ k_2,\ \dots,\ k_{s-1}} + \binom{n}{k_1,\ k_2-1,\ \dots,]k_{s-1}} +$$
$$+ \dots + \binom{n}{k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_{s-1}-1} + \binom{n}{k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_{s-1}}$$

и граничным условиям

$$\binom{0}{0,0,\ldots,0}=1; \qquad \binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_{s-1}}=0,$$

если $\min(n,k_1,k_2,\ldots,k_{s-1},n-k_1-k_2-\cdots-k_{s-1})<0$.

Применяемое представление (1) упорядочивает расположение полиномиальных коэффициентов в гиперпирамиде Паскаля, подобно тому, как расположены биномиальные и триномиальные коэффициенты соответственно в треугольнике и пирамиде Паскаля (см. [4]).

3. Соотношения для перечисления и пересчета композиций. Для удобства дальнейшего изложения определим декартовые координаты элементов гиперпирамиды Паскаля, для чего разместим вершину $\binom{0}{0,\,0,\,\ldots,\,0}$ гиперпирамиды Паскаля в точке $(0,0,0,\ldots,0)$ s-мерного евклидова пространства, а ее элементы $\binom{n}{k_1,\,k_2,\,\ldots,\,k_{s-1}}$ — соответственно в точках $(n,k_1,k_2,\ldots,k_{s-1})$ s-мерной целочисленной решетки, имеющих неотрицательные координаты. Тем самым устанавливается соответствие между точками s-мерного евклидова пространства и элементами гиперпирамиды Паскаля, которая в декартовых кординатах будет ограничена гиперплоскостями

$$k_1=0,\quad k_2=0,\quad \ldots,\quad k_{s-1}=0,\quad n-k_1-k_2-\cdots-k_{s-1}=0.$$

Рассмотрим произвольное сечение (см. [7]) гиперпирамиды Паскаля гиперплоскостью, представляющее собой некоторый $(s-1)$-мерный массив полиномиальных коэффициентов. Уравнение гиперплоскости такого сечения будет иметь вид

$$n+\lambda_1\cdot k_1+\lambda_2\cdot k_2+\cdots+\lambda_{s-1}\cdot k_{s-1}=\mathrm{const}, \tag{2}$$

где λ_i — некоторые рациональные коэффициенты, $i=1,2,\ldots,s-1$.

Для нахождения композиций натурального числа m, состоящих из частей m_1, m_2 , …, m_s, пронумеруем все сечения гиперпирамиды Паскаля, заданные уравнением вида (2), начиная от вершины гиперпирамиды, и положим

$$\lambda_i=\frac{m_i}{m_s}-1,\quad i=1,2,\ldots,s-1;$$
$$m_1,m_2,\ldots,m_s\in\mathbb{B},\quad m_1<m_2<\cdots<m_s,\quad \gcd(m_1,m_2,\ldots,m_s)=1.$$

В этом случае все $\lambda_i>-1$, поэтому число элементов сечения конечно, и уравнение m-го гиперплоского сечения гиперпирамиды Паскаля принимает вид

$$n+\left(\frac{m_1}{m_s}-1\right)k_1+\left(\frac{m_2}{m_s}-1\right)k_2+\cdots+\left(\frac{m_{s-1}}{m_s}-1\right)k_{s-1}=\frac{m}{m_s}. \tag{3}$$

Рассмотрим сумму

$$S_m\left(m_1,m_2,\ldots,m_s\right),\quad m_1,m_2,\ldots,m_s\in\mathbb{B}, m_1<m_2<\cdots<m_s, \gcd\left(m_1,m_2,\ldots,m_s\right)=1,$$

элементов m-го гиперплоского сечения гиперпирамиды Паскаля.

Теорема 1. *Сумма элементов m-го сечения гиперпирамиды Паскаля с параметрами $m_1,m_2,\ldots,m_s\in\mathbb{B}$, $m_1<m_2<\cdots<m_s$, $\gcd(m_1,m_2,\ldots,m_s)=1$, гиперплоскостью* (3)*, определяется по формуле*

$$S_m(m_1,m_2,\ldots,m_s)=\sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m}{m_1}\right]}\ \sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m}{m_2}-i_1\right]}\cdots\sum_{i_{s-1}=0}^{\left[\frac{m}{m_{s-1}}-i_1-i_2-\cdots-i_{s-2}\right]}$$
$$\binom{\frac{m}{m_s}-\left(\frac{m_1}{m_s}-1\right)i_1-\left(\frac{m_2}{m_s}-1\right)i_2-\cdots-\left(\frac{m_{s-1}}{m_s}-1\right)i_{s-1}}{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{s-1}}. \tag{4}$$

Доказательство. Поскольку элементу вида

$$\binom{\frac{m}{m_s} - \left(\frac{m_1}{m_s} - 1\right) i_1 - \left(\frac{m_2}{m_s} - 1\right) i_2 - \dots - \left(\frac{m_{s-1}}{m_s} - 1\right) i_{s-1}}{i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_{s-1}}$$

в декартовых координатах соответствует точка

$$\left(\frac{m}{m_s} - \left(\frac{m_1}{m_s} - 1\right) i_1 - \left(\frac{m_2}{m_s} - 1\right) i_2 - \dots - \left(\frac{m_{s-1}}{m_s} - 1\right) i_{s-1},\ i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_{s-1}\right)$$

и при подстановке ее координат в уравнение гиперплоскости (3) получаем верное равенство

$$\left(\frac{m}{m_s} - \left(\frac{m_1}{m_s} - 1\right) i_1 - \left(\frac{m_2}{m_s} - 1\right) i_2 - \dots - \left(\frac{m_{s-1}}{m_s} - 1\right) i_{s-1}\right) + \\ + \left(\frac{m_1}{m_s} - 1\right) i_1 + \left(\frac{m_2}{m_s} - 1\right) i_2 + \dots + \left(\frac{m_{s-1}}{m_s} - 1\right) i_{s-1} = \frac{m}{m_s},$$

то все элементы этого вида содержатся в гиперплоскости, определяемой уравнением (3). Никаких других элементов гиперпирамиды Паскаля в этой гиперплоскости нет, так как рассмотрены все возможные целые неотрицательные значения величин $i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_{s-1}$ для элементов гиперпирамиды Паскаля, расположенных в узлах s-мерной целочисленной решетки.

Точки пересечения гиперплоскости сечения (3) с ограничивающими гиперпирамиду Паскаля гиперплоскостями

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad \dots, \quad k_{s-1} = 0, \quad n - k_1 - k_2 - \dots - k_{s-1} = 0,$$

определяют граничные точки сечения гиперпирамиды Паскаля, а именно, элементы

$$\binom{m/m_s}{0,\ 0,\ \dots,\ 0}, \binom{m/m_1}{m/m_1,\ 0,\ \dots,\ 0}, \binom{m/m_2}{0,\ m/m_2,\ 0,\ \dots,\ 0}, \dots, \binom{m/m_{s-1}}{0,\ 0,\ \dots,\ 0,\ m/m_{s-1}},$$

которые, в свою очередь, задают верхние и нижние пределы суммирования. Следовательно, сумма элементов m-го гиперплоского сечения гиперпирамиды Паскаля гиперплоскостью вида (3) определяется по формуле (4), что и требовалось доказать. □

4. Число композиций с произвольными значениями частей. Докажем, что сумма m-го гиперплоского сечения гиперпирамиды Паскаля вида (4) есть число композиций натурального числа m с ограничениями на значения натуральных частей $m_1, m_2, \dots, m_s$, $m_1 < m_2 < \dots < m_s$, $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = 1$.

Теорема 2. *Число различных композиций натурального числа m, состоящих из натуральных частей $m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_s$, где $m_1 < m_2 < \dots < m_s$, $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = 1$, равно сумме полиномиальных коэффициентов, составляющих m-е гиперплоское сечение гиперпирамиды Паскаля вида* (4).

Доказательство. Обозначим через $x_{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}}$ количество различных композиций числа m, состоящих из i_1 частей вида m_1, i_2 частей вида m_2, …, i_{s-1} частей вида m_{s-1} и соответственно $(m - m_1 i_1 - m_2 i_2 - \dots - m_{s-1} i_{s-1})/m_s$ частей вида m_s:

$$m = \underbrace{m_1 + m_1 + \dots + m_1}_{i_1} + \underbrace{m_2 + m_2 + \dots + m_2}_{i_2} + \dots + \underbrace{m_{s-1} + m_{s-1} + \dots + m_{s-1}}_{i_{s-1}} + \\ + \underbrace{m_s + m_s + m_s + \dots + m_s + m_s}_{(m - m_1 i_1 - m_2 i_2 - \dots - m_{s-1} i_{s-1})/m_s}.$$

Поскольку длины таких композиций равны

$$i_1 + i_2 + \dots + i_{s-1} + \frac{m - m_1 i_1 - m_2 i_2 - \dots - m_{s-1} i_{s-1}}{m_s} = \\ = \frac{m}{m_s} - \left(\frac{m_1}{m_s} - 1\right) i_1 - \left(\frac{m_2}{m_s} - 1\right) i_2 - \dots - \left(\frac{m_{s-1}}{m_s} - 1\right) i_{s-1},$$

имеем

$$x_{i_1,i_2,\ldots,i_{s-1}} = \frac{\left(\dfrac{m}{m_s} - \left(\dfrac{m_1}{m_s}-1\right)i_1 - \left(\dfrac{m_2}{m_s}-1\right)i_2 - \cdots - \left(\dfrac{m_{s-1}}{m_s}-1\right)i_{s-1}\right)!}{i_1!\ i_2!\ \ldots\ i_{s-1}!\left(\dfrac{m}{m_s} - \dfrac{m_1}{m_s}i_1 - \dfrac{m_2}{m_s}i_2 - \cdots - \dfrac{m_{s-1}}{m_s}i_{s-1}\right)!} =$$

$$= \binom{\dfrac{m}{m_s} - \left(\dfrac{m_1}{m_s}-1\right)i_1 - \left(\dfrac{m_2}{m_s}-1\right)i_2 - \cdots - \left(\dfrac{m_{s-1}}{m_s}-1\right)i_{s-1}}{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{s-1}}.$$

Таким образом, общее число различных композиций натурального числа m, состоящих из натуральных частей m_1, m_2, $\ldots$, m_s равно

$$\sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m}{m_1}\right]} \sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m}{m_2}-i_1\right]} \cdots \sum_{i_{s-1}=0}^{\left[\frac{m}{m_{s-1}}-i_1-i_2-\cdots-i_{s-2}\right]} x_{i_1,i_2,\ldots,i_{s-1}} =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m}{m_1}\right]} \sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m}{m_2}-i_1\right]} \cdots \sum_{i_{s-1}=0}^{\left[\frac{m}{m_{s-1}}-i_1-i_2-\cdots-i_{s-2}\right]} \binom{\dfrac{m}{m_s} - \left(\dfrac{m_1}{m_s}-1\right)i_1 - \left(\dfrac{m_2}{m_s}-1\right)i_2 - \cdots - \left(\dfrac{m_{s-1}}{m_s}-1\right)i_{s-1}}{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{s-1}} =$$

$$= S_m(m_1, m_2, \ldots, m_s),$$

что и требовалось доказать. □

Замечание. Число $S_0 = \binom{0}{0,0,\ldots,0}$ соответствует вершине гиперпирамиды Паскаля и условно определяет количество композиций числа $m = 0$, состоящих из любых натуральных частей. Поэтому далее берем значения m из множества неотрицательных целых чисел, т.е. считаем, что $m \in \mathbb{B}_0$, это позволит в дальнейшем получить рекуррентные соотношения и производящие функции для числа композиций.

5. Рекуррентное соотношение. Введем обозначение $S_m = S_m(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ и рассмотрим последовательность $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{B}_0$, композиций натурального числа m, состоящих из строго натуральных частей m_1, m_2, $\ldots$, m_s, где $m_1 < m_2 < \cdots < m_s$, $\gcd(m_1, m_2, \ldots, m_s) = 1$.

Теорема 3. *Последовательность чисел $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{B}_0$, удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2} + \cdots + S_{m-m_s} \tag{5}$$

с начальными условиями

$$S_0 = 1, \quad S_1 = S_2 = \cdots = S_{m_1-1} = 0; \tag{6}$$

величины S_m при $m = m_1, \ldots, m_2 - 1$ задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1}; \tag{7}$$

величины S_m при $m = m_2, \ldots, m_3 - 1$ задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2}; \quad \ldots; \tag{8}$$

величины S_m при $m = m_{s-1}, \ldots, m_s - 1$ задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2} + \cdots + S_{m-m_{s-1}}. \tag{9}$$

Доказательство. Действительно, имеется только s возможностей для того, чтобы составить композицию числа m из частей m_1, m_2, $\ldots$, m_s. В первом случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_1)$ при помощи чисел m_1, m_2, $\ldots$, m_s, а затем добавить в сумму справа число m_1. Во втором случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_2)$ при помощи чисел $m_1, m_2, \ldots, m_s$, а затем добавить в сумму справа число m_2 и т. д. В s-м случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_s)$ при помощи чисел $m_1, m_2, \ldots, m_s$, а затем добавить в сумму справа число m_s. Указанные возможности и образуют рекуррентное соотношение (5).

Если $m = 0$, то имеем условие $S_0 = 1$, оговоренное отдельно в приведенном выше замечании. Если же $1 \leqslant m \leqslant m_1 - 1$, то не существует ни одной композиции числа m, составленной из частей $m_1, m_2, \ldots, m_s$. Таким образом, получаем начальные условия (6).

Если $m_1 \leqslant m \leqslant m_2 - 1$, то существует ровно столько композиций числа m, сколько существует композиций числа $m - m_1$. Получили соотношение (7).

Если $m_2 \leqslant m \leqslant m_3 - 1$, то можно составить композицию числа m только из частей m_1 и m_2. В данном случае имеется только две возможности сделать это. В первом случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_1)$ при помощи чисел m_1 и m_2, а затем добавить в сумму справа число m_1. Во втором случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_2)$ при помощи чисел m_1 и m_2, а затем добавить в сумму справа число m_2. Указанные возможности и образуют рекуррентную формулу (8).

Рассуждая аналогично, приходим к соотношению (9), справедливому при $m_{s-1} \leqslant m \leqslant m_s - 1$. □

6. **Производящая функция.** Поставим в соответствие последовательности сумм $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{B}$, формальный степенной ряд и запишем производящую функцию для этих сумм.

Теорема 4. *Производящая функция сумм $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{B}_0$, имеет вид*

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^{m_1} - x^{m_2} - \cdots - x^{m_s}}. \tag{10}$$

Доказательство. В силу теоремы 2 последовательность сумм $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{B}_0$, удовлетворяет рекуррентным соотношениям (5)–(9), где $S_0 = 1$. Перепишем рекуррентное соотношение (5) в виде

$$S_{m+m_s} = S_{m+m_s-m_1} + S_{m+m_s-m_2} + \cdots + S_m.$$

Умножим это рекуррентное соотношение почленно на x^{m+m_s} и просуммируем по m в пределах от нуля до бесконечности:

$$\sum_{m=0}^{\infty} S_{m+m_s} x^{m+m_s} = x^{m_1} \sum_{m=0}^{\infty} S_{m+m_s-m_1} x^{m+m_s-m_1} + \\ + x^{m_2} \sum_{m=0}^{\infty} S_{m+m_s-m_2} x^{m+m_s-m_2} + \cdots + x^{m_s} \sum_{m=0}^{\infty} S_m x^m.$$

Пусть

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} S_m x^m;$$

тогда из предыдущего равенства имеем

$$f(x) - \sum_{m=0}^{m_s-1} S_m x^m = x^{m_1} \left(f(x) - \sum_{m=0}^{m_s-m_1-1} S_m x^m \right) + x^{m_2} \left(f(x) - \sum_{m=0}^{m_s-m_2-1} S_m x^m \right) + \cdots + x^{m_s} f(x).$$

Раскрывая скобки, получаем

$$f(x) - \sum_{m=0}^{m_s-1} S_m x^m = x^{m_1} f(x) - x^{m_1} \sum_{m=0}^{m_s-m_1-1} S_m x^m + \\ + x^{m_2} f(x) - x^{m_2} \sum_{m=0}^{m_s-m_2-1} S_m x^m + \cdots + x^{m_s} f(x),$$

Перенесем слагаемые, содержащие $f(x)$, в левую часть равенства:

$$f(x) - x^{m_1} f(x) - x^{m_2} f(x) - \cdots - x^{m_s} f(x) =$$
$$= \sum_{m=0}^{m_s-1} S_m x^m - x^{m_1} \sum_{m=0}^{m_s-m_1-1} S_m x^m - x^{m_2} \sum_{m=0}^{m_s-m_2-1} S_m x^m - \cdots - x^{m_{s-1}} \sum_{m=0}^{m_s-m_{s-1}-1} S_m x^m.$$

Обозначим через y правую часть равенства и преобразуем ее отдельно, учитывая начальные условия (6) и рекуррентные соотношения (7)–(9):

$$y = \left(S_0 + \sum_{m=1}^{m_1-1} S_m x^m + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_m x^m + \cdots + \sum_{m=m_{s-1}}^{m_s-1} S_m x^m \right) -$$
$$- x^{m_1} \left(\sum_{m=0}^{m_2-m_1-1} S_m x^m + \sum_{m=m_2-m_1}^{m_3-m_1-1} S_m x^m + \cdots + \sum_{m=m_{s-1}-m_1}^{m_s-m_1-1} S_m x^m \right) -$$
$$- x^{m_2} \left(\sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m + \cdots + \sum_{m=m_{s-1}-m_2}^{m_s-m_2-1} S_m x^m \right) - \cdots - x^{m_{s-1}} \sum_{m=0}^{m_s-m_{s-1}-1} S_m x^m =$$
$$= \left(1 + \sum_{m=1}^{m_1-1} 0 \cdot x^m + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_m x^m + \cdots + \sum_{m=m_{s-1}}^{m_s-1} S_m x^m \right) -$$
$$- \left(\sum_{m=0}^{m_2-m_1-1} S_m x^{m+m_1} + \sum_{m=m_2-m_1}^{m_3-m_1-1} S_m x^{m+m_1} + \cdots + \sum_{m=m_{s-1}-m_1}^{m_s-m_1-1} S_m x^{m+m_1} \right) -$$
$$- \left(\sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^{m+m_2} + \cdots + \sum_{m=m_{s-1}-m_2}^{m_s-m_2-1} S_m x^{m+m_2} \right) - \cdots - \sum_{m=0}^{m_s-m_{s-1}-1} S_m x^{m+m_{s-1}} =$$
$$= \left(1 + 0 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_m x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_m x^m + \cdots + \sum_{m=m_{s-1}}^{m_s-1} S_m x^m \right) -$$
$$- \left(\sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_{m-m_1} x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_{m-m_1} x^m + \cdots + \sum_{m=m_{s-1}}^{m_s-1} S_{m-m_1} x^m \right) -$$
$$- \left(\sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_{m-m_2} x^m + \cdots + \sum_{m=m_{s-1}}^{m_s-1} S_{m-m_2} x^m \right) - \cdots - \sum_{m=m_{s-1}}^{m_s-1} S_{m-m_{s-1}} x^m =$$
$$= 1 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} \left(S_m - S_{m-m_1} \right) x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} \left(S_m - S_{m-m_1} - S_{m-m_2} \right) x^m + \cdots +$$
$$+ \sum_{m=m_{s-1}}^{m_s-1} \left(S_m - S_{m-m_1} - S_{m-m_2} - \cdots - S_{m-m_{s-1}} \right) x^m =$$
$$= 1 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} 0 \cdot x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} 0 \cdot x^m + \cdots + \sum_{m=m_{s-1}}^{m_s-1} 0 \cdot x^m = 1.$$

Следовательно,

$$f(x) \left(1 - x^{m_1} - x^{m_2} - \cdots - x^{m_s} \right) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{1 - x^{m_1} - x^{m_2} - \cdots - x^{m_s}},$$

что и требовалось доказать. □

7. Алгоритм перечисления и пересчета композиций. Используя полученные выше рекуррентные соотношения (5)–(9), можно составить следующий комбинаторный алгоритм для перечисления и пересчета композиций натурального числа m с ограничениями на значения его натуральных частей. Приведем пример для четырех частей, т.е. считаем, что $s = 4$.

1. Задаем значения натурального числа m и, в порядке возрастания, значения частей m_1, m_2, m_3, m_4, так, чтобы $\gcd(m_1, m_2, m_3, m_4) = 1$.
2. Находим число композиций, используя рекуррентные соотношения (5)–(9), и составляем композиции по следующему правилу:
   2.1. Для $m = 0$ согласно замечанию, приведенному после теоремы 1, в любом случае формально считаем, что $S_0 = 1$. Благодаря этому в дальнейшем сможем найти композиции самих частей.
   2.2. Если $1 \leqslant m \leqslant m_1 - 1$, то согласно начальным условиям (6) не существует ни одной композиции числа m, составленной из частей m_1, m_2, m_3, m_4.
   2.3. Если $m_1 \leqslant m \leqslant m_2 - 1$, то согласно соотношению (7) существует столько композиций числа m, сколько существует композиций числа $(m - m_1)$ и все они состоят только из частей вида m_1. Находим их путем добавления к имеющимся композициям числа $(m-m_1)$ справа числа m_1.
   2.4. Если $m_2 \leqslant m \leqslant m_3 - 1$, то количество композиций находим согласно рекуррентной формуле (8) и составляем композицию числа m только из частей m_1 и m_2 следующим образом: ко всем существующим композициям числа $(m - m_1)$ добавляем справа число m_1, а ко всем имеющимся композициям числа $(m - m_2)$ добавляем справа число m_2.
   2.5. Если $m_3 \leqslant m \leqslant m_4 - 1$, то количество композиций находим согласно соотношению (9) и составляем композицию числа m только из частей m_1, m_2 и m_3 следующим образом: ко всем найденным композициям числа $(m - m_1)$ добавляем справа число m_1, ко всем существующим композициям числа $(m-m_2)$ добавляем справа число m_2, а ко всем имеющимся композициям числа $(m - m_3)$ добавляем справа число m_3.
   2.6. Начиная с $m = m_4$ количество композиций находим согласно формуле (5) и составляем композицию числа m уже из всех частей m_1, m_2, m_3 и m_4 следующим образом: ко всем существующим композициям чисел $(m - m_1)$, $(m - m_2)$, $(m - m_3)$ и $(m - m_4)$ добавляем справа соответственно числа m_1, m_2, m_3 и m_4.
3. Как только m достигает заданного значения, получаем окончательный результат.

8. Числа Фибоначчи. Рассмотрим последовательность композиций числа m, состоящих из натуральных частей $m_1 = 1$ и $m_2 = 2$.

При $m = 1$ получаем одну композицию: $m = 1$.
При $m = 2$ получаем две композиции: $m = 1 + 1 = 2$.
При $m = 3$ получаем три композиции: $m = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1$.
При $m = 4$ получаем пять композиций: $m = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 2+2$.

В итоге, учитывая, что $S_0 = 1$, образуется последовательность

$$1,\ 1\,2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \ldots$$

сумм вида $S_m(1, 2)$, $m \in \mathbb{B}_0$, расположенных в сечениях треугольника Паскаля при $\lambda_1 = -1/2$. Число композиций в данном случае согласно (4) может быть вычислено по формуле

$$S_m = S_m(1, 2) = \sum_{i=0}^{m} \binom{(m+i)/2}{i}$$

и удовлетворяет, исходя из (5)–(9), рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-1} + S_{m-2}, \quad S_0 = S_1 = 1.$$

Заметим, что эта последовательность совпадает с последовательностью чисел Фибоначчи (см. [10, A000045]):

$$F_m = F_{m-1} + F_{m-2}, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1;$$

при этом $S_m = F_{m+1}$. Исходя из (10), заключаем, что производящая функция рассматриваемой последовательности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}.$$

9. Числа Трибоначчи. Рассмотрим последовательность композиций числа m, состоящих из натуральных частей $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ и $m_3 = 3$.

При $m=1$ получаем одну композицию: $m = 1$.
При $m=2$ получаем две композиции: $m = 1+1 = 2$.
При $m=3$ получаем четыре композиции: $m = 1+1+1 = 1+2 = 2+1 = 3$.
При $m=4$ получаем семь композиций: $m = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 2+2 = 1+3 = 3+1$.

В итоге, учитывая, что $S_0 = 1$, получаем последовательность

$$1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 13,\ 24,\ 44,\ 81,\ 149,\ 274,\ 504,\ \ldots$$

сумм вида $S_m(1,2,3)$, $m \in \mathbb{B}_0$, плоских сечений пирамиды Паскаля при $\lambda_1 = -2/3$, $\lambda_2 = -1/3$. Число композиций в данном случае может быть вычислено по формуле

$$S_m = S_m(1,2,3) = \sum_{i_1=0}^{m} \sum_{i_2=0}^{[m/2-i_1]} \binom{(m+2i_1+i_2)/3}{i_1,\ i_2}$$

и удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-1} + S_{m-2} + S_{m-3}, \quad S_0 = S_1 = 1, \quad S_2 = 2.$$

Заметим, что полученная последовательность композиций числа m совпадает с последовательностью чисел Трибоначчи (см. [10, A000073]), определяемой при помощи рекуррентного соотношения

$$a_m = a_{m-1} + a_{m-2} + a_{m-3}, \quad a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = 1;$$

при этом $S_m = a_{m+2}$. Производящая функция рассматриваемой последовательности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2-x^3}.$$

10. Числа Тетраначчи. Рассмотрим последовательность композиций числа m, состоящих из натуральных частей $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$, $m_4 = 4$.

При $m=1$ получаем одну композицию: $m = 1$.
При $m=2$ получаем две композиции: $m = 1+1 = 2$.
При $m=3$ получаем четыре композиции: $m = 1+1+1 = 1+2 = 2+1 = 3$.
При $m=4$ получаем восемь композиций: $m = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 2+2 = 1+3 = 3+1 = 4$.

В итоге, учитывая, что $S_0 = 1$, получаем последовательность

$$1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 15,\ 29,\ 56,\ 108,\ 208,\ 401,\ 773,\ \ldots$$

сумм вида $S_m(1,2,3,4)$, $m \in \mathbb{B}_0$, гиперплоских сечений четырехмерной гиперпирамиды Паскаля при $\lambda_1 = -3/4$, $\lambda_2 = -1/2$, $\lambda_3 = -1/4$. Число композиций в данном случае может быть вычислено по формуле

$$S_m = S_m(1,2,3,4) = \sum_{i_1=0}^{m} \sum_{i_2=0}^{[m/2-i_1]} \sum_{i_3=0}^{[m/3-i_1-i_2]} \binom{(m+3i_1+2i_2+i_3)/4}{i_1,\ i_2,\ i_3}$$

и удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-1} + S_{m-2} + S_{m-3} + S_{m-4}, \quad S_0 = S_1 = 1, \quad S_2 = 2, \quad S_3 = 4.$$

Заметим, что полученная последовательность композиций числа m совпадает с последовательностью чисел Тетраначчи (см. [10, A000078]), определяемой при помощи рекуррентного соотношения

$$a_m = a_{m-1} + a_{m-2} + a_{m-3} + a_{m-4}, \quad a_0 = a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = 1;$$

при этом $S_m = a_{m+3}$. Производящая функция рассматриваемой последовательности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2-x^3-x^4}.$$

11. Числа Пентаначчи, числа k-наччи. В результате пересчета композиций натурального числа m, состоящих из натуральных частей $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$, $m_4 = 4$ и $m_5 = 5$ получаем последовательность

$$1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 31,\ 61,\ 120,\ 236,\ 464,\ 912,\ \ldots,$$

которая образуется на гиперплоских сечениях пятимерной гиперпирамиды Паскаля при $\lambda_1 = -4/5$, $\lambda_2 = -3/5$, $\lambda_3 = -2/5$, $\lambda_4 = -1/5$. Число композиций в данном случае может быть вычислено по формуле

$$S_m = S_m(1,2,3,4,5) = \sum_{i_1=0}^{m} \sum_{i_2=0}^{[m/2-i_1]} \sum_{i_3=0}^{[m/3-i_1-i_2]} \sum_{i_4=0}^{[m/4-i_1-i_2-i_3]} \binom{(m+4i_1+3i_2+2i_3+i_4)/5}{i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4}$$

и удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-1} + S_{m-2} + S_{m-3} + S_{m-4} + S_{m-5}, \quad S_0 = S_1 = 1, \quad S_2 = 2, \quad S_3 = 4, \quad S_4 = 8.$$

Заметим, что полученная последовательность композиций числа m совпадает с последовательностью чисел Пентаначчи (см. [10, A001591]), определяемой при помощи рекуррентного соотношения

$$a_m = a_{m-1} + a_{m-2} + a_{m-3} + a_{m-4} + a_{m-5}, \quad a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0, \quad a_4 = 1;$$

при этом $S_m = a_{m+4}$. Производящая функция рассматриваемой последовательности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2-x^3-x^4-x^5}.$$

В общем случае числа k-наччи получаются в результате пересчета композиций натурального числа m, состоящих из натуральных частей $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $\ldots$, $m_k = k$, которые образуются на гиперплоских сечениях k-мерной гиперпирамиды Паскаля при $\lambda_1 = -(k-1)/k$, $\lambda_2 = -(k-2)/k$, $\ldots$, $\lambda_{k-1} = -1/k$. Число композиций в данном случае может быть вычислено по формуле

$$S_m = S_m(1,2,\ldots,k) = \sum_{i_1=0}^{m} \sum_{i_2=0}^{[m/2-i_1]} \cdots \sum_{i_{k-1}=0}^{[m/k-1-i_1-i_2-\cdots-i_{k-2}]} \binom{(m+(k-1)i_1+(k-2)i_2+\cdots+i_{k-1})/k}{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{k-1}}$$

и удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-1} + S_{m-2} + \cdots + S_{m-k},$$
$$S_0 = S_1 = 1, \quad S_2 = S_0 + S_1, \quad \ldots, \quad S_{k-1} = S_0 + S_1 + \cdots + S_{k-2}.$$

Производящая функция последовательности чисел k-наччи имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2-\cdots-x^k}.$$

12. Заключение. В работе рассмотрены композиции натурального числа m, состоящие из произвольных частей m_1, m_2, $\ldots$, m_s, где для определенности $m_1 < m_2 < \cdots < m_s$ и $\gcd(m_1, m_2, \ldots, m_s) = 1$. Выявлена взаимосвязь между количеством композиций числа m и соответствующей ему суммой элементов m-го гиперплоского сечений иерархической комбинаторной конфигурации, называемой гиперпирамидой Паскаля. Доказано рекуррентное соотношение, на основе которого построен комбинаторный алгоритм перечисления и пересчета композиций и найдена формальная производящая функция числа композиций. В частных случаях приведены примеры таких известных комбинаторных числел, как числа Фибоначчи, Трибоначчи, Тетраначчи, Пентаначчи и k-наччи, которые получаются при подсчете числа композиций из различных частей.

Полученные в данной работе соотношения позволяют совершенствовать известные алгоритмы перечисления композиций (см. [1, 2]) или строить новые, вычислять длины и количество композиций чисел фиксированной длины, а также вычислять количество композиций, и находить соотвествующие коэффициенты производящих функций в явном виде через суммы элементов гиперплоских сечений гиперпирамиды Паскаля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бородин А. В., Бирюков Е. С.* О практической реализации некоторых алгоритмов, связанных с проблемой композиции чисел// Киберн. программ. — 2015. — № 1. — С. 27–45.
2. *Кручинин В. В.* Алгоритмы генерации и нумерации композиций и разбиений натурального числа n// Докл. ТУСУР. — 2008. — *17*, № 3. — С. 113–119.
3. *Кручинин В. В.* Модификация метода построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе применения производящих функций многих переменных и приближенных вычислений// Докл. ТУСУР. — 2022. — *25*, № 1. — С. 55–60.
4. *Кузьмин О. В.* Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука, 2000.
5. *Кузьмин О. В., Стрихарь М. В.* Композиции чисел с ограничениями и иерархическая структура плоских сечений пирамиды Паскаля// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2024. — *234*. — С. 67–74.
6. *Кузьмин О. В., Серегина М. В.* Плоские сечения обобщенной пирамиды Паскаля и их интерпретации// Дискр. мат. — 2010. — *22*, № 3. — С. 83–93.
7. *Стрихарь М. В.* Сумма элементов сечения гиперпирамиды Паскаля гиперплоскостью// в кн.: Актуальные задачи прикладной дискретной математики (*О. В. Кузьмин*, ред.). — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2024.
8. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. — М.: Наука, 1982.
9. *Okbaeva N.* Pascal's triangle, its planar and spatial generalizations// in: Int. Sci. J. Theor. Appl. Sci., 2022. — *03 (107)*. — P. 815–823.
10. *Sloane N. J. A.* The on-line encyclopedia of integer sequences/ https://oeis.org.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кузьмин Олег Викторович (Kuzmin Oleg Viktorovich)
Иркутский государственный университет, Иркутск
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: quzminov@mail.ru

Стрихарь Марина Валерьевна (Strikhar, Marina Valerievna)
Забайкальский институт железнодорожного транспорта, Чита
(Transbaikal Institute of Railway Transport, Chita, Russia)
E-mail: mseryogina@mail.ru