ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 13–17
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-13-17

УДК 519.175.3

О МАКСИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ОСТОВНЫХ ДЕРЕВЬЕВ В КАКТУСАХ С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ ВЕРШИН

© 2025 г. **В. А. ВОБЛЫЙ, Д. А. КОНОНЕНКО**

Аннотация. Число остовных деревьев графа является важной характеристикой его надежности как сети передачи данных. Найдено максимальное число остовных деревьев в кактусе с заданным числом вершин, а также в двудольном кактусе с заданным числом вершин. Экстремальными графами, в частности, являются графы дружбы и сети Коха.

***Ключевые слова*:** перечисление, помеченный граф, остовное дерево, кактус, двудольный кактус, экстремальный граф, граф дружбы, сеть Коха.

ON THE MAXIMAL NUMBER OF SPANNING TREES IN CACTI WITH GIVEN ORDER

© 2025 **V. A. VOBLYI, D. A. KONONENKO**

Abstract. The number of spanning trees of a graph is an important characteristic of its reliability as a data transmission network. We found the maximal number of spanning trees in a cactus with a given number of vertices and also in a bipartite cactus with a given number of vertices. In particular, friendship graphs and Koch networks are extremal graphs.

***Keywords and phrases*:** enumeration, labeled graph, spanning tree, cactus, bipartite cactus, extremal graph, fiendship graph, Koch network.

***AMS Subject Classification*:** 05C30

Число остовных деревьев графа является важной характеристикой его надежности как сети передачи информации (см. [7,8,11,13]). При этом надежность сети увеличивается при максимизации числа остовных деревьев в соответствующем ей графе. При одинаковой надежности связей в сети наиболее уязвимыми являются ребра, удаление которых приводит к максимальному уменьшению числа остовных деревьев графа (см. [10]).

Найдено максимальное число остовных деревьев в кактусе с заданным числом вершин, а также в двудольном кактусе с заданным числом вершин. Экстремальными графами, в частности, являются граф дружбы и сеть Коха.

Определение 1. Точкой сочленения связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей ребрами граф становится несвязным.

Определение 2. Блок — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения.

Определение 3 (см. [6, с. 93])**.** Кактусом называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле.

У кактуса каждый блок является ребром или циклом.

Определение 4 (см. [5, с. 55]). Цикломатическим числом (циклическим рангом) связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин.

В дальнейшем под числом циклов графа понимается его цикломатическое число.

Определение 5 (см. [12]). Граф дружбы — это граф, состоящий из треугольников с единственной общей вершиной.

Определение 6 (см. [9]). Обобщенный граф дружбы $f_{p,q}$ — это граф, состоящий из p q-вершинных циклов с единственной общей вершиной.

Лемма 1. *Число остовных деревьев в связном графе равно произведению чисел остовных деревьев его блоков.*

Лемма приводится без доказательства в книге Ф. Харари [5, с. 187]; доказательство имеется в [1].

Теорема 1 (см. [2]). *Для числа остовных деревьев $t(Ca_n(k))$ в помеченном кактусе с n вершинами и k циклами при $n \geqslant 5$ и $k \geqslant 2$ верно неравенство*

$$t(Ca_n(k)) \leqslant \left[\frac{n+k-1}{k}\right]^{k-p} \left(\left[\frac{n+k-1}{k}\right]+1\right)^p, \tag{1}$$

где $[x]$ — целая часть числа x, а p — остаток от деления $n+k-1$ на k.

Отметим, что знак равенства в (1) достигается при $k=1$ для графа C_n. В силу разрывности функции $y=[x]$ (целая часть числа) нахождение ее экстремумов затруднительно.

Теорема 2. *Пусть F_n — граф дружбы с n вершинами. Для числа остовных деревьев $t(F_n)$ в помеченном графе F_n при $n \geqslant 5$ верна формула*

$$t(F_n) = 3^{(n-1)/2}. \tag{2}$$

Доказательство. Граф дружбы является кактусом с одной точкой сочленения, у которого все блоки являются треугольниками. Пусть граф F_n имеет k блоков-циклов.

Каждый цикл в графе дружбы состоит из трех вершин, но одна вершина у каждого цикла общая. Поэтому число вершин в графе дружбы равно $n = 2k+1$ (граф дружбы всегда имеет нечетное число вершин). Отсюда имеем $k = (n-1)/2$.

Так как n-вершинный граф цикла C_n имеет n остовных деревьев, то перемножая числа остовных деревьев в каждом блоке, в силу леммы 1 получим утверждение теоремы. □

Лемма 2. *Для числа ребер m в кактусе с n вершинами верно неравенство*

$$m \leqslant \frac{3}{2}(n-1). \tag{3}$$

Доказательство. Применим индукцию по числу блоков кактуса. Пусть кактус имеет $k \geqslant 1$ блоков. Напомним, что у кактуса каждый блок является ребром или циклом.

Рассмотрим сначала кактус, состоящий из одного блока ($k=1$). В первом случае кактус — это граф K_2 (ребро), $m=1$, $n=2$ и неравенство (3) верно, так как $1 \leqslant 3/2$.

Во втором случае кактус является графом цикла C_q с $q \geqslant 3$. Так как у цикла число ребер равно числу вершин, то $m=n=q \geqslant 3$ и неравенство (3) равносильно неравенству $n \geqslant 3$.

Теперь допустим, что лемма верна для графа, состоящего из $k>1$ блоков, и докажем, что она верна для графа, состоящево из $k+1$ блоков. Обозначим через n_k и m_k соответственно число вершин и число ребер в кактусе с k блоками.

Известно, что в любом связном графе, состоящем из нескольких блоков, существует концевой блок, который имеет только одну точку сочленения (см. [4]). Точка сочленения является общей вершиной двух блоков, поэтому имеем $n_{k+1} = n_k + n_1 - 1$. Так как блоки в связном графе не имеют общих ребер, то $m_{k+1} = m_k + m_1$. Ранее доказано, что лемма верна для кактуса, состоящего из одного блока, т.е. $m_1 \leqslant 3(n_1-1)/2$. По предположению индукции $m_k \leqslant 3(n_k-1)/2$. Следовательно, получим

$$m_{k+1} = m_k + m_1 \leqslant \frac{3}{2}(n_k-1) + \frac{3}{2}(n_1-1) = \frac{3}{2}(n_k+n_1-2) = \frac{3}{2}(n_{k+1}-1). \qquad \square$$

Оценка для числа ребер n-вершинного кактуса, полученная в лемме является точной, так как она достигается для графа дружбы.

Теорема 3. *Максимальное число остовных деревьев $T(Ca_n)$ в помеченном кактусе Ca_n с n вершинами равно*

$$T(Ca_n) = 3^{(n-1)/2}.$$

Экстремальным графом является граф дружбы.

Доказательство. В силу леммы 2 максимальное число ребер в кактусе с n вершинами равно $m_{\max} = 3(n-1)/2$. Так как для любого связного графа с n вершинами, m ребрами и k циклами верно равенство $k = m - n + 1$, то для кактуса Ca_n максимальное число циклов $k_{\max}$ равно

$$k_{\max} = m_{\max} - n + 1 = \frac{3}{2}(n-1) - n + 1 = \frac{1}{2}(n-1).$$

В [1] для числа остовных деревьев $t(Ca_n)$ в кактусе с n вершинами и k циклами была получена оценка

$$t(Ca_n) \leqslant a_k(n) = \left(1 + \frac{n-1}{k}\right)^k. \tag{4}$$

Докажем, что последовательность $a_k(n)$ возрастает при фиксированном n. Будем следовать доказательству возрастания числовой последовательности для второго замечательного предела (числа e; см. [3, с. 84-85]).

Используем формулу бинома Ньютона

$$(1+x)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} x^i = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{k \dots (k-i+1)}{i!} x^i,$$

$$a_k(n) = \left(1 + \frac{n-1}{k}\right)^k = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{k \dots (k-i+1)}{i! k^i} (n-1)^i =$$
$$= 1 + \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \dots \left(1 - \frac{i-1}{k}\right) \frac{(n-1)^i}{i!}.$$

При переходе от k к $k+1$ число слагаемых в сумме увеличивается на единицу, все слагаемые положительны и каждое слагаемое, начиная с третьего, увеличивается, так как становится больше выражение, стоящее в каждой круглой скобке

$$1 - \frac{j}{k} < 1 - \frac{j}{k+1} \quad \text{при} \quad j = 1, \dots, k-1, k = 2, \dots.$$

Это означает строгое возрастание последовательности $a_k(n)$ при фиксированном n.

Следовательно, максимальное число остовных деревьев в кактусе с n вершинами получается при максимально возможном числе циклов в таком кактусе, равном $k_{\max} = (n-1)/2$. После подстановки в выражение для $a_k(n)$ значения $k_{\max}$ получим утверждение теоремы.

Оценка для числа остовных деревьев кактуса является точной, так как она достигается для графа дружбы. Однако граф дружбы не единственный экстремальный граф. Например, кактус без мостов, состоящий из цепи треугольников, также имеет максимальное число остовных деревьев. Практическим примером экстремального кактуса с наибольшим числом остовных деревьев является сеть Коха (см. [14]). $\square$

Рассмотрим теперь задачу нахождения максимального числа остовных деревьев в двудольном кактусе. Известно, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы четные (см. [5, с. 32]). Следовательно, у двудольного кактуса все циклы четные.

Лемма 3. *Для числа ребер m в двудольном кактусе с n вершинами верно неравенство*

$$m \leqslant \frac{4}{3}(n-1). \tag{5}$$

Доказательство. Применим индукцию по числу блоков кактуса. Пусть кактус имеет $k \geqslant 1$ блоков.

Рассмотрим сначала кактус, состоящий из одного блока ($k = 1$). В первом случае кактус — это граф K_2 (ребро), $m = 1, n = 2$ и неравенство (3) верно, так как $1 \leqslant 4/3$.

Во втором случае кактус является графом цикла C_q с $q \geqslant 4$. Так как у цикла число ребер равно числу вершин, то $m = n = q \geqslant 4$ и неравенство (3) равносильно неравенству $n \geqslant 4$.

Теперь допустим, что лемма верна для графа, состоящего из $k > 1$ блоков, и докажем, что она верна для графа, состоящево из $k + 1$ блоков. Обозначим через n_k и m_k соответственно число вершин и число ребер в кактусе с k блоками.

Известно, что в любом связном графе, состоящем из нескольких блоков, существует концевой блок, который имеет только одну точку сочленения (см. [4]). Точка сочленения является общей вершиной двух блоков, поэтому имеем $n_{k+1} = n_k + n_1 - 1$. Так как блоки в связном графе не имеют общих ребер, то $m_{k+1} = m_k + m_1$. Ранее доказано, что лемма верна для кактуса, состоящего из одного блока, т.е. $m_1 \leqslant 4(n_1 - 1)/3$. По предположению индукции $m_k \leqslant 4(n_k - 1)/3$. Следовательно, получим

$$m_{k+1} = m_k + m_1 \leqslant \frac{4}{3}(n_k - 1) + \frac{4}{3}(n_1 - 1) = \frac{4}{3}(n_k + n_1 - 2) = \frac{4}{3}(n_{k+1} - 1). \qquad \square$$

Оценка для числа ребер n-вершинного двудольного кактуса, полученная в лемме является точной, так как она достигается для графа-четырехугольника C_4.

Теорема 4. *Максимальное число остовных деревьев $T(BCa_n)$ в помеченном двудольном кактусе BCa_n с n вершинами равно*

$$T(BCa_n) = 4^{(n-1)/3}.$$

Экстремальным графом, в частности, является обобщенный граф дружбы $f_{p,4}$.

Доказательство. В силу леммы 3 максимальное число ребер в двудольном кактусе с n вершинами равно $m_{max} = 4(n-1)/3$.

Так как для любого связного графа с n вершинами, m ребрами и k циклами верно равенство $k = m - n + 1$, то для кактуса BCa_n максимальное число циклов k_{max} в двудольном кактусе равно

$$k_{\max} = m_{\max} - n + 1 = \frac{4}{3}(n-1) - n + 1 = \frac{1}{3}(n-1).$$

Обозначим через x_i число ребер в i-м цикле кактуса BCa_n, $x_i = 2\bar{x}_i \geqslant 4$, $i = 1, \ldots k$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leqslant m = n + k - 1$. Тогда в силу леммы 1 получим $t(BCa_n) = x_1 x_2 \ldots x_k$.

Применим неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Имеем

$$t(BCa_n) = x_1 x_2 \ldots x_k \leqslant \left(\frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)\right)^k \leqslant \left(\frac{1}{k}(n + k - 1)\right)^k = \left(1 + \frac{n-1}{k}\right)^k = a_k(n).$$

В теореме 3 доказано, что последовательность $a_k(n)$ возрастает при фиксированном n. Таким образом, максимальное число остовных деревьев в двудольном кактусе с n вершинами получается при максимально возможном числе циклов в таком кактусе, которое меньше или равно $(n-1)/3$. После подстановки в выражение для $a_k(n)$ значения $k_{\max}$ получим утверждение теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воблый В. А.* О числе остовных деревьев в помеченном кактусе// Прикл. дискр. мат. Приложение. — 2017. — *10.* — С. 139–140.
2. *Воблый В. А., Кононенко Д. А.* Оценка надежности кактусных информационных сетей с заданным числом циклов// в кн.: Мат. XXI Междунар. семин. «Комбинаторные конфигурации и их приложения». — Кропивницкий, 2019. — С. 32–34.
3. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. — М.: Наука, 1989.
4. *Татт Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1988.
5. *Харари Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1973.
6. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. — М.: Мир, 1977.
7. *Atajan T., Inaba Y.* Network reliability analysis by counting the number of spanning trees// Proc. IEEE Int. Symp. on Communications and Information Technology — 2004. — *1.* — С. 601–604.
8. *Fard N., Lee T.* Spanning tree approach in all-terminal network reliability expansion// Comput. Commun. — 2004. — *24.* — С. 601–604.
9. *Fernau H., Ryan J.F., Sugeng K. A.* A sum labeling for generalized fiendship graph// Discr. Math. — 2008. — *308.* — С. 734–740.
10. *Fu-Shang P. Tsen, Ting-Yi Sung, Men-Yang Lin, Myrvold W.* Finding the most vital edges wirh respect to the number of spanning trees// IEEE Trans. Reliability. — 2001. — *24.* — С. 1348–1353.
11. *Lam C. Y., Ip W. H.* An improved spanning tree approach for the reliability analysis of supply chain collaborative network// Enterp. Inf. Syst. — 2012. — *6*, № 4. — С. 405–418.
12. *Mertzios G. B., Unger W.* The friendship problem on graphs// J. Multiple-Valued Logic Soft Comput. — 2014. — *27*, № 2-3. — С. 1–11.
13. *Zarghami S. A., Gunawan I., Schultmann F.* Exact reliability evaluation of infrastructure networks using graph theory// Qual. Reliab. Eng. Int. — 2019. — *36*, № 2. — С. 498–510.
14. *Zhang Zhongzhi, Shuyang Gao, Lichao Chen, Shuigeng Zhou, Hongjuan Zhang, Jihong Guan* Mapping Koch curves into scale-free small-world networks// J. Phys. A: Math. Theor. — 2010. — *43.* — 395101.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Воблый Виталий Антониевич (Voblyi Vitalii Antonievich)

Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук, Москва

(Russian Institute for Scientific and Technical Information, Moscow, Russia)

E-mail: `vitvobl@yandex.ru`

Кононенко Дмитрий Андреевич

Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук, Москва

(Russian Institute for Scientific and Technical Information, Moscow, Russia)

E-mail: `dimonkononenko@gmail.com`